数理解析研究所講究録
第 546 巻 1985 年 1-16

SU(2,2) の Maass space について

東大・理　　菅野　孝史
(Sugano Takashi)

§1. 背景と目的

2次，重さ k の Siegel 尖点形式 $F(Z)=\sum a_F(T)\mathbf{e}[\mathrm{tr}\,TZ]$ で，条件

$$a_F\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} = \sum_{\substack{d\mid(a,b,c) \\ d>0}} d^{k-1}\, a_F\begin{pmatrix} 1 & b/2r \\ b/2r & ac/r^2 \end{pmatrix}$$

を満たすもの全体のなす空間は Maass space と呼ばれ，Saito-Kurokawa lifting による（$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する）重さ $2k-2$ の尖点形式の空間の像と一致することが知られている。（cf. [5], [3], [6], [1], [14]）

[4] に於て、小嶋久祉氏は、Gauss 数体に関する符号 (2,2) のユニタリ群について、Maass space の類似を定義し，$\Gamma_0(4)$ に関する尖点形式との関係を調べ，その次元の評価を与えている。また、次元の決定，Hecke theory を調べることを，問題としてあげている。

このノートでは，一般の虚2次体の場合に，Maass space

の類似を定義し，その次元を求めるとともに，L関数の分解を調べることを目的とする。なお，ここで定義する空間は，小嶋氏のものとは少し異なり，それをある固有空間として含むものになっている。定義及び或る Jacobi (cusp) forms の空間との同型（定理1）は，[6]，[4]と全く同じ議論による。Jacobi form については，より一般的な状況—— $Sp(n+m)$ に於て，Levi 成分が $GL(m)\times Sp(n)$ となる *standard parabolic subgroup* の *unipotent radical* を $H_{n,m}$ と書くとき，$G_{n,m}=H_{n,m}\rtimes Sp(n)$ 上の保型形式という形 —— で，佐武一郎先生により Lie 群のユニタリ表現論の立場から研究されている（[10]）。また，代数群上の保型形式の立場から（殊に，Hecke 環，L関数など）新谷卓郎先生により研究されている。今の場合（上の記号では $G_{1,2}$ にあたる）Jacobi forms の空間の次元は，村瀬篤氏との共同研究の結果（これは[10]で求められている Bergman 核を用いたもの），あるいはテータ関数を介して，よく知られている $SL_2(\mathbb{Z})$ に関するベクトル値尖点形式の次元公式によって求められる（定理2）。最後に，Hecke series の分母に対応するL関数が，Maass space に於いては定理1の同型で対応する Jacobi form のL関数で記述されることを見る（定理3）。

§2. Maass space

<u>1° $SU(2,2)$ 上の保型形式・Maass space の定義</u>　Kを判別式Dの虚2次体，$\mathfrak{o}$，$\mathfrak{d}$をそれぞれKの整数環，共役差積とする。$\mathbb{Q}$上の代数群 G を，その$\mathbb{Q}$-有理点が

$$G_{\mathbb{Q}} = \left\{ g \in GL_4(K) \;\middle|\; {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix} g = \mu(g)\begin{pmatrix} & 1_2 \\ -1_2 & \end{pmatrix},\; \det g = \mu(g)^2 \right\}$$

で与えられるもの（*direct similitudes* の群とよばれる cf. [12]）とし，部分代数群 G^1 を $G^1_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}} \cap SL_4(K)$ で定義する。Gの実点の連結成分 G^+_∞ は，$I_{2,2}$型の既約有界対称領域 $\mathfrak{H} = \left\{ Z \in M_2(\mathbb{C}) \;\middle|\; (2i)^{-1}(Z - {}^t\bar{Z}) > 0 \right\}$ に一次分数変換により作用する。すなわち，$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G^+_\infty$，$Z \in \mathfrak{H}$ のとき，$g\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$。また，$J(g,Z) = \mu(g)^{-1} \times \det(CZ+D)$ は，$G^+_\infty \times \mathfrak{H}$ 上のスカラー値正則保型因子となる。$\Gamma = G^1_\infty \cap SL_4(\mathfrak{o})$，$k \geqq 1$ とし $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ で次の条件をみたす $\mathfrak{H}$ 上のスカラー値関数 F（Γに関する重さkの cusp form）の空間をあらわす。

i) Fは$\mathfrak{H}$上正則，ii) $F(\gamma\langle Z\rangle) = J(\gamma,Z)^k F(Z)$ $\forall \gamma \in \Gamma$,

iii) $F(g\langle Z_0\rangle)J(g,Z_0)^{-k}$ は G^1_∞上有界 $\left(Z_0 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)$.

