数理解析研究所講究録
第 543 巻 1985 年 148-163



# 特異点の higher conductor module について *)

京大・数理研　泊　昌孝　( Masataka TOMARI )

複素数体$\mathbb{C}$上の2次元正規特異点$(V,p)$とその特異点解消$\psi:(\tilde{V},A)\longrightarrow(V,p)$を使って定まる$\mathcal{O}_{V,p}$-module $R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$を考えよう。このノートでは、$R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$の$m$-adic filtration（$m$は$\mathcal{O}_{V,p}$の極大イデアル）と特異点の numerical invariants との関係について論ずる。まず，一般次元にも通じる話として，1次元特異点について述べる。そして，2次元特異点独特の話をしたい。

筆者にとって，この研究の出発点は，命題(2.5)であった。2次元正規 Gorenstein 特異点について，特異点の幾何種数$p_g$と算術種数$p_a$にはある制限が存在する事は，以前より経験的に知られており，また，種数が小さい時には，いくつか命題が知られていた（用語については§2を見よ）。それを，$R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$の$m$-adic filtration を考えることにより，具体的な命題として明らかにすることができた。だが，この研究対象が，特異点論に決定的な命題を与えてくれるかどうかは，

*) このノートは，[11] Part I と密接な関係があります。

まだまだこれからの問題である。

2次元正規特異点についての基礎的な事柄についての詳細などは，[4]，[12]，[10]，[11] 等を参照して下さい。

## §1. 単項化定理，一次元特異点について

(1.1) $(V, p)$ を $n$ 次元被約特異点とする時，次の data を $(V, p)$ の partial resolution と呼びます： $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$，ただし $\psi : \tilde{V} \longrightarrow V$ は固有正則双有理写像で，$\tilde{V}$ は（局所）正規であり，そして解析集合 $|\psi^{-1}(p)|$ を $A$ と書くことにします。（一次元の時は，これは正規化であり，勿論本当の resolution です。）我々は，ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_V$ に対して，元 $f \in \mathcal{J}_p$ であって $\mathcal{J} \cdot R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = f \cdot R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ となるものが存在することを示します。その為の準備を以下このパラグラフで述べましょう。

$\psi$ の critical locus を $E$ と書く。すると，$\dim E \leqq n-1$ であるから，集合 $\{ q \in V \mid \dim|\psi^{-1}(q)| \geqq n-1 \}$ は離散的であり，以下 $\{p\}$ であると仮定する。$R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の support は $\{p\}$ に含まれる。$R^{n-1}\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ を higher conductor module と呼びます（$n \geqq 2$）。

さて，$A$ を $A = (\bigcup_{j=1}^{m} A_j) \cup A'$ ； $A_j$ は（大

域的）既約成分で codim 1 のもの，$\operatorname{cod} A' \geqq 2$，というふうに分解します。ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_V$ に対して 記号 $D(\mathcal{I}, \psi)$ を次のように定める。

$$D(\mathcal{I}, \psi) := \sum_{j=1}^{m} \left[ \inf_{f \in \mathcal{I}_p} v_{A_j}(\psi^* f) \right] \cdot A_j ,$$

ただし，$v_{A_j}$ は $\psi^* f$ が恒等的に消える $\tilde{V}$ の連結成分に属する $A_j$ に対しては $v_{A_j}(\psi^* f) = +\infty$ と定め，他の場合は，$A_j$ の generic point に於ける $\psi^* f$ の vanishing order であるとする。

各 $A_j$ に対して，元 $f_j \in \mathcal{I}_p$ であって，条件

$$v_{A_j}(\psi^* f) = \inf_{f \in \mathcal{I}_p} v_{A_j}(\psi^* f) \qquad (\ast\ast)_j$$

