数理解析研究所講究録
第 543 巻 1985 年 13-52

Sharp予想の特別な場合

愛媛大・理　　青山　陽一 (Yoichi Aoyama)
日大・文理　　後藤　四郎 (Shiro Goto)

Dualizing Complexの存在についてのSharp予想に関して考察することにする。

まずdualizing complexに関して簡単に復習しておこう。dualizing complexの概念は[13]によるのであるが，ここではSharp氏の論文に従って述べていくことにする。なお環と言えば断わらない限り可換ネーター環∋1≠0であるものとする。

Definition ([16,(2.4)]. cf. [13, V. §2]). Rを環とする。R-加群の複体 $I^{\cdot} = \cdots \to I^{i-1} \to I^{i} \to I^{i+1} \to \cdots$ は次の条件を満たすときRのdualizing complexであると言う：

(D1)　$I^{\cdot}$ bounded

(D2)　$H^i(I^{\cdot})$ 有限生成 for $\forall i$

(D3)　I^i injective R-module for $\forall i$

(D4) 任意のR-加群の*bounded complex* $X^{\cdot}$ s.t. $H^i(X^{\cdot})$有限生成 for $\forall i$, に対し，自然な写像 $\theta(X^{\cdot}; I^{\cdot})^{\cdot}: X^{\cdot} \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(X^{\cdot}, I^{\cdot}), I^{\cdot})$ ([16, (2·3)])が*quasi-isomorphism* (*quism*と略す)である。

(D1), (D2), (D3)の下で，(D4)は次の(D4')と同値である：

(D4') 自然な写像 $\alpha(I^{\cdot})^{\cdot}: R \to \mathrm{Hom}_R(I^{\cdot}, I^{\cdot})$ ([16, (2·3)])が*quism*である　([16, (3·6)])

*dualizing complex*が存在すれば，次の意味で一意的である。

([13, V. §3], [16, (4·6)]). Spec(R)が連結，$I^{\cdot}, J^{\cdot}$をRの*dualizing complex*とすると，整数t，可逆R-加群Pと*quism*: $I^{\cdot} \to J^{\cdot}[t] \otimes_R P$ (~[ ]は*shift functor*)が存在する。

Rを有限次元の*Gorenstein*環，$I^{\cdot}$をRの*minimal injective resolution*とすれば，$I^{\cdot}$はRの*dualizing complex*である([16, (3·7)])が，これは $\bigoplus_i I^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} E(R/\mathfrak{p})$ ($E(R/\mathfrak{p})$は$R/\mathfrak{p}$の*injective envelope*)という特別な形をしている。この様なものを*fundamental*と言う。即ち，

Definition ([18, (1.1)]). $I^{\cdot}$が(D1), (D2)と次の(D5)を満たすと

き, fundamental dualizing complex であると言う:

(D5) $\bigoplus_i I^i \cong \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} E(R/\mathfrak{p})$

(fundamental dualizing complex は dualizing complex である。)

([11, 3.6]). dualizing complex が存在すれば, それの reduction である fundamental dualizing complex が存在する。

dualizing complex が存在するための十分条件として, 次はよく知られている。

([13, V. §10], [16, (3·7) and (3·9)], [17, (3·5)], [12, (3·4)]). 有限次元の Gorenstein 環は dualizing complex を持つ。(min. inj. resol. がそう)

$R \to S$ を環準同型で S を有限生成 R-加群とするものとする。このとき R が dualizing complex $I^\cdot$ を持てば, $\mathrm{Hom}_R(S, I^\cdot)$ は S の dualizing complex である。

R が dualizing complex $I^\cdot$ を持てば, $R[X]$ (resp. $R[\![X]\!]$) 上 dualizing complex $J^\cdot$ と quism: $R[X] \otimes_R I^\cdot$ (resp. $R[\![X]\!] \otimes_R I^\cdot$) $\to J^\cdot$ が存在する。

また必要条件として,

([13, V. §10], [17]). R が dualizing complex を持てば,

$\dim R < \infty$. R は catenary. formal fibre はすべて Gorenstein. $\mathrm{Gor}(R) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid R_{\mathfrak{p}}$ Gorenstein$\}$ は open. 有限生成 R-algebra は dualizing complex を持つ. 従って R は acceptable.

Faltings と Ogoma によって dualizing complex が存在するための必要十分条件が与えられているが，ここでは省略するので [4] 及び [15] を見て下さい。平坦射による挙動は[12]で研究されている。

さて実際に dualizing complex を持つ環を与えようとすれば，「有限次元で Gorenstein環の準同型像になっている環は dualizing complex を持つ」によるしか現在のところ方法がない様である。([4], [15] の結果があるが) そして Cohen-Macaulay 環の場合にはこの様なものに限られる訳である([18, (4.3)])。そこで Sharp 氏はこの逆を予想した。即ち，

(SC) Sharp 予想 ([18, (4.4)]). 環 R が dualizing complex を持てば，R は Gorenstein 環の準同型像である。

すでに述べたように，Cohen-Macaulay環に対しては(SC)が正しいことはよく知られている。([18, (4.3)]) Cohen-Macaulay でない場合は今まで殆んど知られていなかった。本稿では局所

環に対し(SC)を考察することにする。局所環と限らない場合次元が2以下なら(SC)が正しいことを小駒氏が証明した。これについては，次の小駒氏の稿を見て下さい。

以後，$(A,\mathfrak{m})$をd次元局所環とする。完備化を^で示す。Aが*dualizing complex* $D_A^{\cdot}$を持てば，*canonical module* K_Aを持つ。実際$K_A = H^s(D_A^{\cdot})$, $s = \min\{i \mid H^i(D_A^{\cdot}) \neq 0\}$，で与えられる。〔*canonical module*については [14], [2] を参照) また $H^i_{\mathfrak{m}}(A) \cong \mathrm{Hom}_A(H^{s+d-i}(D_A^{\cdot}), E(A/\mathfrak{m}))$ である。ここで示そうとする結果は次の通りである。

(1.1) $\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(A)) < \infty$ *for* $i \neq d$ のとき，次は同値である：

(a) Aは*Gorenstein*環の準同型像である.

(b) Aの*dualizing complex*が存在する.

(c) Aの*canonical module*が存在する.

(1.5) $d = 1$ のとき，次は同値である：

(a) Aは*Gorenstein*環の準同型像である.

(b) Aの*dualizing complex*が存在する.

(c) Aの*canonical module*が存在する.

(d) $A \to \hat{A}$は*Gorenstein*射である.

(1.7) $d=2$ のとき，次は同値である：

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である.

(b) A の dualizing complex が存在する.

(c) A の canonical module が存在し，$A \to \hat{A}$ が Gorenstein 射である.

(d) 任意の ideal $\mathfrak{a}\,(\neq A)$ に対し，$A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在する.

(2.1) (S_2) な局所環に対し (SC) が正しければ，一般の局所環に対し (SC) は正しい。

(2.3) $d \leqq 4$ のとき，A の dualizing complex が存在すれば，A は Gorenstein 環の準同型像である。

(3.10) $d \geqq 5$ のとき，A が (S_{d-2}) で，$\operatorname{depth} A \geqq d-1$ かつ $\operatorname{depth} K_A \geqq 3$ ならば，A の dualizing complex が存在すれば，A は Gorenstein 環の準同型像である。

R を環，M を有限生成 R-加群，N をその部分加群，$\dim M < \infty$ とする。$\operatorname{Assh}(M)=\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M) \mid \dim R/\mathfrak{p} = \dim M\}$ とおく。$M \supseteq N = Q_1 \cap \cdots \cap Q_t$ を最短準素部分加群分解で，$\dim M/Q_i = \dim M/N$

$\Longleftrightarrow 1 \leqq i \leqq s$ $(1 \leqq s \leqq t)$ なるものとするとき，$U(N) = U_M(N)$ $= Q_1 \cap \cdots \cap Q_s$ とおく（一意的に決まる）。

§1. この節では，A が $\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(A)) < \infty$ for $i \neq d$ を満たすとき（finite local cohomology であると言う。FLCと略する。），及びそれより簡単に判る $d \leqq 2$ のときを考察する。$U = U_A(0)$ とおく。A が FLC ならば $U = H^0_{\mathfrak{m}}(A)$ である。

(1.1) Theorem. A が FLC であるとき，次は同値である：

(a) A は Gorenstein環の準同型像である.

(b) A の dualizing complex が存在する.

(c) A の canonical module が存在する.

(a) ⇒ (b) ⇒ (c) は一般の局所環に対しよく知られている。(c) ⇒ (b) は一般には成立しない。([15, §6. Example 2], (1.9))

Proof of (c) ⇒ (b). $I^{\cdot}$ を canonical module K_A の min. inj. resol. とし，$K^{\cdot} = H^0_{\mathfrak{m}}(I^{\cdot})$, $J^{\cdot} = I^{\cdot}/K^{\cdot}$ とおく。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し，$(K_A)_{\mathfrak{p}} \cong K_{A_{\mathfrak{p}}}$ ([2, 4.3]) で $A_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay であるから $J^i \cong \bigoplus_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=i} E(A/\mathfrak{p})$ for $i < d$, $J^i = 0$ for $i \geqq d$ となる。([14, Satz 6.1])

