数理解析研究所講究録
第 544 巻 1985 年 47-69

half-norm空間における正作用素のスペクトル

お茶の水女大　理　澤島侑子 (Ikuko Sawashima)
お茶の水女大　理　竹尾富貴子(Fukiko Takeo)

§1. 序

順序線形空間上の正斉次，劣加法的汎関数を，W. Arendt, P. R. Chernoff and T. Kato は半ノルムと呼び，これを用いて消散性の概念をバナッハ空間に拡張して，消散的作用素に関する従来の結果を拡張した[1]。その後，S. Yamamuro, D. W. Robinson らは，順序バナッハ空間の性質を半ノルムを用いて，種々研究している[4, 6]。正斉次劣加法的汎関数は，以前から，M. Krein, S. Grosberg らにより順序に関係ある解析には，しばしば用いられていた[3]。順序バナッハ空間の構造はノルムよりむしろ半ノルムによりよく反映される場合もある。順序バナッハ空間上の正作用素のスペクトル理論でも，ノルムの性質より半ノルムが有効に働いているように思われる。

ここでは，正錐上に半ノルムを定義し，半ノルムにより，閉集合，完備性(ノルム完備よりは弱い)を定義する。

更に，正斉次加法的作用素に対し，半ノルムからスペクトル及び，スペクトル半径を定義し，スペクトル半径の点がスペクトルに入るなど，スペクトルの性質を半ノルムを使って調べる。

§2. 半ノルム空間とノルム空間について

Eを実ベクトル空間，pはE上の関数で次のPI)～PIV)をみたすとき，E上の半ノルム (half-norm) という[1]。

PI)　$p(x) \geqq 0 \quad (\forall x \in E)$

PII)　$p(x+y) \leqq p(x) + p(y) \quad (\forall x, y \in E)$

PIII)　$p(\alpha x) = \alpha\, p(x) \quad (\forall \alpha \geqq 0,\ \forall x \in E)$

PIV)　$p(x) \vee p(-x) = 0 \iff x = 0$

$E_+ = \{x \in E ;\ p(-x) = 0\}$ を正錐とよび，これによってE上に順序を入れることができる。$E = E_+ - E_+$ のとき，(E, p) を半ノルム (half-norm) 空間という。半ノルムからE上にノルムを導入する仕方はいろいろある[6]。一例をあげると，任意の $x \in E$ に対し $\|x\|_p = p(x) \vee p(-x)$ とおくと，$\|\cdot\|_p$ はE上のノルムになる。

次に，ノルム空間Eから半ノルムの作り方を述べる。Eが順序ノルム空間の場合を考える。正錐 E_+ が正規，即ちある正数 γ が存在して，任意の $x, y \in E_+$ に対し $\|x+y\| \geqq \gamma \|x\|$

が成りたち，かつ，$E = E_+ - E_+$ と仮定する．このとき，E上に半ノルムを定義する仕方はいろいろある．その1つとして

$$p(x) = \inf\{\|x+y\| ;\ y \in E_+\} \quad (\forall x \in E)$$

によって定義することができる[4]．これを標準半ノルムとよぶ。E上のノルムが単調，即ち，$0 \leqq x \leqq y$ ならば $\|x\| \leqq \|y\|$ のとき，上述の半ノルム $p(x)$ は $x \in E_+$ ならば $p(x) = \|x\|$ となる。又，順序ノルム空間に別のノルム $\|\cdot\|_g$，及び，前述のように定義したE上の半ノルム p から，新たに $\|\cdot\|_p$ を次のように導入することができる．任意の $x \in E$ に対し，

$$\|x\|_p = p(x) \vee p(-x)$$

$$\|x\|_g = \inf\{\lambda > 0 ;\quad x \in \lambda B\}$$

ただし，$B = \{\alpha x - \beta y ;\ 0 \leq \alpha, \beta,\ \alpha+\beta = 1,\ x, y \in E_+,\ \|x\| \leqq 1, \|y\| \leqq 1\}$ とする．このとき，次の命題を得る．

<u>命題 1</u>．順序ノルム空間 $(E, \|\ \|)$ に対し，上述のように $\|\cdot\|_p$，$\|\cdot\|_g$ を定義すると，任意の $x \in E$ に対し，

$$\|x\|_g \geqq \|x\| \geqq \|x\|_p$$

が成りたつ。

順序ノルム空間については，正錐 E_+ の上の性質が，E全体にかなり強く反映している．以後，E_+ の上に諸の重要

をおいて考える。

§3. 半ノルム錐について

E_+を順序線形空間の中の純正錐，即ち，

a) $E_+ \ni x, y \Rightarrow x+y \in E_+$

b) $E_+ \ni x$, $\alpha \geqq 0 \Rightarrow \alpha x \in E_+$

c) $E_+ \cap (-E_+) = \{0\}$

とする。 pはE_+上の関数で，次の PI′)〜PIV′) をみたすとき，E_+上の半ノルムといい，(E_+, p)を半ノルム錐という。

PI′) $p(x) \geqq 0$ $(\forall x \in E_+)$

PII′) $p(x) \leqq p(x+y) \leqq p(x)+p(y)$ $(\forall x, y \in E_+)$

PIII′) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ $(\forall \alpha \geqq 0, \forall x \in E_+)$

