数理解析研究所講究録
第544巻 1985年 106-125

放物型偏微分方程式における強比較定理

広島大理　俣野 博 (Hiroshi Matano)

§1. 序

Aを2階の一様楕円型線型偏微分作用素とすると、通常の境界条件下でこれが生成する半群$\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$の各元e^{tA}が、positive operatorになることはよく知られている。これは見方を変えれば、放物型方程式(初期値問題)

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au & (t>0) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

が初期値の順序関係を保存するということにほかならない。すなわち、$\varphi \geqq \psi$であれば$e^{tA}\varphi \geqq e^{tA}\psi$ $(t \geqq 0)$が成り立つ。ここで、$\varphi \geqq \psi$とは、$\varphi(x) \geqq \psi(x)$ $(\forall x)$のこととする。

同様の性質はもっと一般の半線型方程式に対しても成立する。簡単な例として、応用上重要な次の半線型拡散方程式を考えてみよう。

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u) & (x \in \Omega,\ t > 0) \\ u(x,0) = u_0(x) & (x \in \Omega) \\ u = 0 & (x \in \partial\Omega,\ t > 0) \end{cases}
$$

ここで Ω は $\mathbb{R}^n$ 内の有界領域、$f \in C^1(\mathbb{R})$、$\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial x_n^2$ とする。初期値 $u_0 = \varphi$ に対する (1) の解を $u(x,t;\varphi)$ とおいて、対応 $\varphi \mapsto u(\cdot,t;\varphi)$ によって定まる写像を Φ_t と書くことにすると、$\Phi = \{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ は空間 $X = C_0(\bar{\Omega})$ 上の *local semiflow*（定義については §2 参照）となる。これを (1) の定める *local semiflow* と呼ぶことにする。このとき、

$$
(2) \qquad \varphi \geq \psi \quad \Rightarrow \quad \Phi_t \varphi \geq \Phi_t \psi \quad (t \geq 0)
$$

が成立することが最大値原理を用いて証明できる。性質 (2) は放物型方程式における比較定理として古くから知られていて、(1) の解の漸近挙動や平衡解の安定性を議論するのに役立ってきた。

しかしながら、比較定理だけを武器に (1) の解の挙動を論じてみても、深い結果は殆ど得られない。これだけでは、一般論を展開するには弱すぎるのである。そこで、偏微分方程式の研究者が方程式 (1) の定性的解析を行なう場合、リヤプノフ関数を構成したり、非線型項 $f(u)$ の凸性や解析性を仮定したりして議論を進めるのが通常で、性質 (2) は、あくまで

補助的な解析手段として用いられるにとどまっていた。こうした事情から、性質(2)を有する力学系の一般論を展開しても実り多い結果を期待することはできないとする見方が支配的で、そうした試みは殆ど顧みられることがなかった。

ところが最近になって、性質(2)(order-preserving)をやや強めた性質(strongly order-preserving;§2参照)をもつ力学系について強力な一般論が展開でき、この性質とコンパクト性の仮定だけからさまざまな深い結果が導き出せることがHirsch [1] と筆者の仕事[2]によって次第に明らかにされ始めた。こうした一般論を用いて、リヤプノフ関数が構成できない方程式(例えば後述の(7),(8)など)の解の漸近挙動に関しても大域的な視点から深い解析のメスを入れることが可能となった。

本稿では、Hirschと筆者による強順序保存(strongly order-preserving) *local semiflow* の理論を紹介し、かつその二、三の応用について触れたい。

§2. Strongly Order-Preserving Local Semiflow の定義

まず、local semiflowの定義から始めよう。位相空間Xが与えられているとする。

定義 2.1

$X \times [0, \infty)$内の開集合 Dom(Φ) 上で定義された連続写像 Φ: Dom(Φ) $\to X$ が以下の条件を満たすとき、ΦをX上の local semiflow と呼ぶ。

(a) 各 $t \geqq 0$ に対して $\mathrm{Dom}(\Phi_t) \equiv \{x \in X \mid (x,t) \in \mathrm{Dom}(\Phi)\}$ と定めると、Dom(Φ_t)はtに関して単調非増大、かつ $\mathrm{Dom}(\Phi_0) = X$。

(b) 写像 $\Phi_t : \mathrm{Dom}(\Phi_t) \to X$ を $\Phi_t(x) \equiv \Phi(x, t)$ によって定めると、$\Phi_0(x) = x \ (^\forall x \in X)$.

