数理解析研究所講究録
第 544 巻 1985 年 132-144

Hardy-Littlewood-Pólya の spectral orders について

信大工 酒井雄二 (Yūji Sakai)

1. まえがき　Hardy-Littlewood-Pólya の spectral orders と呼ばれる preorders について我々の最近の結果をも含めて概説する。

$\mathbb{R}^n$ におけるこの preorders の定式化は簡明である。但し, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し $\{x_i: i = 1, \ldots, n\} = \{x_i^*: i = 1, \ldots, n\}$ かつ $x_1^* \geqq x_2^* \geqq \cdots \geqq x_n^*$ とし, $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ とおく。そして次の定義を与える。

定義. $x, y \in \mathbb{R}^n$ のとき

$$x \ll y \iff \sum_{i=1}^{k} x_i^* \leqq \sum_{i=1}^{k} y_i^*, \quad k = 1, \ldots, n$$

かつ

$$x \prec y \iff x \ll y \text{ かつ } \sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^* .$$

上の preorders $\ll$, $\prec$ がそれぞれ Hardy-Littlewood-Pólya

(H-L-P) の weak, strong spectral order である。

我々はこれらの preorders を実関数(又は拡張された一実関数)の中でどこまで自然なかたちで拡張出来るか，またその拡張された preorders を使ってどんな性質が言えるかという問題について調べる。

2. 準備 関数のあいだに $\ll$, $\prec$ を考えるためには，関数 f を定めたとき，対応 $x \to x^*$ と同様に f^* を上手く定めねばならない。その為に必然的に測度空間上の議論をせねばならず，以下の如く記号，用語を定める。

(X, Λ, μ): 測度空間，i.e. X は空でない集合，Λ はその σ-algebra, μ は Λ 上の測度. $\mathbb{M}(X)$: $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$-値可測関数の全体. $L^1(X)$, $L^p(X)$, $L^\infty(X)$: 通常どうりの p-乗可積分関数及び essentially bounded functions の全体。またそれらの positive cone をそれぞれ $\mathbb{M}_+(X)$, $L^p_+(X)$, $L^\infty_+(X)$ と記し，さらに $f \in \mathbb{M}(X)$ に対して $[f > \lambda]$ を λ-spectral set という。そして $d_f(t) = \mu\{x: f(x) > \lambda\}$ を distribution (分布) という。さらに，一般に関数 f, g の分布が等しいとき $f \sim g$ とかき，f と g は equidistributed であるという。

以下次の仮定を設ける。

仮定。 測度空間 (X, Λ, μ), (X', Λ', μ') を組にして扱うときは $\mu(X) = \mu'(X') = a > 0$ であるとする。また半区間 $[0, a)$ には Lebesgue 測度 m を考える。