PIV′) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$E := E_+ - E_+$ とおき，Eの中でE_+が閉集合であることを，次のようにきめる。Eの任意の元xに対して，もし任意の正数εに対し，適当なE_+の元yが存在して，$y+x \in E_+$ かつ $p(y) \leqq \varepsilon$ をみたすならば，$x \in E_+$が成立するとき，E_+はp−閉であるという。

E_+上の半ノルムは，E上へ次のように拡張できる。任意の$x \in E$に対し，

$$\hat{p}(x) = \inf\{\, p(a) ;\ a \in E_+,\ a \geqq x \}$$

とおく。このとき，次の命題が成りたつ。

命題 2. E_+ が p-閉ならば，次が成りたつ。

i) $\{x \in E\ ;\ \tilde{p}(-x) = 0\} = E_+$

ii) $x \in E$ に対し，$\tilde{p}(x) \vee \tilde{p}(-x) = 0 \iff x = 0$

iii) $(E, \tilde{p})$ は半ノルム空間である。

次に，E_+に完備性を定義する。E_+ の中の任意の点列$\{x_n\}$に対し，$\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty$ ならば，適当な $x \in E_+$ が存在して，$x \geqq \sum_{n=1}^{k} x_n$ $(\forall k \in N)$ かつ $p(x - \sum_{n=1}^{k} x_n) \to 0$ $(k \to \infty)$ を満たすとき，(E_+, p) を単調増加完備 (positively monotone complete) という。

実線形空間E上に，§2で述べたような半ノルムpが既に定義されていた場合，半ノルム空間(E, p)と，ここで定義した半ノルム錐(E_+, p)との関係を調べる。$E_+ = \{x \in E\ ;\ p(-x) = 0\}$ とおき，p を E_+ 上に制限すると，次の命題を得る。

命題 3. (E_+, p) は p-閉な半ノルム錐である。

命題 4. Eの元 x に対し

$$\tilde{p}(x) = \inf\{p(a)\ ;\ a \in E_+,\ a \geqq x\}$$

とおくと，　$\tilde{p}(x) \geqq p(a)$　である．

又，Eが順序ノルム空間であった場合，これらの考えは，どのような対応がつくかについて，次の命題を示す．

<u>命題 5.</u>　Eは順序ノルム空間，E_+は正規な純正錐で，$E = E_+ - E_+$ とする．任意の $x \in E_+$ に対し，$p(x) = \inf\{\|x+y\|;\ y \in E_+\}$ とおくと，(E_+, p) は半ノルム錐である．

このとき，E_+ がノルム完備ならば，(E_+, p) は p-閉 かつ 単調増加完備である．

(証明)　E_+は正規より $\gamma > 0$ が存在して，任意の E_+の元 x, y に対し，$\|x+y\| \geqq \gamma\|x\|$ が成りたつので，$p(x) \geqq \gamma\|x\|$ となる．これより，E_+はノルム完備だから，E_+はp-閉となる．

又，$\{x_n\}$をE_+の中の点列で $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_n) < \infty$ とする．E_+が正規より，$\{\sum_{n=1}^{k} x_n\}_k$ は E_+の中のノルムコーシー列となり，E_+がノルム完備より $x \in E_+$ が存在して，

$x \geqq \sum_{n=1}^{k} x_n\ (\forall k \in N)$ かつ $p(x - \sum_{n=1}^{k} x_n) \leqq \|x - \sum_{n=1}^{k} x_n\| \to 0\ (k \to \infty)$

となるので，(E_+, p) は単調増加完備である．//

注意 命題5の逆は必ずしも成りたたない．即ち (E_+, p) が p-閉 かつ 単調増加完備であっても，ノルム完備とはならない例が次に示すように存在する．

例1. E を $C[-1,1]$ の次のような部分空間とする．

$$E = \{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in C[-1,1] \ ; \ \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \text{ は絶対収束し，その和は } 0 \}。$$

E の元 f に対し，$\|f\| = \sup_{n \geq 0} |f^{(n)}(0)|$ として E にノルムを入れる。$E_+ = \{ f \in E \ ; \ a_n \geq 0 \ (\forall n \geq 1) \}$ とおく。