(c) 任意の $t \geqq 0$, $t' \geqq 0$ に対し、$\Phi_{t'}^{-1}(\mathrm{Dom}(\Phi_t)) = \mathrm{Dom}(\Phi_{t+t'})$ かつ、$\Phi_{t+t'} = \Phi_t \circ \Phi_{t'}$.

今後、Xがとくに順序づけられた距離空間である場合を考え、その距離をd、順序関係を$\geqslant$で表わす。この順序関係は極限移行に関して閉じているものとする。すなわち、$x_m \geqslant y_m$ $(m=1,2,\cdots)$ かつ $x_m \to x_\infty \ (m \to \infty)$, $y_m \to y_\infty \ (m \to \infty)$ のとき常に $x_\infty \geqslant y_\infty$ が成り立つものとする。

定義 2.2

順序距離空間X上の local semiflow Φ が order-preserving (以後 O-P と略す) であるとは、$x \geqslant y$ なる任意の $x, y \in X$ に対し、$\Phi_t(x) \geqslant \Phi_t(y)$ がすべての $t \in [0, S_0)$ に

対して成立することをいう。ここで、$S_0 \equiv \min\{S(x), S(y)\}$.
また、

(3) $$S(x) \underset{def}{=} \sup\{t \geqq 0 \mid x \in Dom(\Phi_t)\}.$$

<u>定義 2.3</u>

順序距離空間 X 上の *local semiflow* Φ が <u>strongly order-preserving</u> (以後 S-O-P と略す) であるとは、$x > y$ (すなわち $x \geqslant y$, $x \neq y$) なる任意の $x, y \in X$ および任意の $t \in (0, \min\{S(x), S(y)\})$ に対し、$\delta > 0$ を十分小さく選んで

(4) $$\Phi_t(B_\delta(x)) > \Phi_t(B_\delta(y))$$

が成り立つようにできることをいう。ここで、$B_\delta(x)$, $B_\delta(y)$ は、それぞれ x, y を中心とする半径 δ の開球を表す。

<u>注. 2.4</u>

上式 (4) において、集合 A, B が $A > B$ なる関係にあるとは、$z_1 > z_2$ ($^\forall z_1 \in A$, $^\forall z_2 \in B$) が成り立つことを指す。

<u>注. 2.5</u>

Hirsch [1] は、我々の S-O-P の定義とは若干異なる定義を採用している。$P_+(x) \equiv \{z \in X \mid z \geqslant x\}$, $P_-(x) \equiv \{z \in X \mid z \leqslant x\}$ とおくと、定義から、$x \geqslant y \Leftrightarrow x \in P_+(y) \Leftrightarrow y \in P_-(x)$

となる。ここで、とくに $x \in \mathrm{Int}(P_+(y))$ かつ $y \in \mathrm{Int}(P_-(x))$ （Int は開核を表す）のときに $x \gg y$ と書くことにしよう。Hirsch は、

(5) $\quad x > y \Rightarrow \Phi_t(x) \gg \Phi_t(y) \quad (\forall t \in (0, \min\{s(x), s(y)\}))$

が常に成り立つような local semiflow を strongly monotone と呼んだ。Strongly monotone であれば、S-O-P であることは、Φ の連続性からただちに従う。逆に S-O-P からは必ずしも strongly monotone なる性質は従わない。（例えば、$L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ に通常の順序構造を入れると、P_+, P_- はいずれも内点を持たないから、$\varphi \gg \psi$ なる関係をもつ φ, ψ の組は存在しない。）従って、Hirsch は本稿の取り扱う S-O-P よりも狭いクラスの力学系を取り扱っているわけだが、彼の得た結果は、すべてそのまま S-O-P のクラスでも成立する。

