数理解析研究所講究録
第 545 巻 1985 年 37-49

3次元外部領域における非圧縮理想流の存在

東大教養　菊地慶祐 (Keisuke Kikuchi)

序

$\mathbb{R}^3$において、有限個の物体$O_1, \cdots, O_m$を過る非圧縮理想流体の運動を考える．流体は外部領域$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (O_1 \cup \cdots \cup O_m)$に存在し、その運動は、Eulerの運動方程式：

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p = f \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases} \qquad \text{in } \Omega, \quad t > 0$$

で記述されるものとする。無限遠方においては

$$(2) \qquad \lim_{|x| \to \infty} v(x,t) = v_\infty \quad (\text{定数ベクトル})$$ が成り立ち、

境界上においては

$$(3) \qquad v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$$ とする。

初期条件は

$$(4) \qquad v(x,0) = v_0(x) \qquad x \in \Omega$$ とする。

ここで，$v = v(x,t)$は速度ベクトル，$p = p(x,t)$は（スカラー値）圧力，$f = f(x,t)$は外力ベクトル，$v_0(x)$は初期速度ベクトル、$v \cdot n|_{\partial\Omega}$は$v$の境界$\partial\Omega$上での外向き法線成分

を表わす。

この小論では，$\{f, v_0, v_\infty\}$ を与えたとき，(1)～(4) を満たす解 $\{v, p\}$ の存在について考える。

§1．歴史，Notation，結果

＜歴史＞

Ω が3次元有界領域の場合，Ebin and Marsden [1] が，幾何的手法（測度保存の diffeomorphism のなす群上の測地線を求める）により解の存在を示した。また，Swann [2,1] は，渦の方程式及び境界のまわりでの循環を考慮して解を構成した。その他，Bourguignion and Brézis [3]，Temam [4]，Kato and Lai [5] らの仕事がある。$\Omega = \mathbb{R}^3$ の場合，Swann [2,2]，Kato [6,1] が，粘性消滅の方法で解の存在を示した。また，Cantor [7] は，重みつきの Sobolev 空間を導入して，[1] の手法により解を構成した。Ω が2次元有界領域の場合，Judovič [8]，Kato [6,2] らの仕事があり，$\Omega = \mathbb{R}^2$ のとき，McGrath [9]，Ω が2次元外部領域の場合，Kikuchi [10] の結果がある。

（なお，Ω；2次元の場合，構成された解は，すべて時間に関して大域解であるが，Ω；3次元の場合は，すべて時間に関して局所解である。）

この小論は，基本的には，[2,1] の議論に従って，渦の方程式を考察している。また，[7] で導入された重みつきの Sobolev

空間をこの小論でも用いる（ただし、外部領域での対応した重みつきの Sobolev 空間）。

<Notation>

◦ $C_0^s(\overline{\Omega})$：S回連続微分可能で $\overline{\Omega}$ 上コンパクトな台をもつ関数全体

◦ $1<p<\infty$，$\lambda \geq 0$，s：非負な整数に対して，ノルム $|\cdot|_{p,s,\lambda}$ を次のように定義する：

$$|u|_{p,s,\lambda} \equiv \sum_{|\alpha|\leq s} |\sigma^{\lambda+|\alpha|} D^\alpha u|_{L^p}, \quad \text{ただし} \quad \sigma(x) = \sqrt{1+|x|^2},$$

$|\cdot|_{L^p}$ は通常の L^p ノルム。

◦ $M_{s,\lambda}^p$：$C_0^s(\overline{\Omega})$ をノルム $|\cdot|_{p,s,\lambda}$ で完備化した空間.