このとき，E は順序ノルム空間で，E_+ は正規な純正錐で，$E = E_+ - E_+$ である．又 E_+ はノルム完備ではない．何故なら，$f_j(x) = -1 + \sum_{n=1}^{2^j} \frac{1}{n!\, 2^j} x^n$ とおくと $f_j \in E_+$ で $\{f_j\}$ はコーシー列だが，$f_j \to -1 \ (j \to \infty)$ で $\lim_{j \to \infty} f_j \notin E$ である．

$$p(f) = \inf \{ \|f + g\| \ ; \ g \in E_+ \}$$

とおくと，E_+ は p-閉かつ単調増加完備である．

命題5の逆に対応する命題を次に述べる．

命題6. (E_+, p) は p-閉，単調増加完備な半ノルム錐とする．$E = E_+ - E_+$ とおき，E_+ の任意の元 x に対し

では，$p(x)=\|x\|$ となるように E 上にノルム $\|\cdot\|$ を定義する。このとき，正数 c が存在して，任意の E の元 x に対しある E_+ の元 a が存在して，$a \geqq x$ かつ $p(a) \leqq c\|x\|$ となるならば，E_+ は $\|\cdot\|$ 完備となり，$(E, \|\cdot\|)$ はバナッハ空間となる。

（証明）$\{x_n\}$ を E の中の $\|\cdot\|$ コーシー列とする。このとき，適当な部分列をとって，$\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| < \frac{1}{2^j}$ とできる。仮定から，$a_j, b_j \in E_+$ が存在して

$$x_{n_j} - x_{n_{j+1}} = a_j - b_j, \quad p(a_j) \leqq c\|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\| < \frac{c}{2^j}$$

となる。これより，$\sum_{j=1}^{\infty} p(a_j) \leqq c \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = c$ となり，E_+ は単調増加完備より，$a \geqq \sum_{j=1}^{k} a_j \ (\forall k \in N)$ かつ $p(a - \sum_{j=1}^{k} a_j) \to 0$ $(k \to \infty)$ なる $a \in E_+$ が存在する。又，

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(b_j) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} (\|a_j\| + \|x_{n_j} - x_{n_{j+1}}\|) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} (c+1) \frac{1}{2^j} = c+1$$

より，$b \geqq \sum_{j=1}^{k} b_j \ (\forall k \in N)$，$p(b - \sum_{j=1}^{k} b_j) \to 0 \ (k \to \infty)$ なる $b \in E_+$ が存在する。$x_n = x_1 - \sum_{j=1}^{n-1} (a_j - b_j)$ より $x_0 = x_1 - a + b$ が $\{x_n\}$ の極限であり，$x_0 \in E$ である。よって，$(E, \|\cdot\|)$ はバナッハ空間である。

特に，$\{x_n\} \subset E_+$ ならば，$p(-x_0) = 0$ 故から $x_0 \in E_+$ であることが導かれ，E_+ は $\|\cdot\|$ 完備である。//

§4. Eの複素係数化空間$\tilde{E}$上へのpの拡張，及びノルムの導入.

(E_+, p) は p-閉，単調増加完備な半ノルム錐とする．$E=E_+-E_+$ の複素係数化空間 $\tilde{E}=E+iE$ 上へ p を次のように拡張する。任意の $z\in\tilde{E}$ に対し，

$$\hat{p}(z)=\inf\{p(a);\ a\in E_+,\ a\geq \mathrm{Re}(e^{-i\theta}z)\ (\forall\theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}])\}$$

とする。$z\in E$ に対しては，ここで定義した $\hat{p}$ と，命題2の前で定義した $\hat{p}$ と一致する。そしてこの $\hat{p}$ に対し，次の命題が成りたつ。

<u>命題 7.</u> i) $\hat{p}(z)\geq 0 \quad (\forall z\in\tilde{E})$

ii) $\hat{p}(z+w)\leq\hat{p}(z)+\hat{p}(w) \quad (\forall z, w\in\tilde{E})$

iii) $\alpha\,\hat{p}(z)=\hat{p}(\alpha z) \quad (\forall\alpha\geq 0,\ \forall z\in\tilde{E})$

$x\in E_+ \Rightarrow \hat{p}(\alpha x)\leq|\alpha|\,\hat{p}(x) \quad (\forall\alpha\in\mathbb{C})$

iv) $x\in E_+ \Rightarrow \hat{p}(x)=p(x)$

v) $\hat{p}(-z)\vee\hat{p}(z)=0 \Leftrightarrow z=0$

vi) $\{z\in\tilde{E};\ \hat{p}(-z)=0\}=E_+$

(証明) i)～iv) は容易に確かめられる。

v). $\hat{p}(-z)\vee\hat{p}(z)=0$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対し，$a, b\in E_+$ が存在して，$a\geq\mathrm{Re}(e^{-i\theta}z)$，$b\geq\mathrm{Re}(e^{-i\theta}(-z))$ $(\forall\theta\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}])$

かつ $p(a) \leq \varepsilon$, $p(b) \leq \varepsilon$ が成りたつ。$z = x + iy$ とおくと $\theta = 0$ に対して上式成立より，$\tilde{p}(x) \leq p(a) \leq \varepsilon$, $\tilde{p}(-x) \leq p(b) \leq \varepsilon$ $\varepsilon > 0$ は任意より $\tilde{p}(x) = \tilde{p}(-x) = 0$. $\theta = \frac{\pi}{2}$ に対して同様にすると $\tilde{p}(y) = \tilde{p}(-y) = 0$。命題2より $x = y = 0$，よって $z = 0$ である. vi) も v) と同様にして証明できる. //

