数理解析研究所講究録
第543巻 1985年 120-130

次数付環の還元理論と擬平担次数付環

広大理 大石 彰 (Akira Ooishi)

0. 序. 特異点の理論や局所環のイデアルの研究において，与えられた局所環があるイデアルに沿って法平担 (normally flat) であるということが重要な役割を果たすことはよく知られている。これより少し弱い条件である法擬平担 (normally pseudo-flat) という概念が広中により導入され，Herrmann ，Orbanz 等により研究されている。

正確な定義を述べよう。(R, $\mathfrak{m}$, k) がネーター局所環で $\mathfrak{a}$ が R のイデアルのとき，$\mathfrak{a}$ による次数付環 $G_{\mathfrak{a}}(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ が $R/\mathfrak{a}$-加群として平担なとき R が $\mathfrak{a}$ に沿って法平担であるといい，$G_{\mathfrak{a}}(R)$ のファイバーの次元 $\dim G_{\mathfrak{a}}(R) \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$ が任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ に対して一定であるとき R が $\mathfrak{a}$ に沿って法擬平担というのである。法擬平担性は Northcott と Rees に

より導入されたイデアル$\mathfrak{a}$の<u>analytic spread</u> $l(\mathfrak{a})$ という不変量を用いると，$l(\mathfrak{a}) = ht(\mathfrak{a})$ という条件と同値である。法擬平坦性の重複度を使った特徴付けが Herrmann と Orbanz により得られている。例えば，$\mathfrak{p}$ が R の素イデアルで $R/\mathfrak{p}$ が正則局所環ならば，$\mathfrak{p}$ に沿った法擬平坦性は $\mathfrak{p}$ に沿った等重複度性 $e(R_{\mathfrak{p}}) = e(R)$ と同値である（但し，R は quasi-unmixed とする）。

イデアルに沿った法擬平坦性や Northcott と Rees によって創始されたイデアルの還元理論等において重要な役割を果たすのは，結局 $G_{\mathfrak{a}}(R)$ や $R_{\mathfrak{a}}(R) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{a}^n$ という次数付環である。そこで，一般の次数付環においてその“還元の理論”を展開することは有用なことと思われる。又そこにおいて擬平坦な次数付環という概念が自然に導入され，その詳しい性質を還元理論を使うことにより調べることができる。

1．擬平坦次数付環．　環は全てネーター環として，$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ を環 R 上の斉次次数付環（*homogeneous algebra*），即ち，$A_0 = R$ かつ $A = R[A_1]$ であるとする。

定義1．　A の各ファイバーの次元 $\dim A \otimes_R k(\mathfrak{p})$

($\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$) が一定であるとき，A が擬平坦 (pseudo-flat) であるという。

関数 $\mathfrak{p} \mapsto \dim A \otimes_R k(\mathfrak{p})$ は上半連続な関数であるから，($R, \mathfrak{m}$) が局所環であるとき A が擬平坦であることは条件 $\dim A \otimes_R R/\mathfrak{m} = \dim A \otimes_R k(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p}$ は R の任意の極小素イデアル，と同値である。$\ell(A) = \dim A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ とおき，$\ell(A)$ を A の analytic spread という。$ht(A_+) = \min\{\dim A \otimes_R k(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p}$ は R の極小素イデアル$\}$ に注意すれば，結局 A が擬平坦であることは条件 $\ell(A) = ht(A_+)$ と同値である。($\ell(A)$ については 大石[2]を参照。)
$\ell(A)$ を計算するためには，次の不等式 (Burch, Brodmann の不等式の一般化) が有用である。

命題 2. R が局所環のとき

$$\ell(A) \leqslant \dim(A) - \mathrm{depth}_R(A_n) \quad \text{for all} \quad n \gg 0,$$

ここで $\mathrm{depth}_R(A_n)$ は十分大な n に対して一定である。
従って，もし $\mathrm{depth}_R(A_n) = \dim(R)$ for all $n \gg 0$ で $\dim(A) = \dim(R) + ht(A_+)$ であれば A は擬平坦である。
(後者の条件は A が quasi-unmixed ならば満たされる。)

擬平担な次数付環の例を幾つか挙げよう。

例3．(Asymptotically flat algebras) Spec(R)が連結として，Aが<u>漸近的平担</u>，即ち，十分大なnに対してA_nが平担なR-加群とすると，Aの各ファイバーのHilbert多項式 $h(A\otimes_R k(\mathfrak{p}),n)$ が全て一定なので，Aは擬平担かつ各ファイバーの重複度 $e(A\otimes_R k(\mathfrak{p}))$ は一定である。この逆は一般には正しくない。例えば，Rが被約でないとして $A=S_R(R_{red})$ を考えればよい。又，たとえRがDVR(一次元正則局所環)の場合でもπを素元として $A=\dfrac{R[X,Y,Z]}{(\pi X^2,XY,XZ)}$ とおけば，Aは擬平担で $e(A\otimes_R k(\mathfrak{p}))$ は全て一定であるが，Aは漸近的平担でないことが分る。ただし次の場合には上の逆が成り立つ：

