数理解析研究所講究録
第543巻 1985年 53-57

Sharpの予想の低次元の場合について

高知大理 小駒哲司 (Tetsushi Ogoma)

Gorenstein環の準同型像となる環は、dualizing complexをもつことはよく知られている。一方、Reitenはcanonical moduleをもつCohen Macaulay環は、Gorenstein環の準同型像として表わされることを示した。[4] canonical moduleは、dualizing complexの最低次のnon-zero homology moduleとして得られるから、これはCohen Macaulay ringの場合、最初の命題の逆が成立することを示している。そこでSharpは次を予想した。[5, (4.4) conjecture]

予想 (Sharp) 環Aがfundamental dualizing complexをもてば、AはGorenstein環の準同型像として表わされるであろう。

ここでは、低次元の場合にこの予想が正しいという証明の概略を述べる。詳しいことは、[3]に書くので参照して下さい。

環Aがfundamental dualizing complex $I^{\cdot}$をもつとする。

すると codimension function といわれる $d: \mathrm{Spec}\, A \to \mathbb{Z}$ が（$d(\mathfrak{p})=r \Leftrightarrow A/\mathfrak{p}$ の injective hull $E(A/\mathfrak{p})$ が I^r の direct summand）によって定義される。今この d によって A の弱 Krull 次元を

$$n = \sup\{d(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A\} - \inf\{d(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A\}$$

と定義しよう。もし、d について混乱のない場合には、単に $\mathrm{w.K.dim}\, A = n$ と書くことにする。

注 意　　もし A が local ring 又はただ一つの minimal prime をもつ場合には、弱 Krull 次元は、Krull 次元と一致するが、一般には異なる。[3, Example 3.1]

次の命題は、Sharp の予想を一般に unmixed な場合に帰着できることを示している。

定 理 1　　環 A が fundamental dualizing complex $I^{\cdot}$ をもつとする。このとき、A は次の性質をもつ環 C の準同型像として表わせる。

(1) C は fundamental dualizing complex $J^{\cdot}$ をもつ。

(2) $\mathrm{w.K.dim}\, A = \mathrm{w.K.dim}\, C$

(3) $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, C$ が $\mathrm{Ass}_C C$ に属する条件は $d_C(\mathfrak{p})=0$

但し d_C は $J^{\cdot}$ で定義される codimension function

この定理の証明の key lemma となるのは次である。

補題 2.　環の全射準同型 $\varphi_1 : A_1 \longrightarrow A_0$ と $\varphi_2 : A_2 \longrightarrow A_0$ が与えられたとする。今変数 X 及び φ_2 と $\varphi_3(X)=0$ で定義される準同型 $\varphi_3 : A_2[X] \longrightarrow A_0$ でもって、φ_1 と φ_3 の fibre product $B = A_1 \times_{A_0} A_2[X]$ を考える。このとき、

$$\mathrm{Ass}_B B = \{p_1^{-1}(\mathfrak{q}) \mid \mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_{A_1} \mathrm{Ker}\,\varphi_1\} \cup \{p_2^{-1}(\mathfrak{p} A_2[X]) \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A_2} A_2\}$$

となる。但し、$p_1 : B \longrightarrow A_1$ と $p_2 : B \longrightarrow A_2[X]$ は射影。

定理1の証明の方針は、Aの 0 ideal を $0 = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$（ここで、$\mathrm{Ass}_A A = \mathrm{Ass}_A A/\mathfrak{a}_1 \cup \mathrm{Ass}_A A/\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A A/\mathfrak{a}_1 \Leftrightarrow d_A(\mathfrak{p}) = 0$）と表わす。すると $A = A_1 \times_{A_0} A_2$（$A_i = A/\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$）となるが、この$A$の分解について補題2の$B$を考えれば、$A$は$B$の準同型像となるが、$B$の associated prime の mixed の状態はAよりよくなっていることがわかり、帰納法でCを得るわけである。この詳しい証明及び補題2の証明には fibre product の考察が必要なので、[2] 及び [3] をみて下さい。

定理 3　環Aが fundamental dualizing complex を持ち、かつ $\mathrm{w.K.dim}\, A \leq 2$ であれば、A は Gorenstein ring の準同型像となる。