$M_{s,\lambda}^p$ は以下の性質をもつ。

i) $u \in M_{s+1,\lambda}^p \Rightarrow Du \in M_{s,\lambda+1}^p$

ii) $\lambda \geqq 2 \Rightarrow M_{s,\lambda}^p \subset H^s(\Omega)$

iii) $p>1$，$s>3/p$，$\lambda \geqq 0$，$0 \leqq k \leqq s$

$\Rightarrow$ スカラー関数の積；$M_{s,\lambda}^p \times M_{s-k,\lambda+k}^p \longrightarrow M_{s-k,\lambda+k}^p$ は双線形かつ連続

次の結果は Nirenberg - Walker [11] によって得られたもので、$M_{s,\lambda}^p$ の本質的な性格づけをするものである：

$p>3$，$s \geqq 0$，$0 \leqq \delta < 1-3/p$

$\Rightarrow \Delta : M_{s+2,\delta}^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow M_{s,\delta+2}^p(\mathbb{R}^3)$

は isomorphism である.

◦ $\|u\|_{p,s,\lambda} \equiv \sup_{t\in[0,T]} |u(\cdot,t)|_{p,s,\lambda}$.

その他通常に使用されるnotationを用いる。

＜結果＞

領域Ωに関する仮定：Ωは単連結，境界$\partial\Omega$は十分滑らか。

$\boxed{\text{定理}}$

$p>3$, $0\leqq\delta<1-3/p$.

v_0, fに対して次の仮定をおく。

(i) $v_0\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)$; $\mathrm{rot}\, v_0\in M^p_{1,\delta+2}$,

$\mathrm{div}\, v_0=0$, $v_0\cdot n|_{\partial\Omega}=0$, $v_0|_{|x|\to\infty}=v_\infty$.

(ii) $f\in C(\overline{\Omega}\times[0,T])\cap C^{1,0}(\Omega\times[0,T])$;

$\mathrm{rot}\, f\in L^\infty(0,T;M^p_{0,\delta+2})\cap L^1(0,T;M^p_{1,\delta+2})$.

このとき 定数$T_1=T_1(\mathrm{rot}\, v_0, v_\infty, \mathrm{rot}\, f, \Omega)>0$, $T_1\leqq T$, が存在し，(1)〜(4)は$[0,T_1]$上の解$\{v,p\}$をもつ。$\{v,p\}$は

$v-v_\infty\in C([0,T_1];M^p_{1,\delta+1})\cap L^\infty(0,T_1;M^p_{2,\delta+1})$

$\frac{\partial v}{\partial t}\in L^\infty(0,T_1;M^p_{1,\delta+1})$, $\nabla p\in L^\infty(0,T_1;C(\overline{\Omega}))$ をみたす。

Acknowledgement ： 今回の研究集会での発表後，定理中の余分な条件を御指摘下さいました藤田宏先生に感謝致します。

§2. 解の構成

(5) $$\mathrm{rot}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v-f\right)=0$$

をみたすソレノイダルベクトルv($\mathrm{div}\, v=0$)を見つければ、Ωが単連結より、よく知られているように、スカラー値関数pが存在して、$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v-f=-\nabla p$が成り立つ。よって以下では、(1)の代わりに(5)の方程式(渦方程式)を考察する。

2.1. Iteration scheme

$\mathrm{div}\, v=0$を考慮して、(5)を形式的に計算すると、

$\frac{\partial}{\partial t}w+(v\cdot\nabla)w-(w\cdot\nabla)v-\mathrm{rot}\, f=0$ を得る。ただし wは

$\mathrm{rot}\, v=w$。さらに、vは(2)〜(4)をみたすように構成する。

(i) 0次近似 v_0, w_0 : 0次近似v_0, w_0として、それぞれ初期速度v_0と初期渦度$\mathrm{rot}\, v_0$をとる。

(ii) 渦度のn次近似w_nがわかっているとき、速度のn次近似v_nは、以下の方程式の解とする。

$$(A)\quad \begin{cases} \mathrm{rot}\, v_n=w_n, & \mathrm{div}\, v_n=0 \\ v_n\cdot n|_{\partial\Omega}=0, & \lim_{|x|\to\infty} v_n=v_\infty \end{cases}$$

(iii) 速度のn次近似v_nがわかっているとき、渦度の$n+1$次近似w_{n+1}は、以下の方程式の解とする。

$$(B)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}w_{n+1}+(v_n\cdot\nabla)w_{n+1}-(w_{n+1}\cdot\nabla)v_n=\mathrm{rot}\, f \\ \mathrm{div}\, w_{n+1}=0 \\ w_{n+1}|_{t=0}=\mathrm{rot}\, v_0 \end{cases}$$