を満たすものをとります。その一次結合 $f_{\mathfrak{a}} = \sum_{j=1}^{m} a_j f_j$，$\mathfrak{a} = (a_j) \in \mathbb{C}^m$，が，generic な $\mathfrak{a}$ に対して，すべての $j$ について 条件$(\ast\ast)_j$ を満たすことは，容易に確かめることができます。上で導入した記号を使うと，$D(\mathcal{I}, \psi) = D((f_{\mathfrak{a}}), \psi)$ for generic $\mathfrak{a} \in \mathbb{C}^m$ ということです。

記号 $D(\mathcal{I}, \psi)$ に対して $\mathcal{O}_{\tilde{V}}$-ideal sheaf $\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}$ を，

$$\mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)} = \begin{cases} 0 ; & v_{A_j}(\psi^* f) = +\infty \ \forall f \in \mathcal{I}_p, \text{ となる } A_j \text{ が存在する } \tilde{V} \text{ の連結成分上}, \\ \mathcal{O}_{\tilde{V}}(-D(\mathcal{I},\psi)), & \text{上記以外の } \tilde{V} \text{ 上}. \end{cases}$$

と定めて，$\mathcal{O}_{D(\mathcal{I},\psi)} := \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{I}_{D(\mathcal{I},\psi)}$ と書くことにします。

<u>定理(1、2)(単項化定理)</u>　$(V,p)$ を $n$ 次元被約特異点，$\psi:(\tilde V,A)\longrightarrow(V,p)$ を partial resolution，$I\subset\mathcal{O}_V$ を ideal sheaf，そして 元 $f\in I_p$ が $D(I,\psi)=D((f),\psi)$ を満たすものとする。すると，次の関係が成立する。

(1)　$I\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}=f\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$

(2)　$R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/I\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\cong R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{D(I,\psi)})\cong R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}/\psi^{-1}I)$,

ただし，$\psi^{-1}I$ は　$\psi^*I\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}_{\tilde V}\longrightarrow\mathcal{O}_{\tilde V}$ の image である。

<u>証明</u>　(1)　次の可換図式を見よ。

$$\begin{tikzcd}
R^{n-1}\psi_*((\psi^*f)) \arrow[r] \arrow[dr, "a"'] & R^{n-1}\psi_*(I_{D(I,\psi)}) \arrow[r] \arrow[d, "b"] & R^{n-1}\psi_*(I_{D(I,\psi)}/(\psi^*f)) \arrow[d, equal] \\
& R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) & 0
\end{tikzcd}$$

ここで，消滅は，$n=1$ の時は $I_{D(I,\psi)}=(\psi^*f)$ であることにより，$n\geq2$ の時は $I_{D(I,\psi)}/(\psi^*f)$ の $\psi$ に対する相対次元が $n-2$ 以下であることによる。ゆえに $\mathrm{Im}\,a=\mathrm{Im}\,b$ である。そして，$\psi^*f$ を掛けることによってできる同型 $\mathcal{O}_{\tilde V}\xrightarrow{\cong}(\psi^*f)\mathcal{O}_{\tilde V}$ が導く図式

$$\begin{tikzcd}
R^{n-1}\psi_*((\psi^*f)) \arrow[r, "a"] & R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \\
R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "f\text{の積}"'] &
\end{tikzcd}$$

を見て，$\mathrm{Im}\,a=f\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}$ がわかる。更に，図式

$$\begin{tikzcd}
R^{n-1}\psi_*(\psi^*\ell) \arrow[r] \arrow[drr, "d", "\wr"'] & & R^{n-1}\psi_*(\ell_D(\lambda,\nu)) \arrow[d, "b"] \\
\lambda\otimes R^{n-1}\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde V}) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[rr, "e", "積"'] & & R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}
\end{tikzcd}$$

を見て，関係

$$\operatorname{Im} b = \operatorname{Im} a = f\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} \subseteq \lambda\cdot R^{n-1}\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} = \operatorname{Im} e \subseteq \operatorname{Im} d \subseteq \operatorname{Im} b$$

が得られ，これらが一致することがわかった。

(2) は $\operatorname{coker} e = \operatorname{coker} b = \operatorname{coker} d$ であるから明らか。

証明終.