$\tilde{E}$ 上へ次のような2種類のノルムを導入する. 任意の $z \in \tilde{E}$ に対し,

$$\|z\|_1 = \tilde{p}(z) \vee \tilde{p}(-z)$$

$$\|z\|_2 = \inf\{p(a);\ a \in E_+,\ a \geq \mathrm{Re}(e^{-i\theta}z)\ (\forall\theta \in [0, 2\pi))\}$$

とおく。これらがノルムになることは明らかである. そしてこれらが同値であることも次の命題によりわかる。

<u>命題 8.</u> 任意の $z \in \tilde{E}$ に対し

$$\|z\|_1 \leq \|z\|_2 \leq 2\|z\|_1$$

が成りたつ。

E が順序ノルム空間で，E_+ が正規な純正錐で $E = E_+ - E_+$ のとき，半ノルムを命題5のようにして作ったものであれば，E がこのノルム $\|\cdot\|$ で完備ならば，上述の $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ は $\|\cdot\|$ と同値なノルムである (閉写像定理より)。しかし.

もともとのノルム $\|\cdot\|$ で完備でなくても，$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ に関して E は次の定理で示すように完備になる。

<u>定理 1</u>. (E_+, p) は p-閉，単調増加完備な半ノルム錐とする。このとき，$E = E_+ - E_+$ は上述の $\|\cdot\|_1$ 及び $\|\cdot\|_2$ に関して完備である。即ち $(E, \|\cdot\|_1)$ 及び $(E, \|\cdot\|_2)$ はバナッハ空間となる。

（証明） 任意の $z \in E$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $a \in E_+$ が存在して，$a \geqq z, -z$ かつ $\|z\|_2 + \varepsilon \geqq p(a)$ となる。これより，命題 6 から $(E, \|\cdot\|_2)$ はバナッハ空間となる。又 命題 8 より $\|\cdot\|_1$ と $\|\cdot\|_2$ は同値だから，$(E, \|\cdot\|_1)$ もバナッハ空間となる。 //

注意 前述の例 1 における E は，最初のノルムに関して完備でないが，この $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ に関しては完備である。

E 上のノルム $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ と §2 で述べた $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ との関係については，次の命題が成りたつ。

<u>命題 9</u>. E を順序ノルム空間で，E_+ は正規な純正

錐で $E=E_+-E_+$ とする。このとき，命題5のようにして作った半ノルム p により定義される $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ と§2で述べた $\|\cdot\|_p$，$\|\cdot\|_q$ との関係は，任意の $x\in E$ に対し

$$\|x\|_p \leqq \|x\|_1 \leqq \|x\|_2 \leqq \|x\|_q$$

が成りたつ。

§5、E_+ 上の正斉次加法的作用素について。

(E_+, p) は p-閉，単調増加完備な半ノルム錐とする。T を E_+ から E_+ の中への正斉次加法的作用素，即ち

$$T(x+y) = Tx + Ty \qquad (\forall x, y \in E_+)$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx \qquad (\forall \alpha \geqq 0,\ \forall x \in E_+)$$

をみたすものとする．このとき，T を $\hat{E}$ $(:=(E_+-E_+)+i(E_+-E_+))$ 上の線形作用素 $\hat{T}$ に一意に拡張できる．

T のスペクトルを考えるために，$\hat{E}$ 上の線形作用素の有界性を定義する．$L(\hat{E})$ を $\hat{E}$ から $\hat{E}$ への線形作用素の集合とする。$S\in L(\hat{E})$ に対し

$$\hat{p}(S) = \sup\{\hat{p}(Sx);\ x\in E_+,\ p(x)\leqq 1\}$$

と定義し，

$$\mathcal{L}(\hat{E}) = \{S\in L(\hat{E});\ \hat{p}(S)\vee\hat{p}(-S)<\infty\}$$

とする．このとき，次の命題が成りたつ．

命題 10. E_+ から E_+ への正斉次加法的作用素 T_1, T_2 に対し、次が成りたつ。

(i) $p(T_1 x) \leqq \hat{p}(T_1)\, p(x) \quad (\forall x \in E_+)$

(ii) $\hat{p}(T_1 T_2) \leqq \hat{p}(T_1)\, \hat{p}(T_2)$

又、作用素の順序に関し、次の定理をうる。

定理 2. $S \in L(\tilde{E})$ に対し、次は同値である。

i) $S E_+ \subset E_+$

ii) ある $c > 0$ が存在して、任意の $x \in E_+ \cup (-E_+)$ に対して、$\hat{p}(Sx) \leqq c\, \hat{p}(x)$ が成りたつ。

iii) ある $c > 0$ が存在して、任意の $z \in \tilde{E}$ に対して $\hat{p}(Sz) \leqq c\, \hat{p}(z)$ が成りたつ。