以下、O-P あるいは S-O-P なる local semiflow の例を幾つか揭げる。

例 2.6

初期境界値問題 (1) の定める local semiflow は S-O-P である。ただし Ω は有界領域で境界は滑らかとする。実際、$\varphi \geq \psi$, $\varphi \neq \psi$ なる任意の $\varphi, \psi \in C_0(\overline{\Omega})$ に対し、

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&u(x,t;\varphi) > u(x,t;\psi) && (\forall x \in \Omega)\\
&\frac{\partial}{\partial n}u(x,t;\varphi) < \frac{\partial}{\partial n}u(x,t;\psi) && (\forall x \in \partial\Omega)
\end{aligned}
$$

が各 $t \in (0, \min\{s(\varphi), s(\psi)\})$ に対して成立することが強最大値原理から導かれる（$\partial/\partial n$ は外向き法線微分）。このことと、初期値に対する解の連続依存性（詳しくは、各 $t>0$ を固定するごとに、$\varphi_m \to \varphi$ in $C_0(\bar{\Omega}) \Rightarrow u(\cdot,t;\varphi_m) \to u(\cdot,t;\varphi)$ in $C^1(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$ なること）を用いて、(1) の定める local semiflow が S-O-P であることを証明できる。

例 2.7

(1) を一般化した次の半線型２階放物型方程式も S-O-P local semiflow を定める。

$$
(7)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, u + f(x,u) \quad \begin{pmatrix} x\in\Omega \\ t>0 \end{pmatrix}
$$

ここで Ω は例 2.6 と同様とし、境界条件は第１種（$u=0$ for $\forall x \in \partial\Omega, \forall t>0$）あるいは第２〜３種（$\partial u/\partial\nu + \sigma(x)u = 0$ for $\forall x \in \partial\Omega, \forall t>0$ ただし $\partial/\partial\nu$ は外向き境界微分で $\sigma \geq 0$）とする。後者の境界条件の場合、底空間は $C(\bar{\Omega})$ となり、S-O-P であることの証明には (6) の代わりに

$$
u(x,t;\varphi) > u(x,t;\psi) \qquad (\forall x \in \bar{\Omega})
$$

なる事実を用いる。

例 2.8

連立の半線型拡散方程式系

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + f(x, u, v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + g(x, u, v) \end{cases} \qquad (d_1, d_2 \text{ は正定数})$$

において、非線型項 f, g が $\partial f/\partial v < 0$, $\partial g/\partial u < 0$ を満たすとき、(8) を競合型反応拡散方程式系と呼ぶ。競合型反応拡散方程式系も S-O-P となる。ただし境界条件は例2.7と同様第1〜第3種であり、底空間は、第1種境界条件の場合 $C_0(\bar{\Omega}) \times C_0(\bar{\Omega})$、第2〜3種の場合 $C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$ とする。また、底空間における順序構造は次のように定める。

$$(9) \qquad \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \underset{def}{\Longleftrightarrow} \bar{u} \geqq u, \ \bar{v} \leqq v.$$

例 2.9

空間 $L^2(\mathbb{R})$ 上の flow $\Phi = \{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を

$$[\Phi_t u](x) = u(x+t) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

によって定めると、Φ は O-P であるが S-O-P ではない。

例 2.10

上と類似の例として、線型1階双曲型方程式

$$\partial u/\partial t = a_1(x) \partial u/\partial x_1 + \cdots + a_n(x) \partial u/\partial x_n$$

を考える。容易にわかるように、この方程式の定める flow は O-P であるが、底空間に離散位相が導入されている場合を除けば、一般に S-O-P にはならない。