以後，この節では一次元特異点について考察する。

<u>命題(1.3)</u>　一次元被約特異点 $(V,p)$ について，次の等式が成立する。 $\dim \left(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V\right)\Big/ m\cdot\left(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V\right) = e(m, \mathcal{O}_{V,p}) - 1.$
ただし，$e(m, \mathcal{O}_V)$ は $\mathcal{O}_V$ の $m$ に関する重複度である。

<u>証明</u>.　$\operatorname{degree} D(m,\nu) = e(m, \mathcal{O}_{V,p})$ であることは良く知られている。そして，定理(1.2)により，これらは $\dim\left(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V\right)\Big/ m\cdot\left(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/\mathcal{O}_V\right)$ とも一致する。与式の左辺 $=$ $\dim\left(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/m\cdot\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V} + \mathcal{O}_V\right) = \dim\left(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}/m\cdot\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\right) - \dim\left(m\cdot\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}+\mathcal{O}_V / m\cdot\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\right)$ $= e(m, \mathcal{O}_{V,p}) - \dim \mathcal{O}_V / m\cdot\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\cap\mathcal{O}_V$ である。 $m\cdot\psi_*\mathcal{O}_{\tilde V}\cap\mathcal{O}_V =$ $m$ であることは容易にわかり，求める結果が従う。 証終

(1.4) $\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V$ の $m$-adic filtration について考えよう。数 $L(V,p)$ を $\underline{L(V,p) = \min\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha \geq 0,\ m^\alpha\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V) = 0\}}$ として定める。中山の補題により，$m^i(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V) \neq 0$ ならば $m^{i+1}(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V) \neq m^i\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V)$ である。ゆえに数 $L(V,p)$ は filtration

$$\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V \supsetneqq m(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V) \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq m^{L(V,p)}\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V) = 0$$

の長さである。

$D(m,\psi) = D((f),\psi)$ となる元 $f \in m$ をとると，明らかに，$D(m^\alpha,\psi) = D((f^\alpha),\psi)$ for $\alpha \geq 0$，であるから，等号 $m^\alpha\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V) = f^\alpha\cdot(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V)$ $\alpha \geq 0$ が成立する。上記 filtration は積による巾zero endomorphism

$$f\cdot\ :\ \psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V \longrightarrow \psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V$$

によりきまる。$f\cdot$ の固有空間の次元は $e(m,\mathcal{O}_{V,p})-1$ であり (1.3)，nilpotency order は $L(V,p)$ である。ゆえに，

<u>命題 (1.5)</u> 一次元被約特異点 $(V,p)$ について，次の不等式が成立する。$\dim(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V) \leq L(V,p)(e(m,\mathcal{O}_{V,p})-1)$

$$L(V,p) + e(m,\mathcal{O}_{V,p}) - 2 \leq \dim(\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{O}_V).$$

(1.6). 上の filtration に関する 2つの特別な場合について，その言い換えを注意しておく。

(1) $L(V,p) = \dim\left(\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{O}_V\right) \iff e(m, \mathcal{O}_{V,p}) = 2$.

(2) $L(V,p) = 1 \iff$ $(V,p)$ は Cohen-Macaulay of maximal emb. dim であって，かつ 1回 $m$ で blow up して normal になる。

証明についてひと言． (1) は命題 (1.3) に含まれている。(2) については，等式 $m \cdot \left(\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{O}_V\right) \cong m \cdot \psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} / m \cdot \mathcal{O}_V$ に気を付ければ，伊藤 [5] に含まれている。

## §2. 2次元正規特異点の numerical invariants について

(2.1) 2次元正規特異点 $(V,p)/\mathbb{C}$ とある resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \to (V,p)$ を考えよう。$R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ は resolution のとり方に依らない $\mathcal{O}_V$-module であることが Leray の spectral sequence によって確めることができる。そのことを念頭に置いて，数 $L(V,p)$ を $L(V,p) = \min\{\alpha \in \mathbb{Z} \mid \alpha \geq 0,\ m^\alpha R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0\}$ と置く。(1.4) で言ったのと同様に，この数 $L(V,p)$ は $m$-adic filtration

$$R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \supsetneqq m \cdot R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} \supsetneqq \cdots\cdots \supsetneqq m^{L(V,p)} R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0$$