2.2. (A)の解について

線型楕円型方程式(A)を解くために、以下に示す harmonic fields が必要である。

H_n の定義：H_n は次の性質をもつ m 個の harmonic fields $h_1,\cdots,h_m$ によって張られる $L^2(\Omega)$ の m 次元部分空間

$$(6)\quad \begin{cases} \operatorname{div} h_j = 0, \quad \operatorname{rot} h_j = 0, \quad h_{j\tau}|_{\partial\Omega} = 0 \\ h_j(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \text{ as } |x|\to\infty \end{cases} \quad (j=1,\cdots,m)$$

($h_\tau|_{\partial\Omega}$ は h の $\partial\Omega$ 上の tangential 成分である)。

h_j は $h_j(x) = \nabla\int_{\partial\Omega}\frac{1}{|x-y|}g_j(y)\,d_yS \quad (j=1,\cdots,m)$ で与えられる。

ここで g_j は、$g_j(x)+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_x}\frac{1}{|x-y|}g_j(y)\,d_yS = 0$ on $\partial\Omega$ の解である。(g_j は内部 Neumann 問題の resolvent kernel の固有関数)。g_j のよく知られた性質を用いて(6)は容易に示される。

<u>補題1</u>.

ベクトル値関数 h が次の性質をもつとする。

$\operatorname{rot} h = 0$, $\operatorname{div} h = 0$, $h_\tau|_{\partial\Omega} = 0$, $h|_{|x|\to\infty} = 0$

$$\Rightarrow \quad h = \sum_{j=1}^{m}\left(\int_{S_j} h\cdot n\,ds\right)h_j$$

ただし S_j は境界 $\partial\Omega$ の連結成分。　　(証明略)

定理2 (vector potentialの存在)

$\omega \in M^p_{s,\delta+2}$ $(\subset L^2(\Omega))$ かつ $\omega \in H_n^\perp$ $(=L^2(\Omega)\ominus H_n)$ とする。

このとき

$$(7)\quad \begin{cases} -\Delta u = \omega, \quad u_\tau|_{\partial\Omega}=0, \quad \operatorname{div} u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{S_j} u\cdot n\, dS = 0 \quad (j=1,\cdots,m) \end{cases}$$

の解 $u \in M^p_{s+2,\delta}$ が一意に存在する。

証明の道筋

補題1と次に述べる補題3があれば、Morrey [12] (Ch. 7) の議論に従って、Dirichlet 原理を用いることで、(7)の解の存在を示すことができる。

補題3

$u \in H^1(\Omega)$ が $u_\tau|_{\partial\Omega}=0$ かつ $\displaystyle\int_{S_j} u\cdot n\, dS = 0$ $(j=1,\cdots,m)$ をみたすとする。このとき、次の評価が成り立つ。

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqq C\sqrt{\|\operatorname{div} u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{rot} u\|^2_{L^2(\Omega)}},$$

ここでCはΩのみに依存する定数。 (証明略)

(7)の解uの正則性については、境界の近傍では、Morrey [12] (Ch. 5, 7) の結果が適用でき、また、境界から十分離れた領域では、前掲の Nirenberg-Walker の結果を用いる。

$\omega \in H_n^\perp$, $\operatorname{div} \omega = 0$ をみたす $\omega \in M^p_{s,\delta+2}$ に対して、線型作

用素 Fを、次のように定義する。

$F(\omega) \equiv \mathrm{rot}\, u$, ここで uは(7)の解。

このとき、$F(\omega)$は次の性質をもつことが容易にわかる。

<u>補題4</u>.