$d \geqq 2$のとき。$\operatorname{depth} K_A \geqq 2$だから$K^0=0$, $K^1=0$である。complexの完全列 $0 \to K^\cdot \to I^\cdot \to J^\cdot \to 0$より長完全列 $\cdots \to H^{i-1}(I^\cdot) \to H^{i-1}(J^\cdot) \to H^i(K^\cdot) \to H^i(I^\cdot) \to H^i(J^\cdot) \to H^{i+1}(K^\cdot) \to \cdots$ を得る。$H^0(I^\cdot) = K_A$, $H^i(I^\cdot)=0$ for $i \neq 0$, $H^i(K^\cdot) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(K_A)$ for $\forall i$, $H^0(K^\cdot)=0$, $H^1(K^\cdot)=0$であるから$H^0(J^\cdot) \cong K_A$, $H^i(J^\cdot) \cong H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(K_A)$ for $i>0$である。[19, (1.5)]より $H^i_{\mathfrak{m}}(K_A)$有限生成 for $i \neq d$であるから，$H^i(J^\cdot)$ 有限生成 for $i<d-1$ である。完全列$0 \to U \to A \xrightarrow[\text{nat.}]{h} \operatorname{Hom}_A(K_A, K_A) \to \operatorname{Coker}(h) \to 0$に$\operatorname{Hom}_A(\ , E(A/\mathfrak{m}))$ を作用させて完全列 $0 \to X \to H^d_{\mathfrak{m}}(K_A) \to E(A/\mathfrak{m}) \to Y \to 0$ を得る ($X = \operatorname{Hom}_A(\operatorname{Coker}(h), E(A/\mathfrak{m}))$, $Y = \operatorname{Hom}_A(U, E(A/\mathfrak{m}))$)。$U$と$\operatorname{Coker}(h)$ は長さ有限であるから，XとYもそうである。$J^{d-1} \twoheadrightarrow H^{d-1}(J^\cdot) \xrightarrow{\sim} H^d_{\mathfrak{m}}(K_A) \to E(A/\mathfrak{m})$により写像$J^{d-1} \to E(A/\mathfrak{m})$を決める。そこで $D^\cdot = \cdots 0 \to D^0 = J^0 \to \cdots \to D^{d-1} = J^{d-1} \to D^d = E(A/\mathfrak{m}) \to 0 \cdots$ とする。$H^i(D^\cdot) \cong H^i(J^\cdot)$ for $i<d-1$, $H^{d-1}(D^\cdot) \cong X$, $H^d(D^\cdot) \cong Y$である。よって$D^\cdot$は(D1),(D2),(D5)を満たし，Aの fundamental dualizing complex である。

$d=1$のとき。$\operatorname{depth} K_A = 1$だから$K^0=0$である。完全列 $0 \to U \to A \to \operatorname{Hom}_A(K_A, K_A) \to 0$より完全列 $0 \to H^1_{\mathfrak{m}}(K_A) \to E(A/\mathfrak{m}) \to Y \to 0$ ($Y = \operatorname{Hom}_A(U, E(A/\mathfrak{m}))$)を得る。$\ell(U)<\infty$ だから$\ell(Y)<\infty$である。また完全列$0 \to K_A \to J^0 = H^0(J^\cdot) \to H^1_{\mathfrak{m}}(K_A) \to H^1(I^\cdot)=0$がある。従って$J^0 \to E(A/\mathfrak{m})$ を得る。そこで $D^\cdot = \cdots 0 \to D^0 = J^0 \to D^1 = E(A/\mathfrak{m}) \to 0 \cdots$ とする。$H^0(D^\cdot) \cong K_A$, $H^1(D^\cdot) \cong Y$であり，$D^\cdot$はAの funda-

mental dualizing complex である。　Q.E.D. for (c) ⇒ (b)

(b) ⇒ (a) の証明には次の Lemma が必要である。それは前稿の *unconditioned strong d-sequence* (*u.s.d-*列と言おう) の理論の一つの応用である。

(1.2) Lemma([9, (10.7)]). A が *FLC* で *depth* $A > 0$ とすると，$\mathfrak{m}$-準素 *ideal* $\mathfrak{q}$ で *Rees* 環 $\mathcal{R}(A, \mathfrak{q}) = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{q}^i$ が *Cohen-Macaulay* となるものが存在する。逆も成立する。

Proof of (b) ⇒ (a). *depth* $A > 0$ の場合。上の Lemma で言う様な *ideal* $\mathfrak{q}$ をとる。$\mathcal{R}(A, \mathfrak{q})$ は A 上有限生成環だから *dualizing complex* を持ち，*Cohen-Macaulay* だから *Gorenstein* 環の準同型像となる。従って，A も *Gorenstein* 環の準同型像である。
depth $A = 0$ の場合。$A \supset (0) = U \cap I$ (準素分解より，I $\mathfrak{m}$-準素) とする。A/U は *dualizing complex* を持ち，$H^0_{\mathfrak{m}}(A/U) = 0$, $H^i_{\mathfrak{m}}(A/U) \cong H^i_{\mathfrak{m}}(A)$ *for* $i > 0$ であるから，すでに示したことより *Gorenstein* 局所環 R の準同型像である。A/I は *artinian* だから *Gorenstein* 局所環 S の準同型像である。ここで $\dim R = \dim S = n \geq \max\{2, d\}$ としてよい。$\varphi : R \oplus S \to A/U \oplus A/I$ とし $B = \varphi^{-1}(A)$ とする。B は環 (ネーター的は後で判る) であり，次の可換図形を得る。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & R\oplus S \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & R\oplus S/B \arrow[r] \arrow[d, "\varsigma"] & 0 \quad (\text{完全}) \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A/U \oplus A/I \arrow[r] & A/U+I \arrow[r] & 0 \quad (\text{完全})
\end{tikzcd}$$

$\ell(A/U+I)<\infty$ であるから $R\oplus S$ は B 上有限生成加群となり，B はネーター的である。従って B は $\mathfrak{n}=\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ を極大 ideal とする n 次元局所環である。上の完全列より $H^i_{\mathfrak{n}}(B)=0$ for $i\neq 1, n$, $H^1_{\mathfrak{n}}(B)\cong R\oplus S/B$（長さ有限）を得る。[3, 1.7]より B は $R\oplus S$ を canonical module として持つ。従って (c)⇒(b) 及び depth >0 の場合より，B は Gorenstein 環の準同型像であり，A もそうである。

Q.E.D. for (b)⇒(a)

(1.3) Corollary.　$d=3$ のとき，A が canonical module を持ち (S_2) であれば，A は Gorenstein 環の準同型像である。

(1.4) Corollary.　$d=2$ のとき，次は同値である：

(a)　A の canonical module が存在する。

(b)　A/U は Gorenstein 環の準同型像である。　(cf. [2,(1.12)])

1次元 Cohen-Macaulay 局所環に対しては，canonical module の存在等と formal fibre の Gorenstein 性とが同値であることが知られている([6,(5·3)])が，Cohen-Macaulay でない場合も同様の結

果が成立する。即ち，

(1.5) Proposition. $d=1$ のとき，次は同値である：

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である。

(b) A の dualizing complex が存在する。

(c) A の canonical module が存在する。

(d) $A \to \hat{A}$ は Gorenstein 射である。

Proof. 1次元局所環は FLC であるから，(a)⇔(b)⇔(c) は (1.1) の特別な場合である。(a)⇒(d) はよく知られている。(d)⇒(b) を示そう。仮定より，A の素 ideal $\mathfrak{p}$ に対し $E(A/\mathfrak{p}) \otimes_A \hat{A} \cong \bigoplus_{P \cap A = \mathfrak{p}} E(\hat{A}/P)$ である。$\hat{A}$ の fundamental dualizing complex $D^{\cdot} = 0 \to \bigoplus_{P \neq \hat{\mathfrak{m}}} E(\hat{A}/P) \to E(\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}) \to 0$ をとる。$\bigoplus_{P \neq \hat{\mathfrak{m}}} E(\hat{A}/P) \cong (\bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} E(A/\mathfrak{p})) \otimes_A \hat{A}$，$E(\hat{A}/\hat{\mathfrak{m}}) \cong E(A/\mathfrak{m}) \otimes_A \hat{A} \cong E(A/\mathfrak{m})$ であるから，A 上の complex $I^{\cdot} = 0 \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}} E(A/\mathfrak{p}) \to E(A/\mathfrak{m}) \to 0$ と $I^{\cdot} \otimes_A \hat{A} \cong D^{\cdot}$ as complexes を得る。このとき $I^{\cdot}$ は A の fundamental dualizing complex である。　Q.E.D.

2次元だと canonical module の存在だけでは駄目で，formal fibre の Gorenstein 性の条件を加える必要がある。ただし，equi-dimensional のときは不要である。それらを示す前に，dualizing complex の存在に関して有効な Faltings-Ogoma の結果を述べてお

こう。

(1.6) Lemma ([4, Lemma 3 and 5], [15, 3.7]).

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dr, "\varphi"] & \\ B=R\times_T S \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \\ & S \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

を環の pull-back diagram で, φ が onto, ψ が finite なるものとする。R (resp. S) の fundamental dualizing complex $I^\cdot$ (resp. $J^\cdot$) が存在して $\mathrm{Hom}_R(T, I^\cdot) \cong \mathrm{Hom}_S(T, J^\cdot)$ as complexes を満たしているとする。このとき, B の fundamental dualizing complex $D^\cdot$ で $\mathrm{Hom}_B(R, D^\cdot) \cong I^\cdot$, $\mathrm{Hom}_B(S, D^\cdot) \cong J^\cdot$ as complexes を満たすものが存在する。 特に T が局所環のときは, R と S が共に dualizing complex を持てば, B も dualizing complex を持つ。

(1.7) Proposition. $d=2$ のとき, 次は同値である:

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である。

(b) A の dualizing complex が存在する。

(c) A の canonical module が存在して, $A \to \hat{A}$ が Gorenstein 射である。

(d) 任意の ideal $\mathfrak{a}$ ($\neq A$) に対し, $A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在する。

Proof. (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c), (d) が任意の次元で成立することはよく知られている。

(c)⇒(d)： $\dim A/\mathfrak{a}=2$ のとき，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, K_A)$ が $A/\mathfrak{a}$ の canonical module である。$\dim A/\mathfrak{a}=1$ なら，$A/\mathfrak{a}\to\widehat{A/\mathfrak{a}}$ がGorenstein射だから(1.5)により，よい。$\dim A/\mathfrak{a}=0$ なら，明らか。

(d)⇒(a)： $A\supset(0)=U\cap I$（準素分解より）とする。(1.4)より A/U はGorenstein局所環 R の準同型像である。従って $U=0$ ならよい。$U\neq 0$ とする。$\dim A/I\leqq 1$ で，A/I は canonical module を持つから Gorenstein局所環 S の準同型像である。(cf. (1.5)) ここで $\dim R=\dim S=2$ としてよい。$\varphi: R\oplus S\to A/U\oplus A/I$ とし，$B=\varphi^{-1}(A)$ とする。B は環（ネーター的は後で判る）であり，次の可換図形を得る。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] & R\oplus S \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & R\oplus S/B \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 & \text{(完全)} \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A/U\oplus A/I \arrow[r] & A/U+I \arrow[r] & 0 & \text{(完全)}
\end{tikzcd}$$

$R\oplus S/B\cong A/U+I$ は有限生成 B-加群であるから $R\oplus S$ もそうであり，従って B はネーター的である。よって B は $\mathfrak{n}=\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ を極大idealとする2次元局所環である。$A/U+I$ は局所環で，$R\to A/U+I$ と $S\to A/U+I$ は共にontoであるから，(1.6)により B の dualizing complex が存在する。上の完全列より $H^0_{\mathfrak{n}}(B)=0$, $H^1_{\mathfrak{n}}(B)\cong H^0_{\mathfrak{n}}(R\oplus S/B)$ 有限生成であるから，(1.1)より B はGorenstein環の準同型像であり，従ってAもそうである。　Q.E.D.