§3. 主定理

Xは前節と同様、順序距離空間とし、Φ をX上の local semiflow とする。

定義3.1

Φ がコンパクトであるとは、Xの任意の有界集合Bに対し、

$$s_B \equiv \inf_{x \in B} s(x) > 0$$

かつ、任意の $t \in (0, s_B)$ に対し $\Phi_t(B)$ が相対コンパクトになることをいう。（$s(x)$ の定義については(3)を見よ。）

以下、次の仮定をおく。

(H.1) Φ は S-O-P。

(H.2) Φ はコンパクト。

(H.3) 任意の $x \in X$ に対し、減少列 $y_1 > y_2 > \cdots$ および増大列 $z_1 < z_2 < \cdots$ で $y_m \to x$, $z_m \to x$ $(m \to \infty)$ となるものを見出すことができる。

(H.4) $x \geqslant y$ なる任意の $x, y \in X$ に対し、$[x, y] \equiv \{z \in X \mid x \geqslant z \geqslant y\}$ は有界集合である。

定義3.2

$x \in X$ に対し、x を始点とする半軌道を、$O^+(x) = \{\Phi_t(x) \mid 0 \leq t < s(x)\}$ によって定義する。

定義 3.3

$x \in X$ が平衡点であるとは、$O^+(x) = \{x\}$ となることをいう。容易にわかるように、

$$x \text{ が平衡点} \Leftrightarrow S(x) = \infty \text{ かつ } \Phi_t(x) = x \quad (\forall t \geqq 0)$$
$$\Leftrightarrow \exists t_0 > 0 \text{ such that } \Phi_t(x) = x \quad (\forall t \in [0, t_0])$$

平衡点全体の集合を E で表わす。

定義 3.4

$x \in X$ の ω 極限集合 $\omega(x)$ を次式で定義する。

$$(10) \qquad \omega(x) \equiv \bigcap_{t \geqq 0} \overline{O^+(\Phi_t(x))} .$$

定義 3.5

X の部分集合 Y が正の向きに不変であるとは、$\Phi_t(Y) \subset Y$ $(\forall t \geqq 0)$ が成立することをいう。（正確には、$\forall y \in Y$ に対し $\Phi_t(y) \in Y$ $(\forall t \in [0, S(y)))$ が成立することをいう。）Y が不変であるとは、$\Phi_t(Y) = Y$ $(\forall t \geqq 0)$ が成立することをいう。

注. 3.6

容易にわかるように、Y が不変であれば、任意の $y \in Y$ に対し $S(y) = \infty$ となる。

命題 3.7

仮定 (H.2) のもとで、$O^+(x)$ が有界ならば、$\omega(x)$ は空でないコンパクトな連結集合になる。しかも $\omega(x)$ は不変集合である。

上の命題は一般の力学系の理論においてよく知られた命題であるので証明は省略する。

定義 3.8

平衡点$\bar{x}$が安定であるとは、$\bar{x}$の任意の近傍Uに対し、適当な近傍$V \ni \bar{x}$が存在して、$S(y)=\infty$ (for $\forall y \in V$) かつ、

$$\Phi_t(V) \subset U \quad (\text{for } \forall t \geqq 0)$$

が成立することをいう。

定義 3.9

正の向きに不変な閉集合Yが集合として安定であるとは、Yの任意の近傍Uに対し、定義3.8で述べた条件を満たす開集合$V \supset Y$が存在することをいう。

定義 3.10

$\bar{x}$を平衡点とする。$\bar{x}$の不安定集合 $W^u(\bar{x})$ を次のように定める。

$$W^u(\bar{x}) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} w \in C((-\infty,0];X) \text{ で } \Phi_{t'}(w(t)) = w(t+t') \\ (\text{for } \forall t \leqq 0,\ \forall t' \in [0,-t]) \text{ かつ} \\ w(0) = x,\ \lim_{t\to-\infty} w(t) = \bar{x} \text{ なるものが} \\ \text{存在} \end{array} \right\}.$$