$F(\omega) \in M^p_{s+1,\delta+1}$であり以下の性質をもつ;

$\mathrm{div}\, F(\omega) = 0$, $\mathrm{rot}\, F(\omega) = \omega$, $F(\omega)\cdot n|_{\partial\Omega} = 0$, $F(\omega)|_{|x|\to\infty} = 0$

$$|F(\omega)|_{p,s+1,\delta+1} \leq C|\omega|_{p,s,\delta+2}$$

ここで Cは Ωのみに依存する定数。

補題4の結果から、次の命題を得る。

<u>命題5</u>

$\omega \in C([0,T]; M^p_{1,\delta+2})$が $\omega \in H^1_n$, $\mathrm{div}\, \omega = 0$をみたすとする。このとき、(A)の解 vが一意的に存在して、vは次の性質をもつ。$v - v_\infty \in C([0,T]; M^p_{2,\delta+1})$,

$$\|v - v_\infty\|_{p,2,\delta+1} \leq C(\|\omega\|_{p,1,\delta+2} + |Dv_0|_{p,1,\delta+2}) + |v_0 - v_\infty|_{p,2,\delta+1}.$$

<u>証明</u>

(A)の解 vは $v = F(\omega) + v_0 - F(\mathrm{rot}\, v_0)$で与えられる。

2.3. (B)の解について

粗く言えば、vの特性曲線に沿えば $\frac{\partial\omega}{\partial t} + (v\cdot\nabla)\omega = \frac{D\omega}{Dt}$となるので、一階の線型双曲型方程式:

$\frac{\partial w}{\partial t}+(v\cdot\nabla)w-(w\cdot\nabla)v=\mathrm{rot}\,f$ は、非同次線型常微分方程式

$$\frac{Dw}{Dt}-\left(\frac{\partial v^k}{\partial x_j}\right)_{j,k}w=\mathrm{rot}\,f$$ となるので、容易に解が構成で

きる。以下、より具体的に手順を述べる。

$\Omega\times[0,T]$ における v の特性曲線 $X(x,t;s)$ を次の式で定義する。

$$(8)\quad \begin{cases} \frac{d}{ds}X(x,t;s)=v(X(x,t;s),s) \\ X(x,t;t)=x \end{cases}$$

（$v\cdot n|_{\partial\Omega}=0$ より v に滑らかさを仮定すれば、(8) の解は $[0,T]$ で大域的に存在する）。

$G(s)\equiv\left(\frac{\partial X^k(x,t;s)}{\partial x_j}\right)$ とおく。このとき (8) より、$G(s)$ は

$$\frac{dz(s)}{ds}=\left(\frac{\partial v^k(y,s)}{\partial y_j}\Big|_{y=X(x,t;s)}\right)_{j,k}z(s)$$ の fundamental matrix

solution であることが容易にわかる。よって

$$w(x,t)=G(t)G(0)^{-1}\mathrm{rot}\,v_0(X(x,t;0))+G(t)\int_0^t G(s)^{-1}\mathrm{rot}\,f(X(x,t;s),s)\,ds$$

で定義すれば、$w(x,t)$ は (B) の解となっている。さらに

(8) より、$X(\cdot,t;s)^{-1}=X(\cdot,s;t)$ 及び $\mathrm{div}\,v=0$ より、

$\det G(s)=1$ などを用いれば 次の命題を得る。

命題 6

v が次の条件をみたすとする；$v-v_\infty\in C([0,T];M^p_{2,\delta+1})$,

$\mathrm{div}\,v=0$, $v\cdot n|_{\partial\Omega}=0$。

このとき，(B)の解 ω が一意的に存在して，$\omega \in C([0,T]; M^p_{1,\delta+2})$，$\omega \in H^1_n$ が成立して，かつ以下の評価式をみたす：

$$(9)\quad |\omega(t)|_{p,0,\delta+2} \leq C\Big(|\mathrm{rot}\, v_0|_{p,0,\delta+2} + \int_0^t |\mathrm{rot}\, f(s)|_{p,0,\delta+2}\, ds + \|Dv\|_{p,1,\delta+2} \int_0^t |\omega(s)|_{p,0,\delta+2}\, ds \Big),$$

$$(10)\quad |\omega(t)|_{p,1,\delta+2} \leq C\Big(|\mathrm{rot}\, v_0|_{p,1,\delta+2} + \int_0^t |\mathrm{rot}\, f(s)|_{p,1,\delta+2}\, ds + \|Dv\|_{p,1,\delta+2} \int_0^t |\omega(s)|_{p,1,\delta+2}\, ds + \sup_{s\in[0,t]} |\omega(s)|_{p,1,\delta+2} \int_0^t |D^2 v(s)|_{p,0,\delta+3}\, ds \Big).$$