(1.8) Corollary.　$d=2$ のとき，Aの canonical module が存

在し，Aが *equidimensional* (i.e. $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(A)$, $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A$) であるならば，Aは Gorenstein 環の準同型像である。

Proof. 任意の ideal $\mathfrak{a}\,(\neq A)$ をとる。$\dim A/\mathfrak{a}=0$ なら，$A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在することは明らか。$\dim A/\mathfrak{a}=2$ なら，$\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, K_A)$ が $A/\mathfrak{a}$ の canonical module である。$\dim A/\mathfrak{a}=1$ とする。P を $\hat{A}$ の素 ideal $\neq \hat{\mathfrak{m}}$ で $\mathfrak{a}\hat{A}$ を含むものとする。$\mathfrak{p} = P \cap A$ とおく。$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}, \supseteq \mathfrak{a}$ である。A が equidimensional だから $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Supp}(K_A)$ で $(K_A)_{\mathfrak{p}} \cong K_{A_{\mathfrak{p}}}$，即ち $A_{\mathfrak{p}}$ の canonical module が存在する。([2, (1.7) and 4.3]) $K_{A_{\mathfrak{p}}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \hat{A}_P \cong K_{\hat{A}_P}$ で $\hat{A}_P/\mathfrak{p}\hat{A}_P$ は artinian だから，[2, 4.1] により $\hat{A}_P/\mathfrak{p}\hat{A}_P$ は Gorenstein である。従って $A/\mathfrak{a} \to \widehat{A/\mathfrak{a}}$ は Gorenstein 射であり，(1.5) により $A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在する。よって (1.7)(d) が成立し，主張を得る。 Q.E.D.

(1.9) Remark. 任意の整数 $n \geq 2$ に対し，n 次元局所環で，canonical module は存在するが，dualizing complex は存在しない，ものがある。(cf. [5])

(1.10) Remark. 任意の ideal $\mathfrak{a}\,(\neq A)$ に対し $A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在すること，と formal fibre がすべて Gorenstein であること，の両方を仮定すると A の dualizing complex が存在

することが知られている。([15, 5.5])

§2. この節では，局所環に対し(SC)が正しいことを示すには，Serreの条件(S_2)を仮定してよいこと，及び，次元4以下の局所環に対し(SC)が正しいこと，を証明しよう。

(2.1) Lemma. $\dim < n$ なる局所環に対し，(SC)は正しい．
$\dim = n$，(S_2)なる局所環に対し，(SC)は正しい．
$\Longrightarrow$ $\dim = n$ なる局所環に対し，(SC)は正しい．

Proof. Bをdualizing complexを持つn次元局所環とする。主張を得るためには $\mathrm{Ass}(B) = \mathrm{Assh}(B)$ としてよいことをまず示そう。$B \supset (0) = I \cap J$ ($I = U_B(0)$，準素分解より)とする。今，B/I がGorenstein局所環Rの準同型像であるとしよう。$\dim B/J < n$ だから仮定よりGorenstein局所環Sの準同型像である。ここで，$\dim R = \dim S = n$ としてよい。$\varphi : R \oplus S \to B/I \oplus B/J$ とし，$C = \varphi^{-1}(B)$とおく。(1.7)のProof中の議論と同様にして，Cはdualizing complexを持つn次元局所環であることが判る。また $\mathrm{Ass}(C) = \mathrm{Assh}(C)$ である。従って，CがGorenstein環の準同型像ならばBもそうである。故に，$\mathrm{Ass}(B) = \mathrm{Assh}(B)$ としてよい。

今，主張が成立しないとする。すでに示したことにより，dualizing complexを持ちGorenstein環の準同型像でないn次元局所環Bで$\mathrm{Ass}(B)=\mathrm{Assh}(B)$となるものが存在する。仮定より$B$は$(S_2)$でない。従って $\mathit{depth}\,B_{\mathfrak{p}}=1$　$\dim B_{\mathfrak{p}}>1$となる素ideal $\mathfrak{p}$がある。$\Delta(B)=\{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(B)\mid \mathit{depth}\,B_{\mathfrak{p}}=1,\ \dim B_{\mathfrak{p}}>1\}$とおく。$Z=\mathrm{Coker}(B\xrightarrow{\mathrm{nat.}}\mathrm{Hom}_B(K_B,K_B))$とおく。$(\mathrm{Ass}(B)=\mathrm{Assh}(B)$だから$\mathrm{Ker}$は$(0)$。$([2,(1.8)]))$

$\mathfrak{p}\in\Delta(B)$ならば$\mathit{depth}\,B_{\mathfrak{p}}=1$，$\mathit{depth}\,\mathrm{Hom}_B(K_B,K_B)_{\mathfrak{p}}\geqq 2$ だから $\mathit{depth}\,Z_{\mathfrak{p}}=0$，即ち $\Delta(B)\subseteq\mathrm{Ass}(Z)$ である。$\sigma(B)=\max\{\dim B_{\mathfrak{p}}\mid\mathfrak{p}\in\Delta(B)\}$とおく。$\sigma(B)>1$である。また，$\bar{\Delta}(B)=\{\mathfrak{p}\in\Delta(B)\mid\dim B_{\mathfrak{p}}=\sigma(B)\}$，$\Delta'(B)=\Delta(B)\setminus\bar{\Delta}(B)$とおく。上に述べた反例の中で$\sigma(B)$を最小にする$B$をとり，その$\sigma(B)$を$s$とおく。$s>1$である。dualizing complexを持つ次元2以上の局所環$(R,\mathfrak{p})$は，$\mathrm{Ass}(R)=\mathrm{Assh}(R)$を満たせば，$\ell(H^1_{\mathfrak{p}}(R))<\infty$である。従って，非零因子$x\in\bigcap_{\mathfrak{p}\in\bar{\Delta}(B)}\mathfrak{p}\setminus\bigcup_{\mathfrak{p}\in\Delta'(B)}\mathfrak{p}$で$x\cdot H^1_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}})\doteqdot 0$ for $\forall\mathfrak{p}\in\bar{\Delta}(B)$となるものが存在する。仮定より，$B/U_B(xB)$はGorenstein局所環$G$の準同型像である。$\dim G=n$としてよい。$B\to B/U_B(xB)$，$G\to B/U_B(xB)$によるfibre productを$C$とする：

$$C=B\underset{B/U_B(xB)}{\times}G\ \begin{array}{c}\nearrow B\searrow\\ \searrow G\nearrow\end{array}B/U_B(xB),\quad 0\to C\to B\oplus G\to B/U_B(xB)\to 0\ \text{完全。}$$

(1.7)のProof中の議論と同様にして，Cはdualizing complexを持つn次元局所環であることが判る。また$\mathrm{Ass}(C)=\mathrm{Assh}(C)$である。$B$は$C$の準同型像だから，$C$はGorenstein環の準同型像

でない。仮定よりCは(S_2)でない。従って$\Delta(C)\neq\phi$。$P\in\bar{\Delta}(C)$をとり，$t=\dim C_P=\sigma(C)$とおく。Bのとり方より$t\geqq s$である。今，$(B/U_B(xB))_P=0$とすると，$C_P\cong B_P$ or G_PであるがG_PはGorensteinだから$C_P\cong B_P$である。従って$PB\in\bar{\Delta}(B)$で$PB\ni x$となる。故に$U_B(xB)_P\neq B_P$で矛盾。よって$(B/U_B(xB))_P\neq 0$。$\dim(B/U_B(xB))_P=r$とおく。$\dim B_P=\dim G_P=\dim C_P=r+1$となり，$\dim C_P=t$より$r+1=t\geqq s>1$となる。完全列$0\to C_P\to B_P\oplus G_P\to(B/U_B(xB))_P\to 0$において，$\operatorname{depth} C_P=1$, $\operatorname{depth} G_P=r+1\geqq 2$, $\operatorname{depth}(B/U_B(xB))_P>0$であるから$\operatorname{depth} B_P=1$となり，$PB\in\bar{\Delta}(B)$となる。従って$x\cdot H^1_P(B_P)=0$だから，$H^1_P(B_P)\to H^1_P(B_P/xB_P)$は単射である。次に$U_B(xB)_P/xB_P$が長さ有限であることを示そう。$P\supsetneqq Q\in\operatorname{Spec}(C)$で$U_B(xB)_Q/xB_Q\neq 0$となるものが存在したとする。当然$QB\ni x$である。$U_B(xB)$の定義より，$\mathfrak{q}\in\operatorname{Ass}_{B_Q}(B_Q/xB_Q)\setminus\operatorname{Assh}_{B_Q}(B_Q/xB_Q)$が存在する。このとき$\operatorname{depth} B_{\mathfrak{q}}=1$で$\dim B_{\mathfrak{q}}\leqq\dim B_Q<\dim B_P=s$であり$\mathfrak{q}\ni x$だから$\mathfrak{q}\notin\Delta(B)$となる。従って，$\dim B_{\mathfrak{q}}=1$で$\mathfrak{q}\in\operatorname{Assh}_{B_Q}(B_Q/xB_Q)$となって，矛盾。故に，$\ell(U_B(xB)_P/xB_P)<\infty$である。従って，$H^1_P(U_B(xB)_P/xB_P)=0$となり，$H^1_P(B_P/xB_P)\to H^1_P(B_P/U_B(xB)_P)$は単射である。先の単射と合わせて，$H^1_P(B_P)\to H^1_P((B/U_B(xB))_P)$が単射であることが判る。故に，完全列$0=H^0_P((B/U_B(xB))_P)\to H^1_P(C_P)\to H^1_P(B_P\oplus G_P)\cong H^1_P(B_P)\to H^1_P((B/U_B(xB))_P)$（$H^1_P(G_P)=0$である）より，$H^1_P(C_P)=0$を得る。これは$\operatorname{depth} C_P=1$に矛盾する。従って，反

例は存在しない。　Q.E.D.