$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の元Fは，

$$(1)\quad F(Z) = \sum_{\substack{T = \begin{pmatrix} m & \alpha \\ \bar{\alpha} & n \end{pmatrix} > 0 \\ m,n \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathfrak{d}^{-1}}} a_F(T)\, \mathbf{e}[\operatorname{tr} TZ]$$

と Fourier 展開される。Fourier 係数が、条件

$$(2) \qquad a_F\begin{pmatrix} m & \alpha \\ \bar{\alpha} & n \end{pmatrix} = \sum_{\substack{r|m,\, r|n \\ r^{-1}\alpha\in\delta^{-1},\, r>0}} r^{k-1} a_F\begin{pmatrix} 1 & \alpha/r \\ \bar{\alpha}/r & mn/r^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\forall m,n\in\mathbb{Z} \\ \forall \alpha\in\delta^{-1},\end{matrix}$$

を満たす元全体のなす $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の部分空間を Maass space と呼び，$\mathcal{M}_k(\Gamma)$ と記す。

2° Jacobi forms

$H_{\mathbb{Q}} = \{h = (u, v, z) \mid u, v \in K,\ z \in \mathbb{Q}\}$，$G'_{\mathbb{Q}} = SL_2(\mathbb{Q})$ を

$$h = (u, v, z) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & z & v \\ & 1 & \bar{v} & 0 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & u & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -\bar{u} & 1 \end{array}\right),\quad g' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & a & & b \\ \hline & & 1 & \\ & c & & d \end{array}\right)$$

により G^1 の部分群と見て，$\underline{\underline{G}}' = H\cdot G'$ とおく。$Z = \{(0,0,z)\}$ は H 及び $\underline{\underline{G}}'$ の中心となる。演算は具体的には，

$$(u_1, v_1, z_1)(u_2, v_2, z_2) = (u_1+u_2,\ v_1+v_2,\ z_1+z_2+u_1\bar{v}_2+\bar{u}_1 v_2),$$

$$g^{-1}(u, v, z)\,g = (u', v', z') \qquad \text{ここで，} (u', v') = (u, v)g,\ g\in G' \quad z' = z - \bar{u}v + \bar{u}'v'$$

で与えられる。$\mathfrak{D} = \{Z = (z, w_1, w_2) \in \mathbb{C}^3 \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ に $\underline{\underline{G}}'_\infty$ は，

$$\underline{\underline{g}}\langle Z\rangle = \left(g\langle z\rangle,\ \frac{w_1}{j(g,z)} + u\cdot g\langle z\rangle + v,\ \frac{w_2}{j(g,z)} + \bar{u}\cdot g\langle z\rangle + \bar{v}\right)$$

により作用する。但し，$\underline{\underline{g}} = (u, v, z)\,g$，$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$g\langle z\rangle = \dfrac{az+b}{cz+d}$，$j(g,z) = cz+d$ とおいた。自然数 r, k に対し次の $J_{r,k}(\underline{\underline{g}}, Z)$ は $\underline{\underline{G}}'_\infty \times \mathfrak{D}$ 上のスカラー値正則保型因子を与える。

$$J_{r,k}(\underline{g}, Z) = j(g,z)^{k}\, \mathbf{e}\Big[-r\Big\{ z + u\bar{u}\, g\langle z\rangle + \frac{\bar{u}w_1 + uw_2 - cw_1w_2}{j(g,z)}\Big\}\Big] .$$

$\underline{\Gamma}' = \Gamma \cap \underline{G}'_\infty = H_{\mathbb{Z}}\cdot\Gamma'$ $(\Gamma' = SL_2(\mathbb{Z}))$ とおき，$\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ で次の条件をみたす，$\mathfrak{D}$上のスカラー値関数 f (weight k, index r の Jacobi cusp form と呼ぶべきもの) のなす空間をあらわす。

i) f は $\mathfrak{D}$ 上正則 , ii) $f(\gamma\langle Z\rangle) = J_{r,k}(\gamma, Z)\, f(Z)$ $\forall\gamma\in\underline{\Gamma}'$,

iii) $f(\underline{g}\langle Z_0\rangle)J_{r,k}(\underline{g}, Z_0)^{-1}$ $(Z_0 = (i,0,0))$ は $\underline{G}'_\infty$ 上有界