さて 対応 $x \to x^*$ は

(i) $$x \sim x^*$$

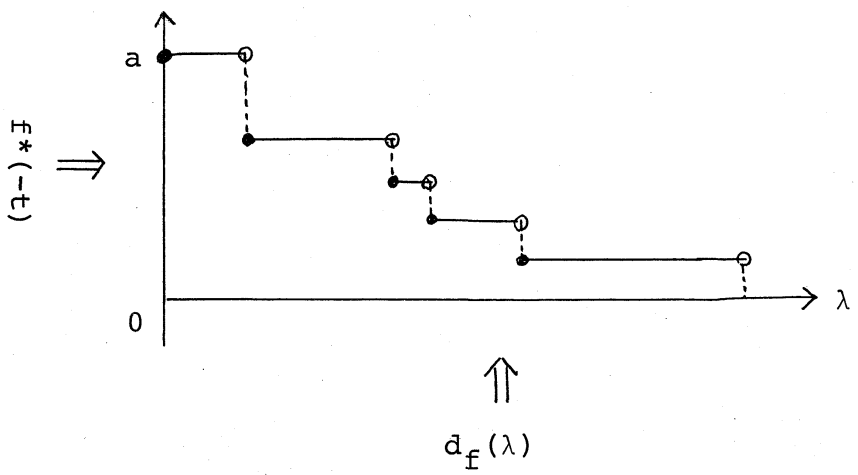
(ii) X_i^* は添字 i について非増加である。

ことに着目して $f \in \mathbb{M}(X)$ に対して $f^* \in \mathbb{M}([0, a))$ を

(i) $$f \sim f^*$$

(ii) f^* は $[0, a)$ で s の関数として非増加

である様に定めたい。この f^* は $f \geqq 0$ のときは極めて簡単に求まることが下図よりわかる。



そこで $f \in \mathbb{M}(X)$ に対して

$$f^*(s) \equiv \sup\{t:\ d_f(t) > s\} \qquad (0 \leqq s < a)$$

但し $\sup\phi \equiv -\infty$ とおき f^* を f の $[0, a)$ 上への decreasing rearrangement という。この対応 $f \to f^*$ は次の性質を持つ。

(i) $f \sim f^*$, f^* は非増加かつ右側連続

(ii) $f \leqq g$ なら $f^* \leqq g^*$ (monotonity)

(iii) $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leqq f^*(t_1) + g^*(t_2)$ (non-linearity)

3. 歴史 この preorders の歴史を概観しよう。1923 年 Schur [9] は次の Hadamard - 形不等式

$$\lambda_1 \cdots \lambda_k \leqq h_{11} \cdots h_{kk}, \quad k = 1, \ldots, n$$

(但し h_{ii} は positive semidefinte matrix (h_{ij}) の対角要素, λ_i, $i = 1, \ldots, n$ はその固有値である) を考察するにあたり, 次の事実を洞察した。即ち

$h_{ii} = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2 \lambda_j$ 但し $U = (u_{ij})$ は Unitary となっている。よって $(d_{ij}) = (|u_{ij}|^2)$ とおくと $d_{ij} \geqq 0$, $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} = 1$, $\sum_{i=1}^{n} d_{ij} = 1$, i.e., (d_{ij}) は d.s. matrix である。これより $\sum_{i=1}^{n} \Phi(h_{ii}) \leqq \sum_{i=1}^{n} \Phi(\lambda_i)$ が全ての convex functions について言える。

一歩進んで 1929年 Hardy-Littlewood-Pólya [3] は次の定理を得た（彼の著名な著書 [4] は 1934 年に出版されている）。

定理 (H-L-P). $x, y \in \mathbb{R}^n$ が $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} y_i^*$ を満たすとき次の命題 (A)～(D) は全て同値である。

(A) $x \prec y$

(B) $\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i)$ が全ての convex functions $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について成立する。

(C) $\sum_{i=1}^{n} (x_i - u)^+ \leqq \sum_{i=1}^{n} (y_i - u)^+$ が全ての $u \in \mathbb{R}$ について成立する。

(D) $x_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_j$, $i = 1, \ldots, n$ となる d.s. matrix (d_{ij}) が存在する。

また $f, g \in L_+^\infty([0,a))$ が $\int_0^a f^*(t)dt = \int_0^a g^*(t)dt$ ($a < \infty$) を満たすとき次の (A)′～(C)′ は全て同値である。

(A)′ $\int_0^s f^*(t)dt \leqq \int_0^s g^*(t)dt$ が全ての $s \in [0, a)$ について成立する。

(B)′ $\int_{[0,a)} \Phi(f)dm \leqq \int_{[0,a)} \Phi(g)dm$ が全ての convex functions $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について成立する。

(C)′ $\int_{[0,a)} (f - u)^+ dm \leqq \int_{[0,a)} (g - u)^+ dm$ が全ての $u \in \mathbb{R}$ について成立する。

そして Tomic [10] は 1949 年 次を得た。

<u>定理</u> (Tomic). $x, y \in \mathbb{R}^n$ のとき 次の (A), (B) は同値である。

(A) $x \ll y$

(B) $\sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} \Phi(y_i)$ が全ての非減少な convex functions $\Phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について成立する。

その後多くの結果が出たが，中でも Chong [2] の次の定理は重要である。

<u>定理</u> (Chong). $\mu(X) < \infty$ のときは $f, g > -\infty$ かつ $f^+, g^+ \in L^1(X)$ また，$\mu(X) = \infty$ のときは $0 \leqq f, g \in L^1(X)$ を仮定する。このとき定理 H-L-P で $[0, a)$ を X，測度 m を μ と読みかえれば (A′)(B′)(C′) の同値性が言える。但し (B′) では全ての non-decreasing convex functions と読みかえることにする。