iv) $\tilde{E}_+ = E_+ + iE_+$ に対し、$S \tilde{E}_+ \subset \tilde{E}_+$

(証明) i) ⇒ ii) ; ii) をみたすような $c > 0$ が存在しないとすると、E_+ の点列 $\{x_n\}$ で $\hat{p}(Sx_n) \geqq n^3 p(x_n)$ かつ $p(x_n) = \frac{1}{n^2}$ をみたすものが存在する。E_+ が単調増加完備より $x \geqq \sum_{i=1}^{n} x_n$ $(\forall n \in N)$ なる $x \in E_+$ が存在するが $SE_+ \subset E_+$ より $\hat{p}(Sx) \geqq \hat{p}(Sx_n) \geqq n$ $(\forall n \in N)$ となり矛盾である。

ii) ⇒ iii) : 任意の $z \in \tilde{E}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$a \in E_+$ が存在し

$a \geqq \mathrm{Re}(e^{-i\theta}z)$ ($\forall\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) かつ $p(a) \leqq \hat{p}(z)+\varepsilon$ が成りたつ。ii)より $x \in E_+$ に対し $\hat{p}(-x)=0$ から $p(-Sx) \leqq c\,p(-x)=0$ となり，$Sx \in E_+$ が言えるので $SE_+ \subset E_+$ となる。よって，$a \geqq \mathrm{Re}(e^{-i\theta}z)$ より $Sa \geqq \mathrm{Re}(e^{-i\theta}Sz)$ となる。従って $\hat{p}(Sz) \leqq p(Sa)$ $\leqq c\,p(a) \leqq c(\hat{p}(z)+\varepsilon)$，$\varepsilon>0$ は任意より $\hat{p}(Sz) \leqq c\,\hat{p}(z)$

iii) ⇒ iv)：ii) ⇒ iii)の証明の中で示したように $x \in (-E_+)$ に対し，$\hat{p}(Sx) \leqq c\,\hat{p}(x)$ から $SE_+ \subset E_+$ となる。これより $S(E_+ + iE_+) = SE_+ + iSE_+ \subset E_+ + iE_+$ である。

iv) ⇒ i)：任意の $x \in E_+$ に対し $Tx \in \hat{E}_+$ は明らかより $Tx = u+iv$ とおくと，$u, v \in E_+$ である。又 $ix \in \hat{E}_+$ より $T(ix) = i(u+iv) = iu - v \in \hat{E}_+$ となり $u, -v \in E_+$ である。従って $v=0$ となり $Tx = u \in E_+$ となる。//

定理2の i) ~ iv) のいずれかをみたすとき，S は E 上の正作用素といい，$S \geqq 0$ とかく。

正作用素 T のスペクトルの研究はこれまでいろいろとなされている[4, Appendix]. スペクトル半径を $\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$ と関係づけるのではなく，$\lim_{n\to\infty}\hat{p}(T^n)^{1/n}$ と関係づける，あるいはスペクトルの性質を E_+ 上だけに限って考察することは，F. F. Bonsall [2] らによって既に研究されている，しかし，F. F. Bonsall はスペクトルを正の実軸上だけに限っ

ているので，ここではスペクトルを以下に述べるように，複素平面上で考える。又，F. F. Bonsall は E_+ がノルム完備という条件をつけて考察しているが，ここでは命題5に示すように，これより弱い条件のもとで考える。

ここで，Tの $\hat{p}$ によるスペクトルを次のように決める。$\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，$\lambda - \hat{T}$ が $\mathcal{L}(\hat{E})$ の中に逆元をもつとき，λ はレゾルベント集合 $\rho_{\hat{p}}(T)$ に入るという。この逆元を $R_{\hat{p}}(\lambda, T)$ と書く。$\rho_{\hat{p}}(T)$ の補集合 $(\mathbb{C} \setminus \rho_{\hat{p}}(T))$ をTのスペクトル $\sigma_{\hat{p}}(T)$ という。又，Tのスペクトル半径 $r_{\hat{p}}(T)$ を $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \hat{p}(T^n)^{1/n}$ によって定義する。このとき，次の命題が成りたつ。

<u>命題 11.</u> $|\lambda| > r_{\hat{p}}(T)$ ならば $\lambda \in \rho_{\hat{p}}(T)$ であり，$R_{\hat{p}}(\lambda, T) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}}$ である。（但し，右辺の収束は任意の $x \in E_+$ に対し $\hat{p}\left(\pm\left(R_{\hat{p}}(\lambda, T)x - \sum_{n=0}^{k} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} x\right)\right) \to 0\ (k \to \infty)$ を意味する。）

特に，$\lambda > r_{\hat{p}}(T)$ ならば $R_{\hat{p}}(\lambda, T) \geq 0$ である。

証明の準備に次の補題を示す。

<u>補題</u> E_+ の中の点列 $\{x_n\}$ と複素数列 $\{\alpha_n\}$ に対し $\sum_{n=1}^{\infty} \hat{p}(|\alpha_n| x_n) < \infty$ ならば，ある $z \in \hat{E}$ が存在して

$$\hat{p}\left(\pm\left(z-\sum_{n\geq 1}^{k}\alpha_n x_n\right)\right) \to 0 \quad (k\to\infty)$$