の長さである。

$D(m, \psi) = D((f), \psi)$ となる元 $f \in m$ をとると，$m^\alpha \cdot R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}} = f^\alpha \cdot R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ $\alpha \geq 0$ が成立し，上記

filtration は積による巾 zero endomorphism

$$f\cdot \quad R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \longrightarrow R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$$

によりきます。$f\cdot$ の固有空間の次元は $\dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,+1)})$ であり (1,3)，そして，nilpotency order は $L(V,p)$ である。ゆえに，

命題 (2,2)　2次元正規特異点 $(V,p)$ の resolution $\psi$ : $(\tilde{V},A) \longrightarrow (V,p)$ について，次の不等式が成立する。

$$\dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \leqq L(V,p)\cdot\dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,+1)})$$

$$L(V,p)+\dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,+1)})-1 \leqq \dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \qquad //$$

$\dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ を幾何種数 (geometric genus) と呼び $p_g(V,p)$ と書く。この節では，もうひとつ2次元独特の numerical invariant $p_a$ をも加えて，$R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の情報との関係を論じたい。resolution $\psi : (\tilde{V},A) \longrightarrow (V,p)$ に対して数

$\sup\{\, p_a(D) \mid$ non-zero effective divisor $D$ on $\tilde{V}$ s.t. $|D| \subset A\}$

を考えよう。ただし，$p_a(D) := 1 - \chi(\mathcal{O}_D)$ とする。これは有限値であり，resolution のとり方に依らないことがわかっている [12]。この数を特異点 $(V,p)$ の算術種数 (arithmetic genus) と呼び $p_a(V,p)$ と書く。この数の感じをわかっていただく為に，次の補題を見て下さい。

補題(2、3) 上の状況において, non-zero effective divisor D on $\tilde{V}$, s.t. $|D| \subset A$, に対して次の等式が成立する。

$$p_a(D) = \dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} - \dim R^1\psi_*(\mathcal{I}_D) - \dim \mathfrak{m}/\psi_*(\mathcal{I}_D).$$

証明 $0 \to \mathcal{I}_D \to \mathcal{O}_{\tilde{V}} \to \mathcal{O}_D \to 0$ により, 完全列 $0 \to \mathcal{O}_V/\psi_*(\mathcal{I}_D) \to \psi_*(\mathcal{O}_D) \to R^1\psi_*(\mathcal{I}_D) \to R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \to R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) \to 0$ が従う。この完全列により, 等式 $p_a(D) = 1 - \chi(\mathcal{O}_D) = 1 - \dim \psi_*(\mathcal{O}_D) + \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_D) = 1 + \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) - \dim R^1\psi_*(\mathcal{I}_D) - \dim \mathcal{O}_V/\psi_*(\mathcal{I}_D)$ がわかる. $1 = \dim \mathcal{O}_V/\mathfrak{m}$ に気を付けてやれば, 主張が従う。 証終

これより, 特に $p_a(D) \leq p_g(V,p)$ であり, $p_a(V,p) \leq p_g(V,p)$ なのだが, 更に次の事が成立する。

命題(2、4). 2次元正規特異点$(V,p)$について, 次の不等式が成立する。

$$L(V,p) + p_a(V,p) - 1 \leq p_g(V,p).$$

証明 resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V,p)$ を考え, non-zero effective divisor D on $\tilde{V}$ であって $|D| \subset A$ かつ $p_a(D) = p_a(V,p)$ となるものをとる。補題(2.3)により,

