数理解析研究所講究録
第 544 巻 1985 年 39-46

二次元の bisymmetric mean（特に非対称な場合）の表現について

武蔵工大　奈良　知恵 (Chiê Nara)

実数空間内の任意の区間を I とする。狭義単調増加なな連続関数 $\varphi: I \longrightarrow R$ と実数 t $(0<t<1)$ を固定する。この時 I に属する二数 a, b の一般化された算術平均

$$N_{\varphi t}(a, b)=\varphi^{-1}\{t \varphi(a)+(1-t) \varphi(b)\}$$

を Hardy - Littlewood - Pólya 型の平均（略して HLP-mean）と呼ぶ。この関数 $N=N_{\varphi,t}$ は I^2 から I への単調増加な連続関数ですべての $a \in I$ について $N(a,a)=a$ を満たす。更に N は次の bisymmetry equation も満たす。

$$(*) \qquad N[N(a,b), N(c,d)]=N[N(a,c), N(b,d)]$$

（b と c と交換可能）

そこで一般に関数 $N: I^2 \rightarrow I$ が連続かつ単調増加ですべての $a \in I$ について $N(a,a)=a$ を満たすとき、N を I^2 上の <u>mean</u> と定義する。更に条件 (*) を満たすとき <u>bisymmetric mean</u>

と呼ぶ。まず bisymmetric mean の歴史的な背景について触れる。

A. Kolmogoroff [3] と M. Nagumo [4] は 1930年にそれぞれ独立に次の事を示した。

可算個の mean (n 次元に自然に拡張された定義による) の列 $M_n : I^n \longrightarrow I$ $(n=1,2,\cdots)$ が狭義単調増加かつ対称のとき、すべての $k \leqq n$ について

$$M_n(a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_n) = M_n[M_k,\ldots,M_k,a_{k+1},\ldots,a_n]$$

(こゝで $M_k = M_k(a_1,\ldots,a_k)$ を表わす)

を満たすならば、狭義単調増加な連続関数 $\varphi : I \to R$ が存在して

$$M_n(a_1,\ldots,a_n) = \varphi^{-1}\left\{\frac{\varphi(a_1)+\cdots+\varphi(a_n)}{n}\right\} \quad (n=1,2,\ldots)$$

と表せる。

その後、1948年に J. Aczél [1] は一つの固定した n について n 次元の HLP-mean $\varphi^{-1}\{t_1\varphi(a_1)+\cdots+t_n\varphi(a_n)\}$ (こゝで $t_1,\ldots,t_n$ は $t_i>0$, $t_1+\cdots+t_n=1$ を満たす固定した実数) を次の様に特徴付けた。

I^n 上の狭義単調増加な mean M が次の bisymmetric equation

$$M[M(\mathbb{c}_1),\ldots,M(\mathbb{c}_n)] = M[M(\mathbb{r}_1),\ldots,M(\mathbb{r}_n)]$$

(こゝで $n\times n$ 行列の列ベクトルを $\mathbb{c}_1,\ldots,\mathbb{c}_n$, 行ベクトルを $\mathbb{r}_1,\ldots,\mathbb{r}_n$ とする)

を満たせば HLP-mean である。

さてこゝで扱うのは次のものである。

<u>問題</u>　二次元の bisymmetric mean ならばどの様な具体的表現をもつか.

まず、J. Aczél の結果から狭義単調増加な bisymmetric mean は HLP-mean である。また positively homogeneous [2] や対称 [5] な bisymmetric mean についてもその表現は得られている.

こゝでは付加条件なしに一般の場合について解決できる事を示す。簡単の為に区間 I は閉区間 $I=[\alpha,\beta]$ とする.

<u>定義</u>　I^2 上の bisymmetric mean を N とする。$a\in I$ について I 上の関数 $\gamma, \overline{\gamma}, \delta, \overline{\delta}$ を

$$\gamma(a)=\min\{b\in I:\ N(a,b)=a\},\qquad \overline{\gamma}(a)=\max\{b\in I: N(a,b)=a\}$$

$$\delta(a)=\min\{b\in I:\ N(b,a)=a\},\qquad \overline{\delta}(a)=\max\{b\in I: N(b,a)=a\}$$

と定義する。そして N が値 a をとる点の集合 $\{(x,y)\in I^2: N(x,y)=a\}$ を a の<u>等高線</u>と呼ぶ。特に $a\geqq b\in I$ が存在して

$$\{(a,y)\in I^2:\ y\geqq b\}\ \text{及び}\ \{(x,b)\in I^2:\ x\geqq a\}$$

が a の等高線に含まれる時、a は b を角にもつ <u>L型</u>の点と呼ぶ。

またすべての $y\in I$ について $N(a,y)=a$（又は $N(y,a)=a$）の時、a は<u>垂直型</u>（又は<u>水平型</u>）の点と呼ぶ。

bisymmetric mean は次の三つに場合分けされる.