が成りたつ。

（補題の証明）　E_+ の点列 $\{x_n\}$ と複素数列 $\{\alpha_n\}$ に対し $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\hat{p}(|\alpha_n|x_n)<\infty$ とする。このとき，$\alpha_n=a_n+ib_n$ $(a_n, b_n\in\mathbb{R})$ とおくと，$\sum_{n\geq 1}^{\infty}\hat{p}(|a_n|x_n)<\infty$ かつ $\sum_{n\geq 1}^{\infty}\hat{p}(|b_n|x_n)<\infty$ である。E_+ は単調増加完備より，E_+ の元 u_1, u_2 が存在して

$$u_1 \geq \sum_{\substack{n\geq 1\\ a_n\geq 0}}^{k} a_n x_n \ ,\quad u_2 \geq \sum_{\substack{n\geq 1\\ a_n<0}}^{k}(-a_n)x_n \quad ({}^{\forall}k\in N) \qquad \text{かつ}$$

$$p\left(u_1-\sum_{\substack{n\geq 1\\ a_n\geq 0}}^{k}a_n x_n\right)\to 0 \quad p\left(u_2-\sum_{\substack{n\geq 1\\ a_n<0}}^{k}(-a_n)x_n\right)\to 0 \quad (k\to\infty) \quad \text{となり}$$

$\hat{p}\left(\pm\left((u_1-u_2)-\sum_{n\geq 1}^{k}a_n x_n\right)\right)\to 0$ $(k\to\infty)$ となる。同様にして $v_1, v_2\in E_+$ が存在して，$\hat{p}\left(\pm\left((v_1-v_2)-\sum_{n\geq 1}^{k}b_n x_n\right)\right)\to 0$ $(k\to\infty)$ となる。これより，$z=(u_1-u_2)+i(v_1-v_2)$ とおけば $\hat{p}\left(\pm\left(z-\sum_{n\geq 1}^{k}\alpha_n x_n\right)\right)\to 0$ $(k\to\infty)$ となる。 //

（命題 11 の証明）　$x\in E_+$，$|\lambda|>r_k(T)$ に対し，$\sum_{n\geq 0}^{\infty}\hat{p}\left(\frac{T^n}{|\lambda|^{n+1}}x\right)\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|\lambda|^{n+1}}\hat{p}(T^n)\,p(x)<\infty$ が 命題10 及び $r_k(T)$ の定義から言える。$T^n x\in E_+$ より補題から $y_x\in\tilde{E}$ が存在して　$\hat{p}\left(\pm\left(y_x-\sum_{n=0}^{k}\frac{T^n}{\lambda^{n+1}}x\right)\right)\to 0$ $(k\to\infty)$ $\cdots$ (*)

となる。ここで $Sx=y_x$ とおけば，S は E_+ から $\hat{E}$ への写像で，$\hat{E}$ 上の線形作用素に拡張できる。このとき (*) より

$\tilde{p}(S) \vee \tilde{p}(-S) < \infty$ となり，$(\lambda - T)S = S(\lambda - T) = I$ となるので，$\lambda \in \rho_R(T)$ かつ $S = R(\lambda, T)$ である。

又，(*)より $\lambda > 0$ かつ $x \in E_+$ なら $y_x \in E_+$ となり $R_R(\lambda, T)E_+ \subset E_+$ である。//

命題 12. $\lambda_0 \in \rho_R(T)$ かつ $R_R(\lambda_0, T) \geqq 0$ とする。このとき，$0 < |\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\tilde{p}(R_R(\lambda_0, T))}$ をみたす $\lambda \in \mathbb{C}$ について

$$\lambda \in \rho_R(T) \quad \text{かつ} \quad R_R(\lambda, T) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^{n+1}$$

が成りたつ。(右辺の収束は命題11と同じ意味である)

(証明) $x \in E_+$ に対し，命題10を用いて

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(|\lambda_0 - \lambda|^n R_R(\lambda_0, T)^{n+1} x) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_0 - \lambda|^n \tilde{p}(R_R(\lambda_0, T))^{n+1} p(x)$$

が成りたつから，λ に対する仮定より，これは収束する。従って補題より，ある $z_x \in \hat{E}$ が存在して，

$$\tilde{p}\left(\pm\left(z_x - \sum_{n=0}^{k} (\lambda_0 - \lambda)^n R_R(\lambda_0, T)^{n+1} x\right)\right) \to 0 \quad (k \to \infty)$$

が成りたつ。$T_\lambda x = z_x$ とおけば，T_λ は E_+ から $\hat{E}$ への写像で，$\hat{E}$ から $\hat{E}$ への線形作用素 $\tilde{T}_\lambda$ に一意に拡張できる。又

$$\tilde{p}\left(\pm \sum_{n=0}^{k} (\lambda_0 - \lambda)^n R_R(\lambda_0, T)^{n+1} x\right) \leqq \sum_{n=0}^{k} |\lambda_0 - \lambda|^n \tilde{p}(R_R(\lambda_0, T))^{n+1} p(x)$$

より，$\tilde{p}(\tilde{T}_\lambda) \vee \tilde{p}(-\tilde{T}_\lambda) < \infty$ となる。更に，任意の $x \in E_+$ に対し，$T_\lambda(\lambda - T)x = (\lambda - T)T_\lambda x = x$ となるので，$\lambda \in \rho_R(T)$

かつ $R_k(\lambda, T) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (\lambda_0-\lambda)^n R_k(\lambda_0, T)^{n+1}$ となる。//

更に、次の定理を得る.