注 3.11

任意の平衡点$\bar{x}$に対し、$\bar{x} \in W^u(\bar{x})$ となるのは明らか(wとして、$w(t) \equiv \bar{x}$とすればよい)。$W^u(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$ のとき、$\bar{x}$

は自明な不安定集合をもつという。容易にわかるように、$\bar{x}$が安定な平衡点であれば、$W^u(\bar{x})=\{\bar{x}\}$。しかしこの逆は一般には正しくない。すなわち、一般の力学系においては、不安定な平衡点が自明な不安定集合しかもたないこともありうる。例えば2次元力学系における次の例を見よう。

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

この例においては、x軸上の各点は不安定平衡点であるが、それぞれ自明な不安定集合をもつ。

さて、以下に本稿の主定理を掲げる。

定理1. (Hirsch [1] ; almost quasi-convergence theorem)

(H.1), (H.2) を仮定する。AをXの任意の全順序部分集合とし、各$x \in A$に対して$O^+(x)$が有界であるとする。このとき、Aの高々可算な部分集合A_0が存在して

$$\omega(x) \subset E \qquad (\text{for } \forall x \in A \setminus A_0)$$

が成立する。

定理2. (Matano [2])

(H.1), (H.2) を仮定する。$\bar{x}$を任意の不安定平衡点とするとき、$W^u(\bar{x}) \neq \{\bar{x}\}$.

<u>定理3</u>（Matano [2]）

Xをとくに順序バナッハ空間とし、(H.1)、(H.2)、(H.4) を仮定する（(H.3) は自動的に満たされている）。$x_1 < x_2$ を2つの平衡点とし、$x_1 < \bar{x} < x_2$ を満たす平衡点 $\bar{x}$ は存在しないとする。このとき、次の性質をもつ $w \in C(\mathbb{R}; X)$ が存在する。

- $\Phi_{t'}(w(t)) = w(t+t') \quad (\forall t \in \mathbb{R},\ \forall t' \geqq 0)$
- $x_1 < w(t) < x_2 \quad (\forall t \in \mathbb{R})$
- $\lim_{t\to\infty} w(t) = x_2,\ \lim_{t\to-\infty} w(t) = x_1$

  又は $\lim_{t\to-\infty} w(t) = x_2,\ \lim_{t\to\infty} w(t) = x_1$

<u>注3.12</u>

定理3は、x_1 と x_2 を結ぶ entire orbit が存在することを意味している。このような軌道を connecting orbit と呼ぶことがある。相異なる平衡点の間に、connecting orbit が存在するかどうかを調べることは、力学系の構造を知る上で重要な手がかりとなる。

<u>定理4</u>（Matano [2], Hirsch-Matano [3]）

Yは X 内の有界開集合で正の向きに不変であるとする。もしYが集合として安定であれば、Yの中に安定平衡点が少くとも1つ存在する。ここで (H.1)～(H.3) を仮定した。

系 5 (Hirsch [1])

(H.1), (H.2), (H.3) を仮定する。このとき、任意の周期軌道は軌道安定でない(すなわち集合として安定でない)。

注 3.13

系5は定理4から直ちに従うが、定理1から導くこともできる。Hirsch は後者の方法によって系5を証明した。

注 3.14

方程式 (1) の場合にはリヤプノフ関数が構成できるから、任意の $x \in X$ に対し $\omega(x) \subset E$ となる。もっと一般に、(7) において線型部分が形式的自己共役の場合も同様である。これらの場合には、定理1は何らの御利益も持たない。しかしながら、リヤプノフ関数が構成できないような方程式を取り扱う場合には、定理1および系5は極めて有用である。例えば、$\mathbb{R}^2$ 内の単位円 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ 上で次の方程式を考えてみよう。