$\dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) - p_a(V,p) = \dim R^1\psi_*(I_D) + \dim \mathfrak{m}/\psi_*(I_D)$ である。中山の補題を使って， $\mathfrak{m}^{\dim R^1\psi_*(I_D)} \cdot R^1\psi_*(I_D) = 0$ と
$\mathfrak{m}^{\dim(\mathfrak{m}/\psi_*(I_D))} \cdot (\mathfrak{m}/\psi_*(I_D)) = 0$ （すなわち $\mathfrak{m}^{\dim(\mathfrak{m}/\psi_*(I_D))+1} \subseteq \psi_*(I_D)$）
がわかる。可換図式

$$\begin{tikzcd}
R^1\psi_*(I_D) \arrow[r, "g"] & R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \\
\psi_*(I_D) \otimes R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \arrow[u] \arrow[ur, "積"'] &
\end{tikzcd}$$

を見て，次の関係が従う。 $\mathfrak{m}^{\dim R^1\psi_*(I_D) + \dim(\mathfrak{m}/\psi_*(I_D)) + 1} R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})$
$\subseteq \mathfrak{m}^{R^1\psi_*(I_D)} \cdot \psi_*(I_D) \cdot R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \subseteq g(\mathfrak{m}^{R^1\psi_*(I_D)} \cdot R^1\psi_*(I_D)) = 0$.
ゆえに， $1 + p_g(V,p) - p_a(V,p) = \dim R^1\psi_*(I_D) + \dim \mathfrak{m}/\psi_*(I_D) + 1$
$\geq L(V,p)$ である。 証終.

命題(2.5) 2次元正規特異点 $(V,p)$ について， $p_g(V,p) = p_a(V,p)$ ならば， $p_g(V,p) \leqq$ Cohen-Macaulay type である。

証明. $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V,p)$ を resolution， $\omega_V$ と $\omega_{\tilde{V}}$ をそれぞれ， $V$ と $\tilde{V}$ の dualizing sheaf とする。non-degenerate $\mathbb{C}$-bilinear pairing $\langle\ ,\ \rangle : R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) \times \omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde{V}}) \longrightarrow \mathbb{C}$ を，関係式 $\langle \alpha, \gamma\beta \rangle = \langle \gamma\alpha, \beta \rangle$ for $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \times \omega_V/\psi_*\omega_{\tilde{V}} \times \mathcal{O}_V$ が成立するように，構成できる（Serre [9], Laufer [6]）。ゆえに任意の ideal $I \subseteq \mathcal{O}_V$

に対して，次の duality が容易に確められる。

$$\{\alpha \in R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} \mid \mathfrak{m}\cdot\alpha = 0\} \xleftrightarrow[\text{dual}/\mathbb{C}]{} \left(\omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde{V}})\right) \Big/ \mathfrak{m}\cdot\left(\omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde{V}})\right).$$

さて，$p_g(V,p) = p_a(V,p)$ ならば $\mathfrak{m}\cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0$ である（2,4）。上の duality により，$p_g(V,p) = \dim R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}) = \dim \left(\omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde{V}})\right) \Big/ \mathfrak{m}\cdot\left(\omega_V/\psi_*(\omega_{\tilde{V}})\right) = \dim \omega_V/\mathfrak{m}\omega_V + \psi_*(\omega_{\tilde{V}}) \leqq \dim \omega_V/\mathfrak{m}\omega_V$ = Cohen-Macaulay type. 証終

これは、命題（1.3）[3]，定理（2,16）[15]，定理B [16]，[7] などの研究の延長線上にある命題である。

例（2.6）（渡辺敬一先生による）$p_g - p_a$ = Cohen-Macaulay type となるような例をあげておく。genus $g$ の curve $X$ 上の line bundle $[-\alpha\cdot P] \longrightarrow X$ ；$P$ は $X$ 上の一点，$\alpha$ は自然数，の zero-section をつぶして得られる特異点（$V,p$）は $\operatorname{Spec} R = V$，$R = \bigoplus_{k\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(n\alpha P))T^n$ と書くことができる（[8]，[1]，参）。$R$ の canonical module $K_R$ は [2]，[13] により

$$K_R = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^0(X, K_X\otimes\mathcal{O}_X(k\alpha P))T^k \text{ と書け，}$$