<u>4. H-L-P の preorders の拡張</u> この章では我々の最近の結果 [7] について述べる。

$$P(X) = \{f \in \mathbb{M}(X) : f^* > -\infty \quad \text{or} \quad \int_0^s f^* dm < \infty \text{ for any } 0 < s < a\}$$

とおくとこれは次の集合に等しい。

$$\{f \in \mathbb{M}(X) : \int_0^s f^* dm \text{ が全ての } 0 < s < a \text{ について確定}\}$$

そこで次の様に preorders $\ll$, $\prec$ を定める。

定義。 $f \in P(X)$, $g \in P(X')$ のとき

$$f \ll g \iff \int_0^s f^* dm \leqq \int_0^s g^* dm$$

が全ての $0 < s < a$ について成立。さらに f^*, g^* の $[0, a)$ での積分が確定して，その値が相等しく，かつ $f \ll g$ のとき $f \prec g$ と表わす。そして preorders $\ll$ ($\prec$) を H-L-P の weak (strong) spectral order と呼ぶ。

さらに我々は "convex functions" を次の意味に使用する。

定義. $J \subset \mathbb{R}$ を区間とする。このとき $\Phi: J \to \mathbb{R}$ が次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとき Φ を J 上の convex function という。

(i) $J \cap \mathbb{R}$ で $-\infty < \Phi(x) \leqq \infty$ かつ $\Phi(x) \not\equiv \infty$

(ii) $J \cap \mathbb{R}$ で $\Phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqq \lambda\Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y)$ が $0 \leqq \lambda \leqq 1$ について成立。

(iii) $\Phi(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \Phi(x)$, $\Phi(\infty) \geqq \lim_{x \to \infty} \Phi(x)$ がそれぞれ $-\infty \in J$ のとき, $+\infty \in J$ のとき成立。

すると次が成立する ([7] を参照)

定理 1. 次の 1°, 2°, 3°, は同値である。

1° $f \ll g$

2° $\int_X (f-u)^+ d\mu \leqq \int_{X'} (g-u)^+ d\mu'$ が全ての $u \in \mathbb{R}$ について成立。

3° $\Phi(f) \ll \Phi(g)$ が全ての増加かつ左連続な convex functions $\Phi(f) \to \overline{\mathbb{R}}$ について成立する。但し J は f と g の値域を含み, $\Phi(f) \in P(X)$, $\Phi(g) \in P(X')$ とする。さらに, もし $\mu(X) < \infty$ かつ $\mu(f=\infty) = \mu'(g=\infty) = 0$ なら, Φ が左連続という仮定は取り去ってもよい。

ここで $\mu(X) = \infty$ の場合には $L^p(X)$, $L^q(X)$ $(p \neq q)$ のあいだに包含関係が一般にはないから Chong 氏の結果より我々の結果の方が実用性があることに注意されたい。

5. 拡張された $\ll$, $\prec$, と関数の和・差・積

次が成立することが我々の結果 [6], [7] に少し手を加えればわかる。

定理 2. (i) $f, g \in \mathbb{M}_+(X)$ なら $fg \ll f^*g^*$

(ii) $f, g \in \mathbb{M}(X)$ が well-defined なら

$$|f^* - g^*| \ll |f - g| .$$

特に

$$\Phi(|f^* - g^*|) \ll \Phi(|f - g|)$$

が $\Phi: [0,\infty] \to \overline{\mathbb{R}}$ なる全ての左連続 convex functions について言える。これは Chiti [1] の最近の結果の一般化でもある。

(iii) $f, g \in \mathbb{M}(X)$ かつ $f + g \in P(X)$, $f^* + g^* \in P([0,a))$ なら

$$f + g \ll f^* + g^* .$$

(iv) $f, g \in \mathbb{M}(X)$ かつ $f - g \in P(X)$, $f^* - g^* \in P([0,a))$ なら

$$f^* - g^* \ll f - g .$$

上の定理の証明には次の補助定理を使う。

<u>補助定理</u> 1. $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$ かつ $f_n \ll g_n$ なら $f \ll g$.

<u>補助定理</u> 2. $f_n \equiv (f \wedge n) \vee (-n)$, $n = 1, 2, \ldots$ とすると $\lim_{n\to\infty} f_n^* = f^*$.