次元4以下で(SC)が正しいことを示すのであるが，そのためには(1.2)を半局所環の場合に拡張しておく必要があるので，まずそれを述べることにする。

(2.2) Remark.　(1.2)で言う$\mathfrak{q}$はどの様にとればよかったかを見てみよう。FLCの場合には，十分大きなtをとれば，$\mathfrak{m}^t$に含まれるパラメーター系は$u.s.d$-列をなす([9, (7.7)])。その様なパラメーター系$a_1, \ldots, a_d$をとり，ideal $(a_1, \ldots, a_d)$によるRees環をR，graded極大idealをNとすると，$H_N^0(R)=0$ ([9, (5.2)])で，$1 \leq p \leq d$に対し$[H_N^p(R)]_i = 0$ for $i < 2-p$, $i \geq 0$ ([9, (5.7)])である。従って，Rの$d-1$次以上のVeronese部分環R'をとれば$H_{N'}^p(R') = 0$ for $p \neq d+1$ (N'はR'のgraded極大ideal)となる([9, (10.6)])。よって，$u \geq d-1$として$\mathfrak{q} = (a_1, \ldots, a_d)^u$とおけばよいことが判る。即ち，勝手にパラメーター系$x_1, \ldots, x_d$をとり，十分大きなt, uをとり$\mathfrak{q} = (x_1^t, \ldots, x_d^t)^u$とすればよいと言う要領である。(詳しくは，山岸氏の稿，[9]を見て下さい。)

$(B, \mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_s)$を半局所環で$\mathrm{ht}\,\mathfrak{n}_1 = \cdots = \mathrm{ht}\,\mathfrak{n}_s$ ($=n$とおく)なるものとする。$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_s$とおく。今，depth $B_{\mathfrak{n}_i} > 0$ for $i=1, \ldots, s$, $\ell(H_{\mathfrak{n}}^i(B)) < \infty$ for $i \neq n$と仮定する。($H_{\mathfrak{n}}^i(B) \cong H_{\mathfrak{n}_1}^i(B_{\mathfrak{n}_1}) \oplus \cdots$

$\oplus H^i_{\mathfrak{n}_s}(B_{\mathfrak{n}_s})$である） $x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{n}$ を，各 i に対し $B_{\mathfrak{n}_i}$ のパラメーター系になる様にとる。t, u を，$\mathfrak{q}=(x_1^t,\dots,x_n^t)^u$ としたとき，各 i に対し $R(B_{\mathfrak{n}_i}, \mathfrak{q}B_{\mathfrak{n}_i})$ が Cohen-Macaulay になる様に十分大きくとる。そのとき，$R(B,\mathfrak{q})$ は Cohen-Macaulay である。まとめて，$(B,\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_s)$ を $\mathrm{ht}\,\mathfrak{n}_1=\cdots=\mathrm{ht}\,\mathfrak{n}_s$ なる半局所環とする。$\operatorname{depth} B_{\mathfrak{n}_i}>0$ for $i=1,\dots,s$，$\ell(H^i_{\mathfrak{n}}(B))<\infty$ for $i\neq\dim B$ ($\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_1\cdots\mathfrak{n}_s$) となっていれば，ideal $\mathfrak{q}$ で $\sqrt{\mathfrak{q}}=\mathfrak{n}$，$R(B,\mathfrak{q})$ が Cohen-Macaulay となるものが存在する。

(2.3) Theorem. $\dim A\leqq 4$ のとき，A の dualizing complex が存在すれば，A は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof. $d=\dim A\leqq 2$ ならば，§1 ですでに示されている。$d=3$ のときは，(1.3) と (2.1) により判る。$d=4$ とする。(2.1) により，A は (S_2) である，としてよい。さらに (1.1) により，A が FLC でない場合のみやればよい。$CM(A)=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)\mid A_{\mathfrak{p}}$ Cohen-Macaulay$\}$ は open だから，ideal $\mathfrak{a}$ が存在して $\operatorname{Spec}(A)\setminus CM(A)=V(\mathfrak{a})$ となる。A が (S_2) で non-FLC だから $\mathrm{ht}\,\mathfrak{a}=3$ である。故に $V(\mathfrak{a})$ は有限集合である。$\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{m}\}$ について，$\dim A_{\mathfrak{p}}=3$，$A_{\mathfrak{p}}$ は (S_2) で dualizing complex を持つから $\ell(H^2_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}))<\infty$ である。従って，非零因子 $a\in\mathfrak{a}$ で，$a\cdot H^2_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})=0$ for $\forall\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{m}\}$

となるものが存在する。Aは(S_2)であるから $\mathrm{Ass}(A/\mathfrak{a}A)=\mathrm{Assh}(A/\mathfrak{a}A)$ で $A/\mathfrak{a}A \hookrightarrow C=\mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{a}A}(K_{A/\mathfrak{a}A}, K_{A/\mathfrak{a}A})$となる。([2,(1.8)]) $\dim C_{\mathfrak{n}}=3$ *for* $\forall \mathfrak{n}\in \mathrm{Max}(C)$で, Cは(S_2)([2, 3.2])かつ*dualizing complex*を持つから, (2.2)と(1.1)のProof of (b)⇒(a)より, Cは*Gorenstein*環Gの準同型像である。ここで $\mathrm{Max}(G)=\{\psi^{-1}(\mathfrak{n}) \mid \mathfrak{n}\in \mathrm{Max}(C)\}$ (ψは$G\twoheadrightarrow C$), $\dim G_N=4$ *for* $\forall N\in \mathrm{Max}(G)$としてよい。$A\to C$と$G\xrightarrow{\psi} C$による*fibre product*を$B$とおく。

$$B=A\times_C G \begin{tikzcd}[row sep=small] & A \arrow[dr] & \\ {} \arrow[ur] \arrow[dr] & & C, \\ & G \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$0\to B\to A\oplus G\to C\to 0$ 完全。

今までの議論と同様にして, Bは4次元局所環であることが判る。まず, Bが*dualizing complex*を持つことを示そう。Aの*fundamental dualizing complex*を$I^{\cdot}=0\to I^0\to\cdots\to I^4\to 0$, Gのを$J^{\cdot}=0\to J^0\to\cdots\to J^4\to 0$とすると, $\mathrm{Hom}_A(C, I^{\cdot})$と$\mathrm{Hom}_G(C, J^{\cdot})$は共に$C$の*fundamental dualizing complex*であり, $\mathrm{Hom}_A(C, I^0)=0$, $\mathrm{Hom}_G(C, J^0)=0$であるから, Cを連結なものの直和に分解して各々の上では同型である(cf. [16,(4·6)], [11, 4.2], Cは半局所環)ことより, $\mathrm{Hom}_A(C, I^{\cdot})\cong \mathrm{Hom}_G(C, J^{\cdot})$ *as complexes*であることが判る。従って(1.6)により, Bは*dualizing complex*を持つ。次に, Bの極大でない素*ideal* Pに対し, B_Pが*Cohen-Macaulay*であることを示そう。$C_P=0$なら, $B_P\cong A_P$ *or* G_P。$B_P\cong G_P$ならよい。$B_P\cong A_P$とする。$C_P=0$だから$(A/\mathfrak{a}A)_P=0$となり $PA\not\ni\mathfrak{a}$となって, $\mathfrak{a}$のとり方よりA_Pは*Cohen-Macaulay*である。$C_P\neq 0$とし, *dim*

$C_{\mathfrak{p}}=r$ とおく。このとき $\dim B_{\mathfrak{p}}=\dim A_{\mathfrak{p}}=\dim G_{\mathfrak{p}}=r+1$ である。$0\leqq r\leqq 2$ である。$r=0,1$ のとき，AとCは共に(S_2)で G はGorensteinだから，完全列 $0\to B_{\mathfrak{p}}\to A_{\mathfrak{p}}\oplus G_{\mathfrak{p}}\to C_{\mathfrak{p}}\to 0$ より $B_{\mathfrak{p}}$ がCohen-Macaulayであることが判る。$r=2$ のとき，同様に上の完全列より $\operatorname{depth} B_{\mathfrak{p}}\geqq 2$ が判る。$\mathfrak{a}\cdot H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})=0$ だから $H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})\to H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}})$ は単射である。$A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ は2次元で $\operatorname{Ass}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}})=\operatorname{Assh}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}})$ であるから，$\ell(\operatorname{Coker}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}\to C_{\mathfrak{p}}))<\infty$ となり $H^1_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(\operatorname{Coker}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}\to C_{\mathfrak{p}}))=0$ である。故に $H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}})\to H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(C_{\mathfrak{p}})$ は単射である。先の単射と合わせて，$H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})\to H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(C_{\mathfrak{p}})$ が単射であることが判る。従って，完全列 $0=H^1_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(C_{\mathfrak{p}})\to H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}})\to H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}\oplus G_{\mathfrak{p}})\cong H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})\to H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(C_{\mathfrak{p}})$ より $H^2_{\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}})=0$ を得，$B_{\mathfrak{p}}$ がCohen-Macaulayであることが判る。よって，$\operatorname{Ass}(B)=\operatorname{Assh}(B)$ だから，B はFLCである。(1.1)より B はGorenstein環の準同型像である。AはBの準同型像であるから，主張を得る。　　Q.E.D.

§3.　FLC及び次元4以下の局所環の場合には，(SC)の正しいことが判ったのだが，それら以外の場合には現在までのところ殆んど判っていない。但し，Aに色々と条件を付けると判ることがあるので，この節ではそれについて記しておきたい。ここでの議論に，u.s.d-列の理論が有用である。

以後(3.9)まで，次の四つを仮定して議論を進める。

(ア) A は fundamental dualizing complex $D^\cdot = 0 \to D^0 \to \cdots \to D^d \to 0$ を持つ。

(カ) $d \geq 5$.

(サ) A は (S_{d-2}) である。

(タ) A は FLC でない。

(3.1) Lemma. $H^i(D^\cdot)=0$ for $i>2$. $\ell(H^2(D^\cdot))<\infty$. $\dim H^1(D^\cdot)=1$.