証明）定理1より、$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ が $\mathrm{Ass}_A A$ に属するのは $d_A(\mathfrak{p}) = 0$ となるもののみとしてよい。この時 $\dim A \leq 1$

であれば、AはCohen Macaulay ringとなるから、Reitenの結果からAはGorenstein ringの準同型像となる。

$\dim A = 2$の場合。canonical module $K = H^0(I^{\cdot})$のendomorphism ring $A' = \mathrm{Hom}_A(K, K)$を考えれば、$A'$は、finite A-algebraで$(S_2)$であり[1]、conductor ideal $\mathfrak{c} = A' : A$はnon-zerodivisorを含むことがわかる。よって、regular element cを$\mathfrak{c}$から取り、$\mathfrak{a} = A'c$とおけば$\mathfrak{a}$はAのidealであって、A-moduleとして(S_2)である。

さて、$\mathfrak{a}$は(S_2)でAは(S_1)であるから、$D = A/\mathfrak{a}$はKrull次元1で(S_1)であることがわかる。($D \neq 0$として)そこで、$D[X]$-moduleの完全列

$$0 \longrightarrow XD[X] \longrightarrow D[X] \longrightarrow D \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

の右側の準同型でもって、fibre product $B = A \times_D D[X]$を考えよう。するとBはfundamental dualizing complexを持ち、$\mathfrak{z} \in \mathrm{Spec}\, B$について$(\mathfrak{z} \in \mathrm{Ass}_B B \Leftrightarrow d_B(\mathfrak{z}) = 0)$とでき、そのとき$\dim D[X]_{\mathfrak{z}} = d_B(\mathfrak{z})$(もし$D[X]_{\mathfrak{z}} \neq 0$なら)となることがfibre productの考察からわかる。

他方次の完全列を得る。

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \oplus XD[X] \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

さて、Bの極大ideal $\mathfrak{m}$を取ろう。もし$\mathrm{ht}\,\mathfrak{m} \leq 1$であれ

ば、Bは embedded prime をもたぬから、$B_{\mathfrak{m}}$ は Cohen Macaulay である。

ht $\mathfrak{m}=2$ の場合、先の完全列から次の上段の完全列を得、

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1_{\mathfrak{m}}(B_{\mathfrak{m}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\mathfrak{m}}(D_{\mathfrak{m}}) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\wr"] & H^2_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}} \oplus XD[X]_{\mathfrak{m}}) \arrow[d] \\
& H^1_{\mathfrak{m}}(D[X]_{\mathfrak{m}}) \arrow[r] & H^1_{\mathfrak{m}}(D_{\mathfrak{m}}) \arrow[r] & H^2_{\mathfrak{m}}(XD[X]_{\mathfrak{m}})
\end{tikzcd}$$

完全列 (**) から下段の完全列を得る。もし、$D[X]_{\mathfrak{m}} \neq 0$ であれば、$\dim D[X]_{\mathfrak{m}} = d_B(\mathfrak{m}) = 2$ であり、また D は Cohen Macaulay であるから $H^1_{\mathfrak{m}}(D[X]_{\mathfrak{m}}) = 0$ を得る。よって、φ は単射でなければならず、すなわち $H^1_{\mathfrak{m}}(B_{\mathfrak{m}}) = 0$ を得る。

故に B は Cohen Macaulay ring であり、canonical module をもつから、Reiten の結果により Gorenstein ring の準同型像である。射影 $B \to A$ は全射だから定理を得る。

REFERENCES

[1] Y. Aoyama, Some basic results on canonical modules, J. Math. Kyoto Univ. 23 (1983) 85-94.

[2] T. Ogoma , Fibre products of Noetherian Rings and their applications, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.

[3] T. Ogoma , Associated primes of fibre product rings and a conjecture of Sharp in lower dimensional cases, to appear in Mem. Fac. Sci. Kochi Univ.(Math.)

[4] I. Reiten, The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972) 417-420

[5] R. Y. Sharp, Necessary condition for the existence of dualizing complex in commutative algebra, Seminarie d'Algebra Paul Dubreil, Lect. Notes Math. 740 Springer-Verlag 1979.