$p_g(V,p)$ は $p_g(V,p) = \sum_{k\geq 0} \dim H^1(\mathcal{O}_X(k\alpha P))$ と書ける [8]．

$\alpha \geqq 2g+1$ ならば，$H^1(X, \mathcal{O}_X(n\alpha P)) = 0 \quad n \geqq 1$，

$H^0(X, K_X\otimes\mathcal{O}_X(m\alpha P)) = 0 \quad m \leqq -1$，そして，

$H^0(X, K_X)\otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(n\alpha P)) \longrightarrow H^0(X, K_X\otimes \mathcal{O}_X(n\alpha P))$ は 上射 for $n \geq 1$ である。ゆえに，この時，$p_g = p_a =$ Cohen-Macaulay type $=$ genus of $X$ である。

$p_a$はその定義により，resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ における例外集合 $A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ の intersection matrix $(A_i \cdot A_j)$ によって決定できる数である。一方 $p_g$ は $(A_i \cdot A_j)$では決まらない。だが，特異点が good $\mathbb{C}^*$-action を持つ場合には，$R^1\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{V}}$ の $\mathfrak{m}$-adic filtration が，次の形で制限されることがわかる。

<u>定理 (2,7)</u>　$(V, p)$ を 2次元正規特異点であって good $\mathbb{C}^*$-action を持つとする。その時，任意の resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ に対して，次の不等式が成立する。

$$\dim\left(R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathfrak{m} R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}\right) \leq p_a(V, p).$$

証明を述べる前に，すでに得られているこのノートの中の結果と組みあわせて，次の事が得られることに注意しよう。

good $\mathbb{C}^*$- action を持つ特異点について，

(1)　$\mathfrak{m} R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} = 0 \iff p_a(V, p) = p_g(V, p)$

(2)　$p_a(V, p) = 0 \iff p_g(V, p) = 0$.

(3) $p_a(V, p) = 1 \iff \dim R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathfrak{m} \cdot R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} = 1$

$\iff L(V, p) = p_g(V, p)$ かつ $p_g \neq 0$.

ただし，(2)は $\mathbb{C}^*$-action の条件なしで，すでに M. Artin によって証明されている。

筆者には，"上の m-adic filtration と $p_a$ の直接対応" は興味深い事に思える。そして，$\mathbb{C}^*$-action の存在の仮定しない場合に定理が成立するかどうかは，次に解くべき本質的な問題である。

<u>定理(2.7)の証明の概略</u>． 次の命題を証明抜きで使おう。

<u>命題(2.8)</u>　2次元正規特異点 $(V, p)$ と非自明な partial resolution $\psi : (\tilde{V}, A) \longrightarrow (V, p)$ であって，$\tilde{V}$ が高々有理特異点しか持たないものを考えよ。この時，

(1) $p_a(V, p) = \max \left\{ 1 - \chi(\mathcal{O}_{\tilde{V}} / \mathcal{J}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{J} : \text{coherent ideal sheaf of } \mathcal{O}_{\tilde{V}} \\ \text{s.t. } \mathcal{J} \neq \mathcal{O}_{\tilde{V}},\ \operatorname{supp}(\mathcal{O}_{\tilde{V}}/\mathcal{J}) \subseteq A \end{array} \right\}$

(2) 更に，右辺の $\mathcal{J}$ として divisorial なものに制限しても等号が成立する。

さて，我々は $\mathbb{C}^*$-action を特異点の一般論（[1], [8], [13] [14]）により，curve $X$ とその上の $\mathbb{Q}$-Weil divisor $D$ を

用いて、 $R = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner))T^k$ , $\mathrm{Spec}\, R = V$,
とあらわす。更に、partial resolution $\psi$ を

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} = \mathrm{Spec}\left(\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner)T^k\right) & \xrightarrow[\psi]{} & \mathrm{Spec}\, R \\ \cup & & \\ X & & \end{array}$$