Proof. まず，$\mathrm{Hom}_A(H^i(D^\cdot), E(A/\mathfrak{m})) \cong H^{d-i}_{\mathfrak{m}}(A)$ であることを再記しておく。depth $A \geq d-2$ だから $H^i(D^\cdot)=0$ for $i \geq 2$ ($\geq \dim A -$ depth A) である。(S_{d-2}) だから，極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ について $\dim A_{\mathfrak{p}} - \mathrm{depth}\, A_{\mathfrak{p}} \leq 1$ となり，$H^2(D^\cdot_{\mathfrak{p}})=0$ である。($D^\cdot_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の fundamental dualizing complex) 従って $\ell(H^2(D^\cdot))<\infty$ である。$\dim A/\mathfrak{p} \geq 2$ なる素 ideal $\mathfrak{p}$ について，$A_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay だから，$H^1(D^\cdot_{\mathfrak{p}})=0$ となり，$\dim H^1(D^\cdot) \leq 1$ である。A は FLC でないから，$\dim H^1(D^\cdot)=1$ を得る。 Q.E.D.

(3.2) Lemma. $H^i_{\mathfrak{m}}(K_A)=0$ for $i \neq 2,3,d$. $H^2_{\mathfrak{m}}(K_A) \cong H^0_{\mathfrak{m}}(H^1(D^\cdot))$. $H^3_{\mathfrak{m}}(K_A) \neq 0$. 従って，depth $K_A = 2$ or 3 であって，depth $K_A = 3$ $\Leftrightarrow$ depth $H^1(D^\cdot)>0$ $\Leftrightarrow$ $H^1(D^\cdot)$ Cohen-Macaulay.

Proof. $K_A \cong H^0(D^\cdot)$である。$B^i = \mathrm{Im}(D^{i-1} \to D^i)$, $Z^i = \mathrm{Ker}(D^i \to D^{i+1})$, $H^i = H^i(D^\cdot) = Z^i/B^i$とおく。次の4つの短完全列がある：

(1) $0 \to K_A \to D^0 \to B^1 \to 0$　　(2) $0 \to B^1 \to Z^1 \to H^1 \to 0$

(3) $0 \to Z^1 \to D^1 \to B^2 \to 0$　　(4) $0 \to B^2 \to Z^2 \to H^2 \to 0$　。

更に$H^i(D^\cdot) = 0$ for $i > 2$だから, 完全列 (5) $0 \to Z^2 \to D^2 \to \cdots \to D^d \to 0$ がある。$D^0 \cong \bigoplus_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=0} E(A/\mathfrak{p})$だから $H^i_{\mathfrak{m}}(D^0) = 0$ for $\forall i$。従って, 完全列(1)より $H^i_{\mathfrak{m}}(K_A) \cong H^{i-1}_{\mathfrak{m}}(B^1)$ for $\forall i$ 。$D^i \cong \bigoplus_{\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=i} E(A/\mathfrak{p})$だから完全列(5)より $H^i_{\mathfrak{m}}(Z^2) = 0$ for $i \neq d-2$, $H^{d-2}_{\mathfrak{m}}(Z^2) \cong E(A/\mathfrak{m})$。従って, $\ell(H^2) < \infty$であるから, 完全列(4)より $H^i_{\mathfrak{m}}(B^2) = 0$ for $i \neq 1, d-2$, $H^1_{\mathfrak{m}}(B^2) \cong H^2$, $H^{d-2}_{\mathfrak{m}}(B^2) \cong E(A/\mathfrak{m})$。$H^i_{\mathfrak{m}}(D^1) = 0$ for $\forall i$ だから, 完全列(3)より $H^i_{\mathfrak{m}}(Z^1) = 0$ for $i \neq 2, d-1$, $H^2_{\mathfrak{m}}(Z^1) \cong H^2$, $H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(Z^1) \cong E(A/\mathfrak{m})$ 。$\dim H^1 = 1$ だから, 完全列(2)より $H^i_{\mathfrak{m}}(B^1) = 0$ for $i \neq 1, 2, d-1$, $H^1_{\mathfrak{m}}(B^1) \cong H^0_{\mathfrak{m}}(H^1)$, $H^2_{\mathfrak{m}}(B^1) \hookleftarrow H^1_{\mathfrak{m}}(H^1) \neq 0$, $H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(B^1) \cong E(A/\mathfrak{m})$。これらより主張を得る。　Q.E.D.

$\mathrm{Spec}(A) \setminus \mathrm{CM}(A) = \bigcup_{i>0} \mathrm{Supp}(H^i(D^\cdot)) = \mathrm{Supp}(H^1(D^\cdot))$ である。そこで ideal $\mathfrak{a}$ を $V(\mathfrak{a}) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \mathrm{CM}(A)$, $\mathfrak{a} \cdot H^i(D^\cdot) = 0$ for $i \neq 0$ (故に $\mathfrak{a} \cdot H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ for $i \neq d$) となるようにとる。$\dim A/\mathfrak{a} = 1$ で, $V(\mathfrak{a})$は有限集合である。

(3.3) Proposition. $\mathfrak{a}$の元$a_1, \ldots, a_{d-1}$で, 次の(イ)(ロ)(ハ)を満たすものが存在する。

(イ)　$a_1,\ldots,a_{d-1}$ はAのパラメーター系の一部をなす.

(ロ)　$a_1,\ldots,a_{d-1}$ の中, どの $d-2$ 個もA-正則列をなす.

(ハ)　$a_1,\ldots,a_{d-1}$ は u. s. d-列 on A である.

Proof.　$ht\,\mathfrak{a}=d-1$ であるから, $\mathfrak{a}$ の元 $x_1,\ldots,x_{d-1}$ で $ht(x_1,\ldots,x_{d-1})=d-1$ となるものがある。これは明らかに(イ)を満たす。Aが (S_{d-2}) であるから, $x_1,\ldots,x_{d-1}$ は(ロ)も満たす。このとき, 任意の $t_1,\ldots,t_{d-1}>0$ に対して, $x_1^{t_1},\ldots,x_{d-1}^{t_{d-1}}$ も(イ),(ロ)を満たす。$\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{m}\}$ に対し, $A_\mathfrak{p}$ は (S_{d-2}) で $\dim A_\mathfrak{p}=d-1$ であるから, $A_\mathfrak{p}$ は FLC である。従って[9,(7.7)]により, 整数 $n>0$ が存在して $\mathfrak{p}^nA_\mathfrak{p}$ に含まれるパラメーター系は u. s. d-列 on $A_\mathfrak{p}$ for $\forall\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})\setminus\{\mathfrak{m}\}$ である。$y_i=x_i^n\ (i=1,\ldots,d-1)$, $\mathfrak{y}=(y_1,\ldots,y_{d-1})$ とおく。極大でない素 ideal $\mathfrak{p}$ をとる。$\mathfrak{p}\not\supseteq\mathfrak{a}$ ならば $H_1(y_1^{t_1},\ldots,y_{d-1}^{t_{d-1}};A)=0$ for $\forall t_1,\ldots,t_{d-1}>0$ である。$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$ ならば $y_1,\ldots,y_{d-1}$ は u. s. d-列 on $A_\mathfrak{p}$ であるから[9,(3.4)]により $\mathfrak{y}A_\mathfrak{p}\cdot H_1(y_1^{t_1},\ldots,y_{d-1}^{t_{d-1}};A_\mathfrak{p})=0$ for $\forall t_1,\ldots,t_{d-1}>0$ である。従って $\ell(\mathfrak{y}\cdot H_1(y_1^{t_1},\ldots,y_{d-1}^{t_{d-1}};A))<\infty$ for $\forall t_1,\ldots,t_{d-1}>0$。
$a_i=y_i^2\ (i=1,\ldots,d-1)$ とおく。任意の整数 $t_1,\ldots,t_{d-1}>0$ をとり, $L=H_1(a_1^{t_1},\ldots,a_{d-1}^{t_{d-1}};A)$ とおく。$L\cong(a_1^{t_1},\ldots,a_{d-2}^{t_{d-2}}):a_{d-1}^{t_{d-1}}/(a_1^{t_1},\ldots,a_{d-2}^{t_{d-2}})$ で $\ell(\mathfrak{y}L)<\infty$ であるから, $\mathfrak{y}L\subseteq H^0_\mathfrak{m}(A/(a_1^{t_1},\ldots,a_{d-2}^{t_{d-2}}))\cong H^{d-2}_\mathfrak{m}(A)$ (cf. (ロ), $\mathfrak{a}\cdot H^{d-2}_\mathfrak{m}(A)=0$)。$\mathfrak{a}\cdot H^{d-2}_\mathfrak{m}(A)=0$ だから $(a_1,\ldots,a_{d-1})L\subseteq\mathfrak{y}^2L\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{y}L=0$。[9,(3.4)]により $a_1,\ldots,a_{d-1}$ は u. s. d-列 on A である。(注:

(ハ)を満たせば[9,(3.8)]により(イ)を満たし(但し, $ht(a_1,\dots,a_{d-1})>0$とする), (イ)を満たせば(S_{d-2})だから(ロ)を満たす。((S_2)だから, $\mathrm{Ass}(A)=\mathrm{Assh}(A)$である。([15, 4.1], [3, 1.1]) また, A は catenary である。これは今までも断らず使っている。)) Q.E.D.

$\mathfrak{a}$の元$a_1,\dots,a_{d-1}$を(イ),(ロ),(ハ)を満たすようにとり, $\mathfrak{q}=(a_1,\dots,a_{d-1})$とおく。

(3.4) Lemma. (1) $U_A(a_2,\dots,a_{d-1})=(a_2,\dots,a_{d-1}):a_1$.
(2) $\mathrm{Supp}(H_1(a_1,\dots,a_{d-1};A))=V(\mathfrak{a})$.