$\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ の各元 f は，

(3) $$f(z, w_1, w_2) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ \alpha\in\delta^{-1}}} a_f(n,\alpha)\, \mathbf{e}[nz + \bar{\alpha}w_1 + \alpha w_2]$$

と Fourier 展開される。尖点条件より，$\begin{pmatrix} r & \alpha \\ \bar{\alpha} & n\end{pmatrix}$ が正定値でなければ，$a_f(n,\alpha) = 0$ となる。

自然数 m に対し，Maass [6] にならって，線型写像 $l_r(m)$: $\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}') \longmapsto \mathfrak{S}_{rm,k}(\underline{\Gamma}')$ を，

(4) $$(l_r(m)f)(z, w_1, w_2) = m^{\frac{k-2}{2}} \sum_{S\in\Gamma'\backslash T'(m)} f|[\sqrt{m}^{-1}S]_{r,k}(z, \sqrt{m}\,w_1, \sqrt{m}\,w_2)$$

により導入しておく。 ここで $T'(m) = \{ g\in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det g = m\}$, $f\in\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$, $f|[\underline{g}]_{r,k}(Z) = J_{r,k}(\underline{g}, Z)^{-1} f(\underline{g}\langle Z\rangle)$ $(\underline{g}\in\underline{G}'_\infty)$ とおいた。

<u>3° Maass space と Jacobi forms</u>　$F\begin{pmatrix}\tau & w_1\\ w_2 & z\end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_k(\Gamma)$ を τ について Fourier 展開する：

(5) $$F\begin{pmatrix}\tau & w_1\\ w_2 & z\end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(z, w_1, w_2)\,\mathbf{e}[m\tau] \quad .$$

これは Fourier 展開 (1) を用いれば，

$$F_m(z, w_1, w_2) = \sum_{n,\alpha} a_F\begin{pmatrix} m & \alpha\\ \bar{\alpha} & n\end{pmatrix} \mathbf{e}[nz + \bar{\alpha} w_1 + \alpha w_2]$$

と書かれる。

(6) $$F_r \in \mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}') \quad ,$$

(7) $$F \in \mathcal{M}_k(\Gamma) \Longleftrightarrow F_m = \ell_1(m) F_1 \qquad \forall m \quad ,$$

は定義から直ちに確かめられる。次の定理によって，Maass space は，Jacobi cusp form の言葉で記述される。

<u>定理1</u>　$F \longmapsto F_1$ により Maass space $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ は $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ と同型となる。また，$\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ の元 f に対し

(8) $$F(f)\begin{pmatrix}\tau & w_1\\ w_2 & z\end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} (\ell_1(m) f)(z, w_1, w_2)\,\mathbf{e}[m\tau]$$

は，これの逆対応を与える。

<u>証明</u>：(7) より，$F(f)$ が保型性をみたすことのみ証明すればよい。これは，Γ が $\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$，$\begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}$ 達で生成される（cf. [2], [8]）ことを考慮すれば容易にわかる。◢

<u>4° テータ関数との関係</u>　（この項は，定理2の別証を除いては必ずしも必要ではない。）$\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ の各元は，z を固定すると，テータ関数の空間

$$\vartheta_{r,z} = \left\{ \varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{正則，任意の } u, v \in \mathcal{O} \text{ に対し} \\ \varphi(w_1+uz+v,\, w_2+\bar{u}z+\bar{v}) = \mathbf{e}[-r(u\bar{u}z+\bar{u}w_1+uw_2)]\,\varphi(w_1,w_2) \end{array} \right\}$$

に属する。よく知られているように，$\mu \in r^{-1}\delta^{-1}$ に対し

$$\theta_\mu^{(r)}(z,w_1,w_2) = \sum_{l\in\mathcal{O}} \mathbf{e}[r\{N(l+\mu)z + \overline{(l+\mu)}\,w_1 + (l+\mu)w_2\}]$$

とおくと，$\{\theta_\mu^{(r)} \mid \mu \in r^{-1}\delta^{-1}/\mathcal{O}\}$ が $\vartheta_{r,z}$ の $\mathbb{C}$ 上のひとつの基底を与える。また各 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$ に対し，変換公式

$$\theta_\mu^{(r)}|[\gamma]_{r,1}(z,w_1,w_2) = \sum_{\nu\in r^{-1}\delta^{-1}/\mathcal{O}} M^{(r)}_{\mu,\nu}(\gamma)\cdot\theta_\nu^{(r)}(z,w_1,w_2),$$