(a) Rが被約で $ht(A_+)=1$ のとき。

(b) Rが局所環で $A/\mathfrak{m}A$ が Cohen-Macaulay のとき。

例4．(Symmetric algebras) Rが被約でMが有限生成R-加群のとき，$S_R(M)$が擬平担であることとMが平担であることは同値である。$\mathfrak{a}$が局所環Rのd-sequenceで生成されたイデアルならば $S_R(\mathfrak{a})=R_{\mathfrak{a}}(R)$

なので $\mu(\mathfrak{a}) = \ell(\mathfrak{a})$。従って，$R$ が Cohen-Macaulay か $\mathfrak{a}$ が根基イデアルのとき，R が $\mathfrak{a}$ に沿って法擬平担ならば $\mathfrak{a}$ は完全交叉である。

例5．（Rees algebras）$\mathfrak{a}$ が等次元な局所環 R のイデアルのとき，$R_{\mathfrak{a}}(R)$ が擬平担であるためには，$\mathfrak{a}$ が巾零であるか $\ell(\mathfrak{a}) = ht(\mathfrak{a}) = 1$ であることが必要十分である。特に，$R_{\mathfrak{m}}(R)$ が擬平担になるのは $\dim(R) \leqslant 1$ の場合に限る。

例6．　A が斉次次数付整域とする。$\dim(A) \leqslant 2$ 又は $\dim(A) \leqslant 4$ で A が UFD ならば A は擬平担である。例えば，$\dim(A) = 4$，A が UFD ならば擬平担であることを見よう。R は局所環としてよい。$\dim(R) = 1$ ならば A は R-平担である。$\dim(R) = 2$ とすると各 A_n は R-反射的(Samuel)なので $\mathrm{depth}_R(A_n) = \dim(R) = 2$。従って命題2より A は擬平担。$\dim(R) = 3$ とすると命題2により $\ell(A) \leqslant 2$。$ht(A_+) = 2$ ならばよい。もし $ht(A_+) = 1$ ならば $A \otimes_R K \cong K[X]$（K は R の商体）となり，各 A_n は階数1の反射的加群で R が UFD なので $A_n \cong R$。従って $A \cong R[X]$ となる。$\dim(R)$

$=4$ なら $A=R$ で自明である。

$\dim(A)=3$ で A が正規又は $\dim(A)=5$ で A がUFDでも擬平担にならないものがある。例えば，前者としては $(R, \mathfrak{m})$ を2次元正則局所環として $A=R_{\mathfrak{m}}(R)$ を考えればよい。

2.　次数付環の還元.　擬平担な斉次次数付環のもっと詳しい性質を調べるためには次数付環の還元の理論が必要である。これは又，次数付環の他の問題を考える場合にも有効である。

定義7.　A の斉次次数付 R-部分代数 B は A が B-加群として有限生成，即ち A が B 上整であるとき A の還元(reduction)であるという。包含関係に関して極小な A の還元を A の<u>極小還元</u>(minimal reduction)という。

B が A の還元であるということはある n に対して $B_1A_n=A_{n+1}$ が成り立つことと同値である。従って $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$ が R のイデアルのとき，$R_{\mathfrak{b}}(R)$ が $R_{\mathfrak{a}}(R)$ の還元であるのはある n に対して $\mathfrak{b}\mathfrak{a}^n=\mathfrak{a}^{n+1}$ が成り立つとき，

即ち，$\mathfrak{b}$ が Northcott，Rees の意味で $\mathfrak{a}$ の還元になっていることと同値である。

還元の理論では次の定理が基本的である：

定理 8．（還元の基本定理）R は局所環とする。

(1) B が A の還元のとき，B に含まれる A の極小還元が存在する。

(2) R の剰余体が無限体とし，B を A の還元とするとき，次の条件は同値である：

(a) B は A の極小還元である。

(b) $B/\mathfrak{m}B$ は $A/\mathfrak{m}A$ に含まれる多項式環である。

(c) $\mathrm{emb}(B)=\ell(A)$，但し $\mathrm{emb}(B)=\mu(B_1)$（R-加群 B_1 の極小生成系の元の個数）。

これを用いると次の擬平担環の重要な特徴付けが得られる。

定理 9．（擬平担環の構造定理）R が被約な局所環で剰余体が無限体とする。このとき R 上の斉次次数付環 A が擬平担であるためには，A が R 上の多項式環の有限整拡大になっていることが必要十分である。