2.4. 近似解の収束

命題5，6より T を制限することにより，n について一様な評価を得る．

<u>補題7</u>

$$K_1 = C\Big(|Dv_0|_{p,1,\delta+2} + \int_0^T |\mathrm{rot}\, f(s)|_{p,1,\delta+2}\, ds \Big)$$ とおく．

このとき，$T_1 = T_1(\mathrm{rot}\, v_0, v_\infty, \mathrm{rot}\, f, \Omega) > 0$ が存在して，すべての n について

$$(11)\quad \sup_{t\in[0,T_1]} |\omega_n(s)|_{p,1,\delta+2} \leqq K_1$$

が成り立つ．

系

K_1 及び Ω のみに依存する定数 K_2, K_3 が存在して．すべての n に対して

$$(12)\quad \begin{cases} \sup_{t\in[0,T_1]} |v_n(t) - v_\infty|_{p,2,\delta+1} \leqq K_2 \\ \sup_{t\in[0,T_1]} |\frac{\partial}{\partial t} w_n(t)|_{p,0,\delta+2} \leqq K_3 . \end{cases}$$ が成り立つ

命題5，6，補題7及びその系を用いて．すべての n に対して，次の評価が成り立つ．

$$(13)\quad \begin{cases} |w_n(t) - w_{n-1}(t)|_{p,0,\delta+2} \leqq 2K_1 \frac{(cK_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ |v_n(t) - v_{n-1}(t)|_{p,1,\delta+1} \leqq 2cK_1 \frac{(cK_1 t)^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases}$$

(13) より t に関する一様収束が得られる．さらに (11)，(12) が t に関する L^∞ 評価を与える。

References.

[1] Ebin, D. and Marsden, J., Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, Ann. Math. 92 (1970), 102 - 153.

[2,1] Swann, H.S.G., The existence and uniqueness of nonstationary ideal incompressible flow in bounded domains in R^3, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), 167 - 180.

[2,2] Swann, H.S.G., The convergence with vanishing viscosity of nonstationary Navier Stokes flow to ideal flow in R^3, Trans. Amer. Math. Soc. 157 (1971), 373 - 397.

[3] Bourguignon, J.P. and Brezis, H., Remark on the Euler equation, J. Funct. Anal. 15 (1974), 341 - 363.

[4] Temam, R., On the Euler equations of incompressible perfect fluids, J. Funct. Anal. 20 (1975), 32 - 43.

[5] Kato, T. and Lai, C.Y., Nonlinear evolution equations and the Euler flow, J. Funct. Anal. 56 (1984), 15 - 28.

[6,1] Kato, T., Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in R^3, J. Funct. Anal. 9 (1972), 296 - 305.

[6,2] Kato, T., On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation, Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967), 188 - 200.

[7] Cantor, M., Perfect fluid flows over R^n with asymptotic conditions, J. Funct. Anal. 18 (1975), 73 - 84.

[8] Judovic, V., Two-dimensional nonstationary problem of the flow of an ideal incompressible fluid through a given region, Mat. Sb. (N.S.) 64 (1964), 562- 588 (Russian) A. M. S. Transl. (2) 57 (1966), 277 - 304.

[9] McGrath, F.J., Nonstationary plane flow of viscous and ideal fluids, Arch. Rat. Mech. Anal. 27 (1968), 329 - 348.

[10] Kikuchi, K., Exterior problem for the two-dimensional Euler equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 30 (1983), 63 - 92.

[11] Nirenberg, L. and Walker, H., The null spaces of elliptic partial differential operator in R^n, J. Math. Anal. Appl. 42 (1973), 271 - 301.

[12] Morrey, Jr., C.B., Multiple integrals in the calculus of variations, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 130, Springer- Verlag, New York (1966).