<u>定理 3</u>　(E_+, p) は p-閉，単調増加完備な半ノルム錐とする。T を E_+ 上の正斉次加法的作用素とすると

$$r_k(T) \in \sigma_k(T)$$

である。

（証明）　$r_0 = r_k(T) \in \rho_k(T)$ と仮定すると，$R_k(r_0, T)$ が $\mathcal{L}(\hat{E})$ の中に存在する。即ち，$\hat{p}(R_k(r_0,T)) \vee \hat{p}(-R_k(r_0,T)) = c < \infty$ である。このとき，$0 < r - r_0 < \frac{1}{2c}$ なる r に対し，$R_k(r,T) \geqq 0$ で，$x \in E_+$ とすると，

$$\begin{aligned}
\hat{p}(R_k(r,T)x) &\leqq \hat{p}(R_k(r,T)x - R_k(r_0,T)x) + \hat{p}(R_k(r_0,T)x) \\
&= (r-r_0)\hat{p}(-R_k(r_0,T)R_k(r,T)x) + \hat{p}(R_k(r_0,T)x) \\
&\leqq c(r-r_0)\hat{p}(R_k(r,T)x) + c\cdot p(x) \\
&\leqq \frac{1}{2}\hat{p}(R_k(r,T)x) + c\cdot p(x)
\end{aligned}$$

となり，これより　$\hat{p}(R_k(r,T)x) \leqq 2c\cdot p(x)$　となり，$\hat{p}((R_k(r_0,T) - R_k(r,T))x) \longrightarrow 0 \quad (r \downarrow r_0)$ である。従って $\hat{p}(R_k(r_0,T)(-x)) \leqq 2c(r-r_0)p(x)$ となり，$\hat{p}(R_k(r_0,T)(-x)) = 0$ 即ち $R_k(r_0,T) \geqq 0$ となる。

ここで，$0 < r_0 - \mu < \frac{1}{c}$ に対し，命題12より

$\mu \in \rho_k(T)$ かつ $R_k(\mu, T) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} (r_0-\mu)^n R_k(r_0, T)^{n+1} \geqq 0$

となる．又，任意の $x \in E_+$ に対し，$y = R_k(\mu, T)x$ とおくと

$y \in E_+$ である．このとき，$\hat{p}(R_k(\mu, T)) = c_1$ とおくと，

$(\mu - T)y = x$ より $y = \frac{1}{\mu}x + \frac{1}{\mu}Ty = \frac{1}{\mu}x + \frac{1}{\mu}T(\frac{1}{\mu}x + \frac{1}{\mu}Ty) =$

$\cdots\cdots = \sum_{n=1}^{k} \frac{T^{n-1}}{\mu^n}x + \frac{T^k}{\mu^k}y$ となる．

各成分が E_+ の元より

$$\hat{p}\left(\frac{T^{n-1}}{\mu^n}x\right) \leqq p(y) = p(R_k(\mu, T)x) \leqq c_1 \cdot p(x)$$

となり，$\hat{p}(T^{n-1}) \leqq c_1 \mu^n$ となる．従って $r_k(T) \leqq \mu$

となり矛盾である．よって $r_k(T) \in \sigma_k(T)$ である．//

これまで，半ノルムによるスペクトルを論じたが，ノルム空間上のスペクトルとの関係について調べる。Tをノルム空間上の線形作用素とし，$r(T)$，$\sigma(T)$をノルム空間上のスペクトル半径及びスペクトル [7; VIII, 2] とすると，定義から

$$r_k(T) \leqq r(T)$$
$$\sigma_k(T) \subset \sigma(T)$$

は明らかである．一般にこれらは必ずしも一致しない．
以下にその例を示す。

<u>例2</u>．$E = \{ a = (a_n) \in l_1 \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \}$ とおき，

Eの元 a のノルムを $\|a\| = \sup_{n\geq 1} |a_n|$ によって定義する.
$E_+ = \{a \in E;\ a_n \geq 0\ (\forall n \geq 2)\}$ とおくと, Eは順序ノルム空間で, E_+ は正規, 純正錐で $E = E_+ - E_+$ である.
E上の作用素Tを $a \in E$ に対し

$$(Ta)_n = \begin{cases} a_{2m} + a_{2m-2} & (n = 2m,\quad m \geq 1) \\ a_n & (n = 2m+1 \quad m \geq 0) \end{cases}$$