として構成する。ここで、$|\psi^{-1}(p)| = X$ であり、$\tilde{V}$ は cyclic quotient singularity（特に rational singularity）を持つのみである。 $D(m, \psi) = r_m \cdot X$ , $r_m \in \mathbb{N}$ と書くと、
$\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X) = \bigoplus_{k \geq r_m} \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner)T^k$ が成立する（Remark (1.5) (ii) [14]）。 そこで、次の完全列を見よ。

$$0 \to \underset{\underset{m}{\|}}{\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X))} \to \underset{\underset{\mathcal{O}_V}{\|}}{\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})} \to \psi_*(\mathcal{O}_{D(m,\psi)})$$

$$\to \underset{\underset{\bigoplus_{k \geq r_m} H^1(X, \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner))}{\|}}{R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}}(-r_m X))} \xrightarrow{h} \underset{\underset{\bigoplus_{k \geq 0} H^1(X, \mathcal{O}_X(\llcorner kD \lrcorner))}{\|}}{R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})} \to R^1\psi_*(\mathcal{O}_{D(m,\psi)}) \to 0$$

これより、$h$ は単射であり、$\psi_*(\mathcal{O}_{D(m,\psi)}) \cong \mathbb{C}$ である。
ゆえに、 $p_a(V, p) \geq 1 - \chi(\mathcal{O}_{D(m,\psi)}) = \dim H^1(\mathcal{O}_{D(m,\psi)})$
$= R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}} / m \cdot R^1\psi_*(\mathcal{O}_{\tilde{V}})$ である。 $\psi' : (V', A') \to (V, p)$
を任意の resolution とすると、 $R^1\psi'_*(\mathcal{O}_{V'}) = R^1\psi_*\mathcal{O}_{\tilde{V}}$ であることは標準的な議論で従う。　　証明終

参考文献.

[1] M. Demazure : Anneaux gradués normaux, preprint.

[2] S. Goto, Kei-i. Watanabe : On graded rings I, J. Math. Soc. Japan vol. 30., 179 — 213 (1978).

[3] F. Hidaka, Kei-i. Watanabe : Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor, Tokyo J. Math. 4., 319 — 330 (1981).

[4] 樋口, 吉永, 渡辺(公) : 多変数複素解析入門, 森北出版株式会社 . 1980.

[5] S. Itho : Analytically unramified local ring について, 可換環論シンポジウム報告集(第5回) 71—76 (1984).

[6] H. B. Laufer : On rational singularities. Amer. J. Math., 94 . (1972) 597 — 608.

[7] S. Ohyanagi, E. Yoshinaga : A criterion for 2-dimensional normal singularities to be weakly elliptic. Science rep. of Yokohama National Univ. Sec II . vol 26, 5—7 (1979).

[8] H. Pinkham : Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$-action. Math. Ann. 227, 183 — 193 (1977).

[9] J. P. Serre : Un théorème de dualité. Comm.

Math. Helv. 29, 9-26 (1955).

[10] M. Tomari : A $p_g$-formula and elliptic singularities. preprint. R.I.M.S. No 458.

[11] ________ : 幾何種数の計算公式と楕円型特異点について(総合報告, その他), 1984年3月. 数理研シンポジウム "多様体の特異点の最近の成果" 講究録.

[12] P. Wagreich : Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. Math. 92., 419-454 (1970).

[13] Kei-ichi Watanabe : Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings. Nagoya. Math. J vol 83 (1981) 203-211.

[14] ____________ : Rational singularities with $k^*$-action in "Commutative algebra" Proc. Trento. Conf. edited by. S. Greco and G. Valla. 339-351. Lecture Note. Pure and applied Math. No 84 (1983). Marcel Dekker.

[15] Kimio Watanabe : On plurigenera of normal isolated singularities I. Math. Ann. 250, 65-94 (1980).

[16] S.S.-T. Yau : On maximally elliptic singularities Trans. A.M.S. 257, 269-329 (1980).