<u>補助定理</u> 3. 上と同様の f_n, g_n に対して次が成立する。

$\varepsilon = 1$ or -1 に対して

$$(f_n + \varepsilon g_n)^+ \leqq (f + \varepsilon g)^+, \quad (f_n + \varepsilon g_n)^- \leqq (f + \varepsilon g)^-$$

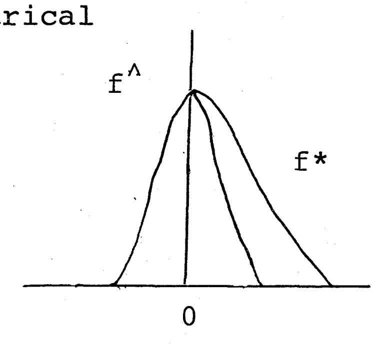
補助定理 4. $\alpha_i \geqq 0,\ F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n,\quad f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{F_i}$

なら　$f^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{[0,\ \mu(F_i))}$.

補助定理 5. f, g が X 上の step functions なら $[0,a)$ 上の step functions $\tilde{f}, \tilde{g}$ で次をみたすものが存在する。

$$f \pm g \sim \tilde{f} \pm \tilde{g}, \qquad f \cdot g \sim \tilde{f} \cdot \tilde{g} .$$

6. H-L-P の半順序と合成積　$h \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R})$ に対して $h^\wedge(s) \equiv h^*(2|s|)$ を h の symmetrical decreasing rearrangement と呼ぶ。さらに f と g の合成積を次式で定める。



$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x - t)dt .$$

すると次の定理を得る（[8] を参照）

定理 3. $f, g \in \mathbb{M}_+(\mathbb{R})$ に対して次が成立する。

$$f * g \prec f^\wedge * g^\wedge$$

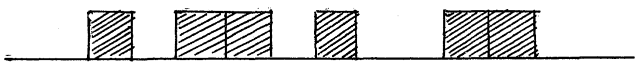
これは次の F. Riesz [5] の不等式と同値である。

<u>定理</u> (F. Riesz). $f, g, h \in M_+(X)$ に対して次が成立する。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)h(x+y)\,dxdy \leqq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^{\wedge}(X)g^{\wedge}(y)h^{\wedge}(x+y)\,dxdy .$$

そして Riesz の定理は定理 3 の立場から見れば次の事実と同値であることがわかる。

下図の様に同じ大きさの立方体の積み木を一列に並べる。



但し，お互いは接しているか，それとも一辺の長さ（1－ピッチ）の整数倍の間隔で離れているものとする。これを1組としてこの複製を k 個用意して，初めの基点から最少1ピッチずつずらしたものを一度に積み重ねる。もう一方では初めと同じ個数の積み木を全て接する様に一列に並べたものを1組としてそれを1ピッチずつずらし、k 個積み重ねる。その時出来る山の高さをそれぞれ h_1, h_2 とすれば次が成立する。

$$h_1 < h_2$$

References

[1] G. Chiti, Rearrangements of functions and convergence in Orlicsz spaces, Applicable Analysis 9(1979), 23-27.

[2] K.M. Chong, Some extentions of a theorem of Hardy, Littlewood and Pólya and their applications, Canad. J. Math. 24(1974), 1321-1340.

[3] G.H. Hardy, J.E. Littlewood and G. Pólya, Some simple inequalities satisfied by convex functions, Mess. of Math. 58(1929), 145-152.

[4] ________, "Inequalities" , Cambridge Univ. Press, London/ New York/ Melbourne, 1934.

[5] F. Riesz, Sur une inégalité intégrale, J. London Math. Soc. 5(1930), 162-168.

[6] Y. Sakai, Spectral orders and differences, Hokkaido Math. J. 13(1984), 271-276.

[7] ________, Weak spectral order of Hardy, Littlewood and Pólya, to appear in J. Math. Anal. Appl.

[8] ________, Spectral orders and convolution, to appear in Anal. Math.

[9] I. Schur, Über eine Klasse von Mittelbildungen mit Anwedungen die Determinanten Theorie Sitzungsber, Berlin. Math. Gesellschaft 22(1923), 9-20.

[10] M. Tomić, Théorème de Gauss relatif au centre de gravité et son application, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 1(1949), 31-40.