(9)

$$M^{(r)}_{\mu,\nu}(\sigma) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(d)\,\delta_{\mu,d\nu}\,\mathbf{e}[abN(\mu)r] & \text{if } c=0, \\ \dfrac{1}{icr\sqrt{|D|}} \displaystyle\sum_{u\in\mathcal{O}/c\mathcal{O}} \mathbf{e}\!\left[\frac{r}{c}\{aN(u+\mu)-\mathrm{tr}((u+\mu)\bar{\nu})+dN(\nu)\}\right] & \text{if } c=0. \end{cases}$$

が成立し，$M^{(r)} = (M^{(r)}_{\mu,\nu})$ は $r^2|D|$ 次のユニタリ行列である（cf. [13]）。

一般に，$\Gamma' = SL_2(\mathbb{Z})$ の有限次元表現 χ に対し，$S_m(\Gamma',\chi)$ で $f(\gamma\langle z\rangle) = j(\gamma,z)^m\chi(\gamma)f(z)$ をみたす $\mathbb{C}^{\dim\chi}$ 値正則尖点形式のなす空間をあらわす。$(f_\mu) \in S_{k-1}(\Gamma', \overline{M^{(r)}})$ に $\sum_\mu f_\mu\cdot\theta_\mu^{(r)}$ を対応させることにより，同型

(10) $\quad S_{k-1}(\Gamma', \overline{M^{(r)}}) \cong \mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$

を得る。

$r=1$ のときを少し詳しくみておこう。$E = \{\varepsilon \in \mathcal{O}/\delta \mid N(\varepsilon) \equiv 1 \pmod{D}\}$ とおく。Kで分岐する各素数 p に対し，$\varepsilon_p \in \mathcal{O}$ を，$\varepsilon_p \equiv 1 \bmod \delta_q$ $(\forall q \neq p)$ かつ $\varepsilon_p \equiv \bar{\pi}_p/\pi_p \pmod{\delta_p}$

となるようにひとつ定めておく（ここで π_p は K_p のひとつの素元）。E は，ε_p 達で生成される $(2,\cdots,2)$ 型アーベル群である（rank は，D の素因子の個数）。また E の元としては，$-1=\prod_{p|D,\ \mathrm{ord}_p D=\mathrm{odd}}\varepsilon_p$ 。E は $\vartheta_{1,z}$ に $\varphi=\sum_\mu a_\mu\,\theta_\mu^{(1)}\longmapsto\varphi|[\varepsilon]=\sum_\mu a_\mu\,\theta_{\varepsilon\mu}^{(1)}$ $(\varepsilon\in E)$ と作用し，この作用に関して固有空間に分解される：$\vartheta_{1,z}=\bigoplus_{\sigma\in\hat{E}}\vartheta_{1,z}^{[\sigma]}$ ，$\vartheta_{1,z}^{[\sigma]}=\{\varphi\in\vartheta_{1,z}\mid\varphi|[\varepsilon]=\sigma(\varepsilon)\varphi\ \text{ for }\forall\varepsilon\in E\}$ 。さて，各 σ 固有空間は Γ' stable で，$M^{(1)}=\bigoplus_{\sigma\in\hat{E}}M^{(1)[\sigma]}$ と分解される。この作用は $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ にうつる。すなわち，f が (3) の Fourier 展開をもつとき，

(11) $$f|[\varepsilon](z,w_1,w_2)=\sum_{n,\alpha}a_f(n-N(\alpha)+N(\varepsilon\alpha),\varepsilon\alpha)\,\mathbf{e}[nz+\bar{\alpha}w_1+\alpha w_2]$$

として E が $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ に作用する。$\mathfrak{S}_{1,k}^{[\sigma]}(\underline{\Gamma}')$ で σ 固有空間をあらわせば，(10) の同型は，$S_{k-1}(\Gamma',\overline{M^{(1)[\sigma]}})\cong\mathfrak{S}_{1,k}^{[\sigma]}(\underline{\Gamma}')$ を導く。ここで空間が $\{0\}$ とならぬためには，$\sigma(-1)=(-1)^k$ が必要である。

<u>Remark</u>　(11) と全く同様にして，E は Maass space $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ にも作用する。$\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ でその σ 固有空間をあらわせば，これは $\mathfrak{S}_{1,k}^{[\sigma]}(\underline{\Gamma}')$ と同型であり，$\mathcal{M}_k(\Gamma)=\bigoplus_{\sigma\in\hat{E}}\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ 。とくに，σ が単位指標のとき，$\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ は [4] で定義されている空間と一致する（$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$）。また，$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ の元 F に対し，(10) を通して F_1 $(\in\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}'))$ の $\theta_0^{(1)}$ の係