Proof. (1) $(a_2,\dots,a_{d-1})=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_t$ を最短準素 ideal 分解で $\dim A/\mathfrak{q}_i=2 \Leftrightarrow i\leqq s$ $(1\leqq s\leqq t)$ なるものとする。$\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{p}_i$ とおく。$\mathfrak{p}_i\not\ni a_1$ for $i\leqq s$である。$s<i\leqq t$とする。$\dim A_{\mathfrak{p}_i}>d-2$で, $a_2,\dots,a_{d-1}$ は $A_{\mathfrak{p}_i}$ の極大正則列であるから, $A_{\mathfrak{p}_i}$ は Cohen-Macaulay でない。従って$\mathfrak{p}_i\supseteq\mathfrak{a}\ni a_1$。$a_1^n\in\mathfrak{q}_i$ for $s<i\leqq t$となる整数$n>0$をとる。$a_1,\dots,a_{d-1}$ は u. s. d-列だから $(a_2,\dots,a_{d-1}):a_1=(a_2,\dots,a_{d-1}):a_1^n$ $=\bigcap_{i=1}^{t}(\mathfrak{q}_i:a_1^n)=\bigcap_{i=1}^{s}\mathfrak{q}_i=U_A(a_2,\dots,a_{d-1})$。

(2) $\mathfrak{p}\in\mathrm{Supp}(H_1(a_1,\dots,a_{d-1};A))$ をとると, $\mathfrak{p}\ni a_1,\dots,a_{d-1}$で, $a_1,\dots,a_{d-1}$ は$A_{\mathfrak{p}}$のパラメーター系の一部であって $A_{\mathfrak{p}}$-正則列でない。従って$A_{\mathfrak{p}}$はCohen-Macaulayでない。故に$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$。$\mathfrak{p}$を$\mathfrak{a}$の極小

素 ideal とする。$\dim A_{\mathfrak{p}} = d-1$ で，$a_1, \dots, a_{d-1}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ のパラメーター系である。$A_{\mathfrak{p}}$ は Cohen-Macaulay でないから $a_1, \dots, a_{d-1}$ は $A_{\mathfrak{p}}$-正則列でない。故に，$H_1(a_1, \dots, a_{d-1}; A_{\mathfrak{p}}) \neq 0$ で，$V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{Supp}(H_1(a_1, \dots, a_{d-1}; A))$ となる。 Q.E.D.

(3.5) Lemma. $\operatorname{depth} A = d-1$ のとき，

$\operatorname{depth} K_A = 3 \iff A/U_A(a_2, \dots, a_{d-1})$ Cohen-Macaulay .

Proof. $L = U_A(a_2, \dots, a_{d-1})/(a_2, \dots, a_{d-1})$, $B = A/(a_2, \dots, a_{d-1})$, $C = A/U_A(a_2, \dots, a_{d-1})$ とおく。完全列 $0 \to L \to B \to C \to 0$ を得る。$L = (a_2, \dots, a_{d-1}) : a_1/(a_2, \dots, a_{d-1}) \cong H_1(a_1, \dots, a_{d-1}; A)$ だから $\dim L = 1$ 。$\operatorname{depth} B = 1$ だから $\operatorname{depth} L = 1$ 。C は 2 次元で $U_C(0) = 0$ だから，C は FLC である。完全列 $0 \to H^1_{\mathfrak{m}}(L) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B) \to H^1_{\mathfrak{m}}(C) \to 0$ を得る。各々の $E(A/\mathfrak{m})$-dual を L', B', C' として，完全列 $0 \to C' \to B' \to L' \to 0$ を得る。L は 1 次元 Cohen-Macaulay であるから，L' もそうである。$H^1_{\mathfrak{m}}(B) \cong H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A)$ である ((ロ), $\mathfrak{a} \cdot H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A)$) から，$B' \cong H^1(D^{\cdot}) \otimes_A \hat{A}$ 。$\ell(C') < \infty$ であるから，$\operatorname{depth} K_A = 3 \iff \operatorname{depth} H^1(D^{\cdot}) > 0 \iff C' = 0 \iff C$ Cohen-Macaulay (cf. (3.2)) となる。 Q.E.D.

(3.6) Corollary. $\operatorname{depth} A = d-1$ かつ $\operatorname{depth} K_A = 3$

$\iff A/(a_1, \dots, a_{d-1})$ Cohen-Macaulay .

Proof. L, B, C は(3.5)のProofと同じとする。可換図形

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "a_1"] & B \arrow[r] \arrow[d, "a_1"] & C \arrow[r] \arrow[d, "a_1"] & 0 \ (\text{完全}) \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \ (\text{完全}) \end{tikzcd}$$

より, Cokerの完全列 $0 \to L \to B/a_1B \to C/a_1C \to 0$ を得る。

$B/a_1B \cong A/(a_1, \dots, a_{d-1})$, $C/a_1C \cong A/(a_1) + U_A(a_2, \dots, a_{d-1})$ である。

$\Rightarrow$: (3.5)より C は2次元Cohen-Macaulayで C/a_1C は1次元Cohen-Macaulayである。$L \hookrightarrow B$ で $\operatorname{depth} B = 1$ だから, $\operatorname{depth} L > 0$。故に $\operatorname{depth} B/a_1B > 0$。

$\Leftarrow$: $L \hookrightarrow B/a_1B$ で $\operatorname{depth} B/a_1B > 0$ だから $\operatorname{depth} L > 0$。$\operatorname{depth} C > 0$ だから $\operatorname{depth} B > 0$ となり $\operatorname{depth} A = d-1$ を得る。$H^1_{\mathfrak{m}}(L) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B)$ は単射である。$H^1_{\mathfrak{m}}(B) \cong H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A)$ で $a_1 \cdot H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ だから $H^1_{\mathfrak{m}}(B) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B/a_1B)$ は単射である。故に $H^1_{\mathfrak{m}}(L) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B/a_1B)$ は単射である。完全列 $0 = H^0_{\mathfrak{m}}(B/a_1B) \to H^0_{\mathfrak{m}}(C/a_1C) \to H^1_{\mathfrak{m}}(L) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B/a_1B)$ より, $H^0_{\mathfrak{m}}(C/a_1C) = 0$ を得る。従って C/a_1C は1次元Cohen-Macaulayで, C は2次元Cohen-Macaulayである。故に, (3.5)より $\operatorname{depth} K_A = 3$。 Q.E.D.

(3.7) Lemma. $\operatorname{depth} A = d-1$ とすると, 任意の $c_2, \dots, c_{d-1} \in A$ に対し $a_1, a_2 - c_2a_1, \dots, a_{d-1} - c_{d-1}a_1$ は(イ),(ロ),(ハ)を満たす。

Proof. $b_1 = a_1$, $b_i = a_i - c_i a_1$ $(i = 2, \dots, d-1)$ とおく。$(b_1, \dots, b_{d-1}) = \mathfrak{q}$ であり $\operatorname{ht}(b_1, \dots, b_{d-1}) = d-1$ となる。従って, (イ)は明らかで, (S_{d-2}) だから(ロ)もよい。極大でない素ideal $\mathfrak{P}$ をとる。$\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{a}$ な

らば$A_\mathfrak{p}$はCohen-Macaulayだから $H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A_\mathfrak{p})=0$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ である。$\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{a}$ ならば $(b_1,\dots,b_{d-1})A_\mathfrak{p}=\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ であるから [9, (7.6) (1) ⇔ (2)] により $b_1,\dots,b_{d-1}$ は u. s. d-列 on $A_\mathfrak{p}$ である。従って $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}\cdot H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A_\mathfrak{p})=0$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ ([9, (3.4)])。故に $\ell(\mathfrak{q}H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A))<\infty$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$。$H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A)\cong(b_1^{t_1},\dots,b_{d-2}^{t_{d-2}}):b_{d-1}^{t_{d-1}}/(b_1^{t_1},\dots,b_{d-2}^{t_{d-2}})\subset A/(b_1^{t_1},\dots,b_{d-2}^{t_{d-2}})$ で depth $A=d-1$ であるから，$\mathfrak{q}\cdot H_1(b_1^{t_1},\dots,b_{d-1}^{t_{d-1}};A)\subseteq H^0_\mathfrak{m}(A/(b_1^{t_1},\dots,b_{d-2}^{t_{d-2}}))=0$ for $\forall t_1,\dots,t_{d-1}>0$ となる。従って [9, (3.4)] により，$b_1,\dots,b_{d-1}$ は u. s. d-列 on A である。　Q.E.D.

$R=\mathcal{R}(A,\mathfrak{q}^{d-2})=\bigoplus_{i\geq 0}(\mathfrak{q}^{d-2})^i$，$N=\mathfrak{m}R+R_+$ とおく。

(3.8) Theorem. depth $A=d-1$ かつ depth $K_A=3$ ならば，$i\neq d+1$ に対し $H^i_N(R)$は有限生成である。

Proof. $A/\mathfrak{m}$の代数的閉包を$\bar{k}$とする。[10, 0(10.3.1)]により A上平坦な局所環$\bar{A}$で$\bar{A}/\mathfrak{m}\bar{A}\cong\bar{k}$となるものが存在する。[12, (3·3)]により$\bar{A}$はdualizing complexを持ち $A\to\bar{A}$ はGorenstein射である。従って，$\bar{A}$も(ア),(カ),(サ),(タ)を満たし，depth $\bar{A}=d-1$, depth $K_{\bar{A}}=3$ である。($K_{\bar{A}}\cong K_A\otimes_A\bar{A}$. cf. [2, 4.1]) また，$\bar{A}$における$\mathfrak{a}$として$\mathfrak{a}\bar{A}$がとれる。$a_1,\dots,a_{d-1}$は$\bar{A}$において(イ),(ロ),(ハ)を満たす。$\bar{R}=\mathcal{R}(\bar{A},(\mathfrak{q}\bar{A})^{d-2})\cong R\otimes_A\bar{A}$は$R$上忠実平坦であるから，$\bar{R}$に対し主張