によって定義すると, TはE上の連続線形作用素で, $TE_+ \subset E_+$ である. このとき, $r(T) = 2$ である. ところが, $a \in E$ に対し, $p(a) = (\sup_{n\geq 2} a_n) \vee 0 \vee (-a_1)$ によってE上の半ノルムを定義すると, $a \in E_+$ に対しては $p(a) = \|a\|$ である. このとき $r_h(T) = 1$ であり, $r_h(T) < r(T)$ となる. 又, $2 \in \sigma(T)$ であるが, $2 > r_h(T)$ より $2 \notin \sigma_h(T)$ で $\sigma_h(T) \subsetneq \sigma(T)$ である.

次にTが順序ノルム空間上の非有界な正作用素であっても, 半ノルムによれば有界な作用素になる場合の例を示す。

<u>例3.</u> Eは例1と同じ空間とし, $f \in E$ に対し

$$Tf(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{d^2}{dx^2} f(-x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(0)$$

とおくと，TはEからEの中への線形作用素であり，$TE_+ \subset E_+$ である。このとき，$\|T\| = \sup\{\|Tf\| ; \|f\| \leqq 1\} = \infty$ となりかつ $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \infty$ となる。ところが，$f \in E_+$ に対し，$p(f) = \|f\|$ によって E_+ 上に半ノルムを定義すると，$p(T) = 2$ かつ $r_h(T) = 2$ となる。

以上の例が示すように，最初に入っていたノルムと半ノルムによるスペクトルは必ずしも一致しない。しかし，半ノルムと一致するようにノルムを導入しなおすことはできる。半ノルムと作用素ノルムとの関係として，$S \in L(\hat{E})$ に対し，$\|S\|_1 = \sup\{\|Sz\|_1 ; \|z\|_1 \leqq 1, z \in E\}$ とおくと，次の命題が成りたつ。

<u>命題 13.</u> $S \in L(\hat{E})$ に対し，

$$\frac{1}{3}\|S\|_1 \leqq \hat{p}(S) \vee \hat{p}(-S) \leqq \|S\|_1$$

が成りたつ。

(証明) 任意の $z \in E$ に対し，$\|Sz\|_1 \leqq \|S\|_1 \|z\|_1$ が成りたつ。$x \in E_+$ に対し，$p(x) = \|x\|_1$ より

$$\hat{p}(Sx) \vee \hat{p}(-Sx) = \|Sx\|_1 \leqq \|S\|_1\, p(x)$$

となり，$\hat{p}(S) \vee \hat{p}(-S) \leqq \|S\|_1$ が成りたつ

次に $\hat{p}(S) \vee \hat{p}(-S) = c$ とおく。任意の $z \in E$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，E_+ の元 a が存在して，$a \geqq z$ かつ $p(a) \leqq \hat{p}(z) + \varepsilon$ が成りたつ。このとき $a - z \in E_+$ かつ $p(a) + p(a-z) \leqq 2p(a) + \hat{p}(-z) \leqq 3\|z\|_1 + 2\varepsilon$ である。これより $\|Sz\|_1 \leqq \|Sa\|_1 + \|S(a-z)\|_1 \leqq c(p(a) + p(a-z)) \leqq c(3\|z\|_1 + 2\varepsilon)$ となり，$\varepsilon > 0$ は任意より $\|S\|_1 \leqq 3c$ を得る。//

定理1から $(E, \|\ \|_1)$ はバナッハ空間である。上の命題13を使うと，T を $(E, \|\ \|_1)$ 上の作用素としての $r(T)$, $\sigma(T)$ を考えると，$r_{\pi}(T)$, $\sigma_{\pi}(T)$ と等しくなることがわかる。従ってバナッハ空間上のスペクトル理論を使っても定理3の結果が得られる。更に次の結果も得られる。

<u>命題14</u>　(E_+, p) と T は定理3と同じ条件を満たすとする。このとき $\rho_{\pi}(T)$ は開集合である。

REFERENCES

[1] W. Arendt, P. R. Chernoff and T. Kato, A generalization of dissipativity and positive semigroups, J. operator theory, 8 (1982), 167 - 180.

[2] F. F. Bonsall, Linear operators in complete positive cones, Proc. London Math. Soc., 8 (1958), 53 - 75.

[3] M. Krein and S. Grosberg, Sur la decomposition des fonctionelles on composantes positives, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.) 25 (1939), 723 - 726.

[4] D. W. Robinson and S. Yamamuro, The canonical half norm, dual half norms and monotonic norms, Tohoku Math. J., (to appear).

[5] H. H. Schaefer, Topological vector spaces, Macmillan, New York, 1966.

[6] S. Yamamuro, On linear operators on ordered Banach spaces, Bull. Austral. Math. Soc., 27 (1983), 285 - 305.

[7] K. Yosida, Functional analysis, Springer-Verlag, 1974.