(12) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} + k u(1-u^2)$$

ただし境界条件は第1種 ($u=0$) とする。ここで定数 k を、$k>\lambda_2$ (λ_2 は $-\Delta$ の第2固有値) なるように選ぶと、(12) が周期解をもつことが証明できる。上述の系5より、この周期解は不安定である。この例の場合には周期解の不安定性は線型化方程式のスペクトルを調べるという古典的な手法によ

っても示すことができるが、もっと一般の場合（例えばDが円のような簡単な形状を有していない場合）には、このような古典的解析手法の適用は困難になる。系5は、こうした状況において真価を発揮する。

文献[4]では、定理4を用いて競合型反応拡散方程式系(8)の空間非一様平衡解の存在を議論している。本節に掲げた諸定理の応用は、この他にもさまざまなものが考えられよう。

§4. 定理の証明

前節の諸定理に逐一証明を付すことは紙数の制約上できないので、本節では定理1の証明に必要な幾つかの補題を掲げて部分的な解説を試ることにする。定理2～4の証明については文献[2]を参照されたい。

補題4.1 (Hirsch ; Limit set dichotomy theorem)

(H.1), (H.2)を仮定する。$x > y$ を X 内の2点とし、$O^+(x)$ $O^+(y)$ ともに有界とする。このとき、次のいずれか一方が成立する。

a) $\omega(x) > \omega(y)$

b) $\omega(x) = \omega(y) \subset E$

補題4.2

xをX内の点とし、正数t_1, t_2 $(0<t_1<t_2)$が存在して$\Phi_{t_1}(x)<\Phi_{t_2}(x)$ (又は$\Phi_{t_1}(x)>\Phi_{t_2}(x)$)が成り立つとする。さらに$O^+(x)$は有界とする。このとき、$\Phi_t(x)$は$t\to\infty$のとき、ある平衡点に収束する。

補題4.2は補題4.1の証明に用いられる。補題4.1の証明にはかなりの紙数を要するので、ここでは補題4.1を認めた上で定理1を証明する。

定理1の証明

$$A_0=\{x\in A \mid \omega(x)\not\subset E\}$$

とおく。A_0が高々可算であることを示せばよい。各$x\in A_0$に対し、$\omega(x)$の中から 衡点でない点を適当に選んで、それを$z(x)$とおく。補題4.1より、$x_1>x_2$ なら $z(x_1)>z(x_2)$。

$$B_0=\{z(x) \mid x\in A_0\}$$

とおく。$z: A_0\to B_0$は1対1の写像であり、A_0が全順序集合であるからB_0も全順序集合である。

次にB_0が離散集合であること、すなわち任意の$z\in B_0$に対して $d(z, B_0\setminus\{z\})>0$ が成り立つことを示す。そこで、もし $z(x_n)\to z(x)$ $(n\to\infty)$, $x_n\neq x$ $(n=1,2,\cdots)$ なる $x, x_1, x_2, \cdots\in A_0$が存在したとしよう。$x_n>x$ $(n=1,2,\cdots)$ として

一般性を失わない。補題4.1より $\omega(x_n) > \omega(x)$，これとω極限集合の不変性から、

$$\Phi_t(z(x_n)) > z(x), \quad z(x_n) > \Phi_t(z(x))$$

が $^\forall t \geqq 0$ に対して成立する。ここで各 $t \geqq 0$ を固定して $n \to \infty$ とすれば、$\Phi_t(z(x)) \geqslant z(x) \geqslant \Phi_t(z(x))$ (for $^\forall t \geqq 0$).