を示せばよい。従って，$A/\mathfrak{m}$ は代数閉体としてよい。R は dualizing complex を持ち $\dim R/\mathfrak{p} = d+1$ for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Min}(R)$ であるから，任意の斉次素 ideal $P \neq N$ に対し R_P が Cohen-Macaulay であることを示せばよい。$P \cap A = \mathfrak{p}$ とおく。$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ のとき。$\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$ ならば $R_\mathfrak{p} \cong \mathcal{R}(A_\mathfrak{p}, \mathfrak{q}^{d-2}A_\mathfrak{p})$ で，これは $a_1, \dots, a_{d-1}$ のとり方より Cohen-Macaulay である。(cf. (2.2)) $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{q}$ ならば $R_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}[T]$ で $A_\mathfrak{p}$ が Cohen-Macaulay だから，よい。$\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ とする。$P \not\supseteq R_+$ である。$(\mathfrak{q}^{d-2})^{d-2} = (a_1^{d-2}, \dots, a_{d-1}^{d-2})(\mathfrak{q}^{d-2})^{d-3}$ だから $\sqrt{R_+} = \sqrt{(a_1^{d-2}T, \dots, a_{d-1}^{d-2}T)}$ であり，$P \not\ni a_i^{d-2}T$ for some i となる。$P \not\ni a_1^{d-2}T$ としてよい。$t = a_1^{d-2}T$, $\tilde{R} = R[1/t]$, $B = \tilde{R}_0$, $\tilde{P} = P\tilde{R}$, $Q = \tilde{P} \cap B$ とおく。$Q \supseteq \mathfrak{m}B$ である。$\tilde{R} = B[t, 1/t]$ で，t は B 上代数的独立である。よって，B_Q Cohen-Macaulay $\Leftrightarrow$ $\tilde{R}_{\tilde{P}}$ Cohen-Macaulay，であるから，B の極大 ideal $M \supseteq \mathfrak{m}B$ に対し B_M が Cohen-Macaulay であることを言えばよい。$B = \tilde{R}_0 = A[x/a_1^{d-2} \mid x \in \mathfrak{q}^{d-2}] = A[x/a_1 \mid x \in \mathfrak{q}] = A[a_2/a_1, \dots, a_{d-1}/a_1] \subseteq A[1/a_1]$。$A/\mathfrak{m}$ が代数閉体であるから $M = \mathfrak{m}B + (a_2/a_1 - c_2, \dots, a_{d-1}/a_1 - c_{d-1})B$ for some $c_2, \dots, c_{d-1} \in A$ となる。$b_1 = a_1$, $b_i = a_i - c_i a_1$ $(i = 2, \dots, d-1)$ とおけば，(3.7) より $b_1, \dots, b_{d-1}$ は (イ),(ロ),(ハ) を満たす。$f \in B$, $b_{i+1}/b_1 \cdot f = b_1 f_1 + b_2/b_1 \cdot f_2 + \dots + b_i/b_1 \cdot f_i$ $(f_1, \dots, f_i \in B)$ とする。$f = x/b_1^n$, $f_i = x_i/b_1^n$ ($x, x_i \in \mathfrak{q}^n$, n は十分大) と書ける。b_1 は regular だから $b_{i+1}x = b_1^2 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_i x_i$ in A。故に $x_1 \in ((b_2, \dots, b_{i+1}) : b_1^2) \cap \mathfrak{q}^n = (b_2, \dots, b_{i+1})\mathfrak{q}^{n-1}$ ([9, (1.2) and (1.3)]) となり，$x_1 = b_2 y_2 + \dots + b_{i+1} y_{i+1}$, $y_j \in \mathfrak{q}^{n-1}$ と書ける。故に $b_{i+1}(x - b_1^2 y_{i+1}) = b_2(x_2 +$

$b_1^2 y_2) + \cdots + b_i(x_i + b_1^2 y_i)$ で $x - b_1^2 y_{i+1} \in ((b_2, \dots, b_i) : b_{i+1}) \cap \mathfrak{q}^n = (b_2, \dots, b_i)\mathfrak{q}^{n-1}$ ([9, (1.3)]) となり, $x = b_1^2 y_{i+1} + b_2 z_2 + \cdots + b_i z_i$, $z_j \in \mathfrak{q}^{n-1}$ と書ける。従って $f = x/b_1^n = b_1 \cdot y_{i+1}/b_1^{n-1} + b_2/b_1 \cdot z_2/b_1^{n-1} + \cdots + b_i/b_1 \cdot z_i/b_1^{n-1}$ となり, $b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1$ は B-正則列である。次に $B/(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B \cong A/(b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ を示そう。$A \to B/(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B$ が全射であることは明らかだから, $(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B \cap A = (b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ を示せばよい。$x \in U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ をとる。(3.4)(1) より $b_1 x = b_2 x_2 + \cdots + b_{d-1} x_{d-1}$ と書ける。よって $x = b_2/b_1 \cdot x_2 + \cdots + b_{d-1}/b_1 \cdot x_{d-1}$ で $(b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1}) \subseteq (b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B$ が判る。$f \in (b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B \cap A$ をとる。$f = b_1 f_1 + b_2/b_1 \cdot f_2 + \cdots + b_{d-1}/b_1 \cdot f_{d-1}$, $f_i = x_i/b_1^n$ ($x_i \in \mathfrak{q}^n$, n は十分大) と書ける。b_1 は regular だから $b_1^{n+1} f = b_1^2 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_{d-1} x_{d-1}$ in A。$\mathfrak{q}^n = (b_1^n) + (b_2, \dots, b_{d-1})\mathfrak{q}^{n-1}$ だから $x_1 = b_1^n y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_{d-1} y_{d-1}$ ($y_2, \dots, y_{d-1} \in \mathfrak{q}^{n-1}$) と書ける。故に $b_1^{n+1} f = b_1^{n+2} y_1 + b_2(x_2 + b_1^2 y_2) + \cdots + b_{d-1}(x_{d-1} + b_1^2 y_{d-1})$ で $f - b_1 y_1 \in (b_2, \dots, b_{d-1}) : b_1^{n+1} = (b_2, \dots, b_{d-1}) : b_1 = U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ ([9, (1.2)], (3.4)(1)) となり, $(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B \cap A \subseteq (b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ が判る。(3.5) より $A/U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ は Cohen-Macaulay であり, $A/(b_1) + U_A(b_2, \dots, b_{d-1})$ もそうである。従って $B/(b_1, b_2/b_1, \dots, b_{d-1}/b_1)B$ が Cohen-Macaulay であり, B_M もそうである。　Q.E.D.

(3.9) Remark.　上の Proof 中の議論は, [8] にあるものと全く同様である。

(3.10) Theorem.　Aの dualizing complexが存在するとする。Aが (S_{d-2}) で，depth $A \geqq d-1$，depth $K_A \geqq 3$ ならば，Aは Gorenstein環の準同型像である。

Proof.　$d \geqq 5$, depth $A = d-1$ としてよい。このとき，depth $K_A \geqq 3$ だからAは FLC でない (cf. [1, Lemma 1])。従って，Aは(ア)，(カ)，(サ)，(タ)を満たす。(3.3)の直後でとった $a_1, \ldots, a_{d-1}$，及び(3.8)の直前での R，N を考える。(3.8)により R_N は dualizing complex を持つ FLC な局所環である。従って(1.1)により，R_N は Gorenstein環の準同型像である。Aは R_N の準同型像であるから，主張を得る。　　Q.E.D.

(3.11) Remark.　(1)　$d \geqq 6$ で，Aが (S_{d-2}) で，Aの dualizing complexが存在するとする。このとき，Aが quasi-Gorenstein (i.e. $K_A \cong A$) ならば，Aは Gorensteinである。

(2)　$d = 5$ で，Aが (S_3) で，Aの dualizing complex が存在するとする。このとき，Aが quasi-Gorensteinならば，Aは FLC で，従って Gorenstein環の準同型像である。なお，A自身が Gorensteinであるとは限らない。

Proof.　(1)　$\hat{A}$ が Cohen-Macaulay であることを言えばよい。(従

って，dualizing complexの存在の代わりにformal fibreが(S_{d-2})を仮定すればよい。) $A=\hat{A}$，A non-Cohen-Macaulayとする。(3.1)のProofより $\dim \mathrm{Hom}_A(H^{d-1}_{\mathfrak{m}}(A), E(A/\mathfrak{m})) \leqq 1$ だから，$\operatorname{depth} K_A \leqq 3$。(cf. [1, Lemma1])。一方，$K_A \cong A$ だから $\operatorname{depth} K_A \geqq d-2 \geqq 4$。矛盾。

(2) FLCでないとする。今の場合，FLC $\Leftrightarrow$ $A_{\mathfrak{p}}$ Cohen-Macaulay for $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)\setminus\{\mathfrak{m}\}$で，Aが$(S_3)$だから，$\dim A_{\mathfrak{p}}=4$，$\operatorname{depth} A_{\mathfrak{p}}=3$となる素ideal $\mathfrak{p}$が存在する。$A_{\mathfrak{p}}$は(S_3)だからFLCで$\operatorname{depth} K_A=2$となる([1, Lemma1])。ところが$K_{A_{\mathfrak{p}}} \cong A_{\mathfrak{p}}$だから，矛盾。故にFLCである。(ここまでは，(1)のProofの括弧内と同様でよい。) 従って(1.1)によりAはGorenstein環の準同型像である。[7, 1.1]より5次元Buchsbaum完備局所環$(B,\mathfrak{n})$で$H^3_{\mathfrak{n}}(B)\neq 0$, $H^i_{\mathfrak{n}}(B)=0$ for $i\neq 3,5$となるものがある。$A=B \ltimes K_B$ (idealization)とすれば，Aは仮定を満たす(cf. [2, 11])が，Gorensteinでない。　Q.E.D.

(3.12) Remark. $n \geqq 5$, $n-2 \leqq s < n$, $2 \leqq t \leqq 3$ なる任意の整数n, s, tに対し，次を満たす局所環Bが存在する： $\dim B=n$, $\operatorname{depth} B=s$, (S_{n-2}), non-FLC, dualizing complexが存在，$\operatorname{depth} K_B=t$.

なお，$(s,t)\neq(n-1,3)$のときには，(3.8)の結果は成立しないようである。

文　献

[1] Y. Aoyama : *On the depth and the projective dimension of the canonical module*, Japan. J. Math., 6 (1980), 61 ~ 66.

[2] Y. Aoyama : *Some basic results on canonical modules*, J. Math. Kyoto Univ., 23 (1983), 85 ~ 94.

[3] Y. Aoyama and S. Goto : *On the endomorphism ring of the canonical module*, Preprint.

[4] G. Faltings : *Zur Existenz dualisierender Komplexe*, Math. Z., 162 (1978), 75 ~ 86.

[5] D. Ferrand and M. Raynaud : *Fibres formelles d'un anneau local noethérien*, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. (4), 3 (1970), 295 ~ 311.

[6] R. Fossum, H.-B. Foxby, P. Griffith and I. Reiten : *Minimal injective resolutions with applications to dualizing modules and Gorenstein modules*, Publ. Math. I.H.E.S., 45 (1975), 193 ~ 213.

[7] S. Goto : *On Buchsbaum rings*, J. Algebra, 67 (1980), 272 ~ 279.