(1) 垂直型の点 a $(\alpha<a<\beta)$ が存在する場合

(2) 水平型の点 a $(\alpha<a<\beta)$ が存在する場合

(3) その他.

(1),(2),(3) 各々について具体的な形は決められるが, ここでは(3)の場合のみ扱う((1)と(2)は少し複雑になる)。以下 I の内点はすべて垂直型でも水平型でもないと仮定する。条件(*)から導かれる本質的な事柄を列挙する.

bisymmetric mean の基本的性質

性質1　$a \in I$ について $N(a,b)=N(a,c)=a$ $(b \leqq a \leqq c)$ ならば, すべての $x \in I$ について

$$N[N(a,x),\, b] = N[N(a,x),\, c]$$

が成り立つ. この事から関数 γ 及び $\bar{\gamma}$ は単調増加関数になる.

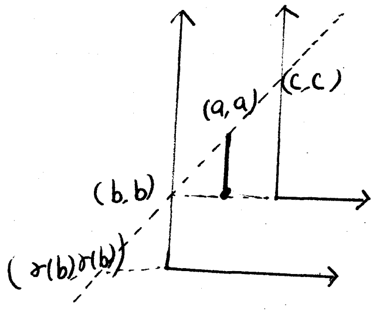
性質2　$\alpha < \gamma(a) < a$ を満たす点 $a \in I$ について

$\gamma(a)=b,\quad c=\max\{x : \gamma(x)=b\}$

とおくと b, c はそれぞれ $\gamma(b)$, b を角にもつ L 型の点ですべての $a \leqq x \leqq c$ について

$$\gamma(x)=b \quad \text{かつ} \quad \bar{\gamma}(x)=\beta$$

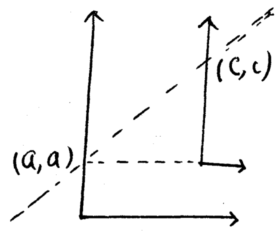
が成り立つ



実線は等高線を表わし矢印は境界まで伸びている事を意味する. 太線が仮定.

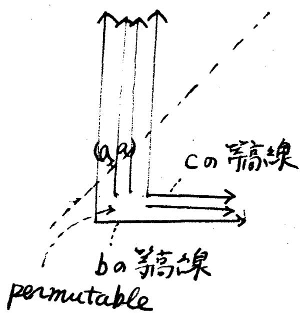
性質2′　$\gamma(a)=a<\bar{\gamma}(a)$ を満たす点 a は a 自身を角にもつ L 型の点である.

性質3　$a\in I$ が $b(<a)$ を角にもつL型の点ならば適当な $c(\geq a)$ が存在して c は a を角にもつL型の点である。



bisymmetric meanの局所的性質

まず　$A=\{a\in I:\ \gamma(a)<\bar{\gamma}(a)$ 又は $\delta(a)<\bar{\delta}(a)\}$　とおくと性質2と2'よりAは閉集合になる。従って $I\setminus A=\cup J_n$ (J_n は互いに素な開区間と書ける。NをJ_n^2上へ制限したmean $N|_{J_n^2}$ は狭義単調増加になる事がbisymmetricの条件から示される。従って $N|_{J_n^2}$ はHLP-meanである。またAの元aについてその局所的な形は次の様になる。$\alpha<\gamma(a)<a$ とする(他の場合も同様に示される)。このとき二つの等高線 $b=\max\{x\leq a:\ x$はL型の点$\}$ と $c=\min\{x\geq a:\ x$はL型の点$\}$ によって囲まれる部分は次を満たす。



矩形 $[b,c]\times[\gamma(c),\beta]$ 上でNの等高線は全て垂直，矩形 $[c,\beta]\times[\gamma(b),\gamma(c)]$ 上でNの等高線は全て水平 そして矩形 $[b,c]\times[\gamma(b),\gamma(c)]$ 上でpermutable、即ちすべての x,u,v:

$$b\leq x\leq c\ ,\quad \gamma(b)\leq u,v\leq\gamma(c)$$

について

$$N[N(x,u),v]=N[N(x,v),u]$$

である. 更にこの矩形上で次の様に表せる.

$$N(x,y) = \varphi^*\{\varphi(x) + h(y)\},$$

こゝで φ は $[b,c]$ 上の $[-\infty,0]$ に値をとる狭義単調増加な連続関数で $\varphi(c)=0$ を満たし, h は $[\gamma(b),\gamma(c)]$ 上の $[-\infty,0]$ に値をとる単調増加な連続関数で $h[\gamma(c)]=0$ を満たす. 又, 記号 φ^* は $\varphi^*(t)=\varphi^{-1}\{\max\{\varphi(b),t\}\}$ を意味する.