すなわち、$\Phi_t(z(x)) = z(x)$ (for $^\forall t \geqq 0$)。これは $z(x)$ が平衡点であることを意味しており、$z(x) \in B_0$ に矛盾する。よってB₀が離散集合であることが示された。

$$B = \bigcup_{x \in A} \omega(x)$$

とおくと、Bは不変集合、すなわち $^\forall t > 0$ に対し $\Phi_t(B) = B$。このことと Φのコンパクト性から、Bは高々可算個の相対コンパクトな集合の和集合になることがわかる。$B_0 \subset B$ であるから、同様に $B_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ なる相対コンパクト集合 $C_1, C_2, \cdots$ が存在する。各 C_k は相対コンパクトな離散集合でXは距離空間であるから、これは高々可算集合である。よって B_0 も高々可算である。A_0 と B_0 は同値な集合だから、A_0 も高々可算、よって定理1が証明 れた。　　　　　　(証終)

§5. S-O-Pクラスの拡張

O-PであるがS-O-Pではないような重要な方程式が幾

つかある。そのような方程式の例のひとつとして、多孔質媒質中の拡散現象を記述する porus media 方程式がある。これは、空間1次元の場合には次の形に書かれる。

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(u^m) & (x \in \mathbb{R},\ t > 0) \qquad (m > 1) \\ u(x,0) = u_0(x) \geqq 0 & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

初期値 $u_0 = \varphi$ に対する (13) の解を $u(x,t;\varphi)$ と書くことにすると、$\mathrm{supp}(\varphi)$ がコンパクトなら任意の $t \geqq 0$ に対し $\mathrm{supp}(u(\cdot,t;\varphi))$ がコンパクトになることが知られている。$X = C_0^+(\mathbb{R})$、すなわち $\mathbb{R}$ 上で定義されたコンパクトな台をもつ非負値連続関数全体の空間とすると、(13) は X 上に semiflow を定める。これを亜とおく。ここで、X には次のような位相 (距離) が導入されているものとする。

$$(14)\qquad d(u,v) = \|u - v\| + \rho(\mathrm{supp}(u), \mathrm{supp}(v))$$

ただし $\|\cdot\|$ は通常の maximum norm、また、

$$\rho(A,B) = \max\left\{ \max_{x \in A} \mathrm{dist}(x,B),\ \max_{x \in B} \mathrm{dist}(x,A) \right\}$$

(dist は通常のユークリッド距離) とする。X は (14) で定められた距離に関して完備な距離空間となる。

亜が O-P になることはよく知られているが、S-O-P にならないことを確かめるのも困難ではない。しかしながら、S-O-P をやや緩めた次の性質を亜は有している。

定理5.1（Crandall－Matano［5］）

$X=C_0^+(\mathbb{R})$とし、Φを(13)の定めるsemiflowとする。$\varphi>\psi$なる任意の$\varphi,\psi\in X$に対し、$t^*>0$，$\delta>0$が存在して、

$$\Phi_{t^*}(B_\delta(\varphi))>\Phi_{t^*}(B_\delta(\psi)) \tag{15}$$

が成立する。ここで、$B_\delta(\varphi)$はφを中心とする半径δの開球を表わす。

上述のΦの性質はS-O-Pよりは弱い。O-Pであって、(15)を満たすようなlocal semiflowを、"待ち時間のあるS-O-P"と呼ぶことにしよう。これに関し、次の定理が成立する。

定理5.2.

条件（H.1）を待ち時間のあるS-O-Pで置き換えても、§3の定理1～4および系5はそのまま成立する。

実は(13)の定める力学系は比較的簡単な構造をしているので、定理5.2によって得られるものは小さいが、(13)をもっと一般化した次の形の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^m)+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,u) \tag{16}$$

も、$\partial f/\partial u(x,0) \geqq 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) なる条件のもとで、$X = C_0^+(\mathbb{R})$ 上に待ち時間のある S-O-P local semiflow を定める。この方程式の挙動については古典的手法を用いては深い結果は知られていないので、定理5.2が威力を発揮する。

参考文献

[1] M.W. Hirsch ; to appear in SIAM J. Math. Anal.

[2] H. Matano ; J. Fac. Sci Univ. Tokyo Sec. IA 30 (1984)

[4] H. Matano and M. Mimura ; Publ Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 18 (1983).

[3] M.W. Hirsch and H. Matano ; in preparation.

[5] M.G. Crandall and H. Matano ; in preparation.