[8] S. Goto : *Blowing-up of Buchsbaum rings*, Commutative Algebra : Durham 1981, London Math. Soc. Lect. Note Ser. 72, Camb. Univ. Press, 140 ~ 162.

[9] S. Goto and K. Yamagishi : *The theory of unconditioned strong d-sequences with applications to modules having finite local cohomology*, Preprint.

[10] A. Grothendieck : *Éléments de géométrie algèbrique*, III (*première partie*), Publ. Math. I.H.E.S., 11 (1961).

[11] J.E. Hall : *Fundamental dualizing complexes for commutative noetherian rings*, Quart. J. Math. Oxford (2), 30 (1979), 21 ~ 32.

[12] J.E. Hall and R.Y. Sharp : *Dualizing complexes and flat homomorphisms of commutative noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 84 (1978), 37 ~ 45.

[13] R. Hartshorne : *Residues and duality*, Lect. Notes Math. 20, Springer Verlag, 1966.

[14] J. Herzog, E. Kunz et al. : *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lect. Notes Math. 238, Springer Verlag, 1971.

[15] T. Ogoma : *Existence of dualizing complexes*, J. Math. Kyoto Univ., 24 (1984), 27 ~ 48.

[16] R.Y. Sharp : *Dualizing complexes for commutative noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 78 (1975), 369 ~ 386.

[17] R.Y. Sharp : *A commutative noetherian ring which possesses a dualizing complex is acceptable*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 82 (1977), 197 ~ 213.

[18] R.Y. Sharp : *Necessary conditions for the existence of dualizing complexes in commutative algebra*, Sém. Algèbre P. Dubreil 1977/8, Lect. Notes Math. 740, 213 ~ 229, Springer Verlag, 1979.

[19] N. Suzuki : *Canonical duality for Buchsbaum modules*, Bull. Dept. Gen. Educ. Shizuoka Coll. Pharmacy, 13 (1984), 47 ~ 60.

'84.9 下旬

'84.10 下旬. 修正

追補. その後, $d=3$ のときに canonical module の存在について判明したことがあるので, それを記しておきたい。

(A.1) Lemma. A の canonical module が存在するとする。$\mathfrak{a}$ が高さ $d-1$ $(d \geq 1)$ の ideal であれば, $A/\mathfrak{a}$ は Gorenstein 環の準同型像である。

Proof. P を $\hat{A}$ の素 ideal $\neq \mathfrak{m}\hat{A}$ で $\mathfrak{a}\hat{A}$ を含むものとし, $\mathfrak{p}=P\cap A$ とおく。$\mathfrak{p}\neq\mathfrak{m}, \supseteq \mathfrak{a}$ で $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}=d-1$ であるから $\mathfrak{p}\in \mathrm{Supp}(K_A)$ である。(cf. [2, (1.9)]) よって (1.8) の Proof 中の $\dim A/\mathfrak{a}=1$ の場合の議論と同様にして主張を得る。 Q.E.D.

Faltings による定理が必要なので, それを述べておく。但し, ここで必要なのは, I が巾零の場合だけである。

(A.2) Lemma ([4, Satz 2]). R を環, I をその ideal とし, R が I-進位相で完備だとする。このとき, R/I の dualizing complex が存在すれば, R の dualizing complex も存在する。

(A.3) Proposition. $d=3$ のとき, A の canonical module が存在し, A が equidimensional であるならば, A は Gorenstein 環の準同

型像である。

Proof. (2.3)よりAの*dualizing complex*が存在することを言えばよい。そのためには(A.2)により$A/\sqrt{(0)}$の*dualizing complex*が存在することを示せばよい。仮定により$\sqrt{(0)}=\sqrt{U}$であるから，A/Uの*dualizing complex*が存在することを言えばよい。$\dim A/U=d$だからA/Uの*canonical module*が存在する。($K_{A/U}\cong K_A$である. cf. [2, (1.8)]) 従って$U=0$としてよい。Aが(S_2)なら(1.3)によりよい。(S_2)でないとしよう。$H=\mathrm{End}_A(K_A)$とおく。[2, 3.2]により，HはAを含む有限生成A-加群なる3次元半局所環で，すべての極大素*ideal*鎖は長さ3で，K_Aは(H-加群とみて)Hの*canonical module* (i.e. $\forall \mathfrak{P}\in \mathrm{Spec}(H)$, $(K_A)_{\mathfrak{P}}$は$H_{\mathfrak{P}}$の*canonical module*)で，Hは(S_2)である。従って(1.1)のProof of (c)⇒(b)と同様の方法で，Hの*dualizing complex* $I^{\cdot}$で$I^i=\bigoplus_{\mathrm{ht}\mathfrak{P}=i}E_H(H/\mathfrak{P})$なるものが存在することが判る。$\mathfrak{c}=\{a\in A \mid aH\subseteq A\}$とおく。Aは$(S_2)$でないから[2, Proof of 4.2]により$\mathrm{ht}\,\mathfrak{c}=2$である。(A.1)より$A/\mathfrak{c}$は*fundamental dualizing complex* $J^{\cdot}$ ($J^i=0$ for $i\neq 2,3$)を持つ。$\mathrm{Hom}_H(H/\mathfrak{c}, I^{\cdot})$と$\mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{c}}(H/\mathfrak{c}, J^{\cdot})$は共に$H/\mathfrak{c}$の*fundamental dualizing complex*である。(2.3)のProof中の議論と同様にして，$\mathrm{Hom}_H(H/\mathfrak{c}, I^{\cdot})\cong \mathrm{Hom}_{A/\mathfrak{c}}(H/\mathfrak{c}, J^{\cdot})$ *as complexes*が判る。$A\cong H\times_{H/\mathfrak{c}}A/\mathfrak{c}$である(cf. [15, 3.2])から，(1.6)によりAの*dualizing complex*が存在する。

Q.E.D.

(A.4) Corollary. $d=3$ のとき，次は同値である：

(a) A の canonical module が存在する。

(b) $A/\mathfrak{U}$ は Gorenstein 環の準同型像である。 (cf. [2,(1.12)])

(A.5) Proposition. $d=3$ のとき，次は同値である：

(a) A は Gorenstein 環の準同型像である。

(b) A の dualizing complex が存在する。

(c) 任意の ideal $\mathfrak{a}\ (\neq A)$ に対し，$A/\mathfrak{a}$ の canonical module が存在する。

Proof. (c) ⇒ (b) を示せばよい。(cf. (2.3)) $A \supset (0) = \mathfrak{U} \cap I$ (準素分解より) とする。(A.4) により $A/\mathfrak{U}$ の dualizing complex が存在する。$\dim A/I \leq 2$ で，A/I の任意の剰余類環は canonical module を持つから，A/I の dualizing complex が存在する。(cf. (1.7)(d) ⇒ (b), (1.5)) $A \cong A/\mathfrak{U} \underset{A/\mathfrak{U}+I}{\times} A/I$ だから (1.6) により主張を得る。 Q.E.D.

(A.6) Remark. (1) [15, Example 2] により，4次元 (S_2) 局所整域で，任意の剰余類環は canonical module を持つが，dualizing complex は存在しない，ものがある。

(2) 2次元局所整域で，formal fibre はすべて Gorenstein であるが，canonical module は存在しない，ものがある。(cf. M. Nagata

Local Rings Example 2) 従ってまた，3次元局所環で，canonical module が存在し，formal fibre も Gorenstein であるが，dualizing complex は存在しない，ものがある。

'84.11.12. 追補

English Summary

A ring will mean a commutative noetherian ring with unit. We consider a conjecture of Sharp on the existence of dualizing complexes. For the definition of dualizing complexes, we refer the reader to [16,(2.4)] and [18]. A ring of finite dimension which is a homomorphic image of a Gorenstein ring has a dualizing complex and a Cohen-Macaulay ring with dualizing complex is a homomorphic image of a Gorenstein ring. (cf. [18])
Sharp conjectured the following

(SC)([18,(4.4)]). A ring with dualizing complex is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

In this note we treat the local ring case. In the remainder A denotes a d-dimensional local ring with maximal ideal m and $\hat{}$ denotes the completion. For the notion of the canonical module, we refer the reader to [14] and [2]. We have the implications:
A is a homomorphic image of a Gorenstein ring $\Rightarrow$ A has a

dualizing complex $\Rightarrow$ A has the canonical module .

Our main results are the following.

THEOREM. Assume that $H^i_m(A)$ is of finite length for $i \neq d$. Then the following are equivalent:

(a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

(b) A has a dualizing complex.

(c) A has the canonical module.

PROPOSITION. Let $d = 1$. Then the following are equivalent:

(a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

(b) A has a dualizing complex.

(c) A has the canonical module.

(d) The natural map $A \to \hat{A}$ is a Gorenstein homomorphism.

PROPOSITION. Let $d = 2$. Then the following are equivalent:

(a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

(b) A has a dualizing complex.

(c) A has the canonical module and the natural map $A \to \hat{A}$ is a Gorenstein homomorphism.

(d) Every factor ring of A has the canonical module.

THEOREM. If $d \leq 4$ and A has a dualizing complex, then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

THEOREM. If A has a dualizing complex, A is (S_{d-2}), depth A $\geq d-1$ and depth $K \geq 3$ (K is the canonical module of A), then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

PROPOSITION. If $d \leq 3$, A has the canonical module and A is equidimensional, then A is a homomorphic image of a Gorenstein ring

COROLLARY. Let $d \leq 3$. Then A has the canonical module if and only if $A/U_A(0)$ is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

PROPOSITION. Let $d = 3$. Then the following are equivalent:

(a) A is a homomorphic image of a Gorenstein ring.

(b) A has a dualizing complex.

(c) Every factor ring of A has the canonical module.

REMARKS. (1) There exists a one-dimensional local domain which does not have the canonical module. ([5])

(2) There exists a two-dimensional local ring which has the canonical module but does not have a dualizing complex. (cf.(1))

(3) There exists a two-dimensional local domain B such that every formal fibre of B is Gorenstein but B does not have the canonical module. (Nagata, Local Rings, Example 2)

(4) There exists a three-dimensional local ring B such that B has the canonical module and every formal fibre of B is Gorenstein but B does not have a dualizing complex. (cf.(3))

(5) There exists a four-dimensional local domain B such that every factor ring of B has the canonical module but B does not have a dualizing complex. ([15, Example 2])