これを使って擬平担環の幾つかの性質を調べることができる。列挙しよう。

命題9.　Aが擬平担のとき，関数 $\mathfrak{p} \mapsto e(A \otimes_R k(\mathfrak{p}))$ は $\mathrm{Spec}(R)$ 上の上半連続な関数である。

命題10.　集合 $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid A_{\mathfrak{p}}$ は擬平担な $R_{\mathfrak{p}}$-代数$\}$ は $\mathrm{Spec}(R)$ の開集合である。

命題11.　Aが擬平担なとき，集合 $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid A \otimes_R k(\mathfrak{p})$ が多項式環$\}$ は $\mathrm{Spec}(R)$ の開集合である。

命題12.　Aが正規で擬平担な斉次次数付整域とするとき，

(1) 拡大 $R \subseteq A$ に対して Going-Down 定理が成り立つ。

(2) 各 A_n は反射的 R-加群である。

(3) イデアル類群の間の単射準同型 $Cl(R) \to Cl(A)$ が存在する。

3.　次数付環の還元指数.　Rが局所環でその剰余

体は無限体であるとする。R上の斉次次数付環Aに対して　$\delta(A)=\inf\{n \mid {}^{\exists}B$, BはAの極小還元で$B_1A_n=A_{n+1}\}$　と置き，$\delta(A)$をAの還元指数(reduction exponent)という。例えば，$\mathfrak{a}$がRのイデアルとすると$\delta(R(\mathfrak{a}))=\inf\{n \mid {}^{\exists}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$は$\mathfrak{a}$の極小還元で$\mathfrak{b}\mathfrak{a}^n=\mathfrak{a}^{n+1}\}$　となり，これはイデアル$\mathfrak{a}$の還元指数と呼ばれSallyなどによって研究されている重要な不変量である。一般に，$\mathfrak{m}$をRの極大イデアルとすると$\delta(A)=\delta(A/\mathfrak{m}A)$が成り立つ。従って，以下では$R$は無限体$k$とする。

$\delta(A)=0$となるのはAが多項式環であることと同値である。又，一般に$\delta(A)\leqq \mathrm{reg}(A)$という不等式が成り立つ。ここに，$\mathrm{reg}(A)$は(Castelnuovoの)正則性と呼ばれ$\mathrm{reg}(A)=\inf\{n \mid [H_P^i(A)]_j=0 \text{ if } i+j>n\}$ $(P=A_+)$で定義される不変量である(大石[1]参照)。一般には$\delta(A)=\mathrm{reg}(A)$は成立しないが，$A$がBuchsbaum環であれば等式$\delta(A)=\mathrm{reg}(A)$が成り立つ。最後に$\delta(A)$についての定理を一つ与えよう。$i(A)$を$A$の<u>initial degree</u>，即ち，$A=k[X_1,\cdots,X_v]/I$，$v=\mathrm{emb}(A)$と書くとき，$i(A)=\inf\{n \mid I_n\neq 0\}$とする。

定理13. (1) 一般に $\delta(A) \geqq i(A)-1$ が成り立つ。

(2) $\delta(A)=i(A)-1$ とすると $v=emb(A)$, $d=dim(A)$, $m=\delta(A)$ として不等式

$$e(A) \leqq \binom{v+m}{m} - d\binom{v+m-1}{m-1}$$

が成り立つ。更に，上で等号が成り立つためには A が Cohen-Macaulay 環であることが必要十分である。このとき A は Schenzel の意味で extremal な Cohen-Macaulay 環になる。

系14. $\delta(A)=1$ とする。

(1) 一般に $emb(A) \geqq e(A)+dim(A)-1$ が成り立つ。

(2) $emb(A)=e(A)+dim(A)-1$ が成り立つためには A が Cohen-Macaulay 環であることが必要十分である。

(3) A が Buchsbaum 環ならば等式 $emb(A)=e(A)+dim(A)-1+I(A)$ が成り立つ。

これにより $(R, \mathfrak{m})$ が Cohen-Macaulay 環で $emb(R)=e(R)+dim(R)-1$ ならば $G_{\mathfrak{m}}(R)$ も Cohen-Macaulay であるという Sally の結果の別証明が得られる。

系15.　Aが代数的閉体上の斉次次数付整域で$\delta(A)=1$ならばAはCohen-Macaulay環である。

参考文献

[1] 大石，　Castelnuovo's regularity of graded rings and modules，　Hiroshima Math. J. 12(1982)，627-644.

[2] 大石，　次数付環の漸近的性質，擬平担性と還元の理論，　第5回 可換環論シンポジウム（中津川）報告集，1983.

（1984年　9月）