決まる具体的な形

二つの単調増加な連続関数 $w_i : I \to R$ の組 $w=(w_1,w_2)$ が すべての $a\in I$ について $\min\{w_1(a),w_2(a)\}=a$ を満たすとき, I の二点 a, b の重み付き minimum 型の平均を

$$\min\{w_1(a),\ w_2(a)\}$$

と定義し, $\mathrm{Min}_w(a,b)$ と書く。 Min_w は bisymmetric mean になる. この Min_w を少し変形して作られる重み付き quasi-minimum 型の平均を次の様に定義する。 簡単の為に次を仮定する: すべての $\alpha<a<\beta$ について $w_1(a)=a<w_2(a)$ かつ $w_2(a)=a$ (即ち, $\alpha<a<\beta$ の等高線は対角線より下側で曲がり, α は α を角にもつ L 型の点である). I に含まれる互いに素な開区間の列 $\mathcal{J}=\{J_n\}_{n\in\Lambda}$ を帰納的に次の様にとる.
$J_0=(\xi_0,\eta_0)$ は $\eta_0 \leqq w(\xi_0)$ を満たす様に任意にとる.

$J_n=(\xi_n,\eta_n)$ とするとき $J_n\neq\phi$ ならば $J_{n+1}=\big(w_2(\xi_n), w_2(\eta_n)\big)$

$J_{-n}=(\xi_{-n},\eta_{-n})$ とするとき、$J_{-n-1}=(w_2^*(\xi_{-n}),w_2^*(\eta_{-n}))$ と定める、こゝで $w_2^*(t)=\max\{x: w_2(x)=t\}$ とする。

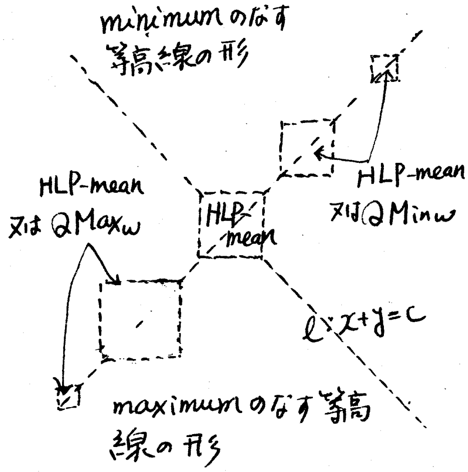
次に $n\in\Lambda$ について $\bar{J}_n=[\xi_n,\eta_n]$ 上の $[-\infty,0]$ に値をとる狭義単調増加な連続関数 φ_n を $\varphi_n(\eta_n)=0$ かつ $\varphi_{n+1}(\xi_{n+1})\leqq\varphi_n(\xi_n)$ を満たす様にとる。そこでこの $\mathcal{J}=\{J_n\}_{n\in\Lambda}$ と $\Phi=\{\varphi_n\}_{n\in\Lambda}$ によって新しく定義される I^2 上の mean

$$
M(a,b)=\begin{cases}\varphi_n^*\{\varphi_n(a)+\varphi_{n-1}(b)\}, & (a,b)\in J_n\times J_{n-1}\text{ のとき}\\ \varphi_n^*\{\varphi_{n-1}(b)\}, & (a,b)\in[\eta_n,\beta]\times J_{n-1}\text{ のとき}\\ N(a,b), & \text{その他}\end{cases}
$$

を N に $\{\mathcal{J},\Phi\}$ を埋めこんだ mean と呼ぶ。$\bigcup_{n\in\Lambda}J_n$ が互いに素になる様な区間列について、この様な操作をくり返してできる mean を I^2 上の重み付 quasi-minimum 型の平均と呼び、$QMin_w$ と書く。 重み付き quasi-maximum 型の平均も同様に定義し、$QMax_w$ と書く。

<u>定理</u>　I^2 上の bisymmetric mean N について、I のどの内点も垂直型でも水平型でもないならば、互いに素な I の開区間の列 $\{J_n : n\in\Lambda\}$ が存在して N は各 J_n^2 上で HLP-mean, $QMin_w$ 又は $QMax_w$ になり、その他の点では、適当な $c\in I$ が存在して直線 $\ell: x+y=c$ の上半分で minimum のなす等高線と同じ形をもち、直線 ℓ の下で maximum のなす等高線と同じ

形をもつ。



証明は基本的性質と局所的性質を適当に組合せてできる。

参考文献

[1]. J. Aczél, On mean values, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 392–400

[2] Takashi Ito and Chiê Nara, Quasi-Arithmetic means with weights of continuous functions, to appear

[3] A. Kolmogoroff, Sur la notion de la moyenne, Atti dela R. Academia nazionale dei Lincei (6) vol. 12 (1930), 388–391

[4] M. Nagumo, Über eine Klasse der Mittelwerte, Jap. J. Math. vol. 7 (1930), 71–79

[5] 奈良知恵, 二次元のbisymmetric meanについて S.59 日本数学会年会予稿集