数を対応させる写像は，Oda [7] の特別な場合（SO(2,4)-case）となっている。

5° Maass space の次元

定理2　K を判別式 D の虚2次体，k を4以上の整数とする。このとき，Maass space の次元は次の式で与えられる。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_k(\Gamma) = \frac{k-2}{6}\left[\frac{|D|}{4} + (-1)^k \begin{cases} 1 & \text{if } D \equiv 0 \pmod{4} \\ 1/4 & \text{if } D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}\right]$$

$$+ \begin{cases} 0 & \text{if } D \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}\cot\left(\frac{k+1}{2}\pi\right) e\left[\frac{1-D}{8}\right] & \text{if } D \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$+ \frac{\varepsilon}{3} + \frac{(-1)^{k+1}}{4} \times \begin{cases} 2 & \text{if } \mathrm{ord}_2 D = 2 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$+ \frac{-1}{4} \times \left[1 + \begin{cases} \sum_{d|D} 4h_d/w_d & \text{if } D \not\equiv 0 \pmod{8}, \\ \sum_{\substack{d|D \\ d\equiv 1\,(4)}} 4h_d/w_d + \sum_{\substack{d|D \\ d/8 \equiv D/8\,(4)}} 4h_d/w_d & \text{if } D \equiv 0 \pmod{8} \end{cases}\right].$$

最後の $\sum$ において，d は虚2次体の判別式となるもののみを動き，h_d，w_d はそれぞれ $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の類数，単数群の位数をあらわす。また，$\varepsilon = 0, \pm 1$ は次の表で与えられる。

D \ k (mod 6)	0	1	2	3	4	5
$\left(\frac{D}{3}\right) = 1$	0	−1	0	1	0	0
$\left(\frac{D}{3}\right) = -1$	−1	0	0	0	1	0
$\left(\frac{D}{3}\right) = 0$	0	0	−1	1	1	−1

．

証明には少し異なる2つの方法がある。

(i) (村瀬篤氏との共同研究) $G_{1,m}$ の Jacobi cusp forms の次元については, [10] で求められている Bergman 核関数を用いて, Selberg trace formula によって, 直接求めることができる(計算は一変数の場合と基本的には同じ)。とくに, $m=2$ として $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{S}_{1,k}(\Gamma')$ を知る。

(ii) (10) の同型を使って, ベクトル値の場合の一変数保型形式の次元公式 (cf. [11] 定理2.9) に代入して得られる。書き下す際, $M^{(1)}$ の具体的表示 (9) を用いる。

<u>Remark</u> 全く同じ手法で, Eの指標 σ に対し, σ 固有空間 $\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)$ の次元が計算される。すなわち, (ii) の手法においては $\dim_{\mathbb{C}} S_{k-1}(\Gamma', \overline{M^{(1)[\sigma]}})$ を求めれば良いし, (i) の手法においては, 次節でみるように $\varepsilon_p (\in E)$ の作用が $\underline{\underline{G}}'$ の Hecke 環の元 $\varphi_{0,p}$ の作用に他ならぬことから, $\mathrm{trace} \prod_{p|S} \varphi_{0,p}$ (S はDの約数) の計算から求まる。

§3. L関数

<u>1° Gの Hecke 環</u> $G_{\mathbb{Q}}^{+} = \{ g \in G_{\mathbb{Q}} \mid \mu(g) > 0 \}$ とおき, $\mathcal{H}$ で組 $(G_{\mathbb{Q}}^{+}, \Gamma)$ で定まる Hecke 環をあらわす。Gの強近似定理により, $\mathcal{H}$ は制限テンソル積 $\bigotimes_p \mathcal{H}_p$ に分解する。ここで $\mathcal{H}_p$ は, $G_p = G_{\mathbb{Q}_p}$ と $U_p = G_p \cap GL_4(\mathcal{O}_p)$ できまる Hecke 環。

$\mathcal{H}_p$ については，Satake同型により完全に記述されている (cf. [9])。今，生成元と関係式の形で具体的に書いておく。

$$C_{0,p} = \begin{cases} U_p \cdot diag(p,p,p,p) \cdot U_p & \text{if } p \nmid D, \\ U_p \cdot diag(\pi_p, p\pi_p^{-1}, p\overline{\pi}_p^{-1}, \overline{\pi}_p) \cdot U_p & \text{if } p \mid D, \end{cases}$$

$$C_{1,p} = U_p \cdot diag(p,p,1,1) \cdot U_p ,$$

$$C_{2,p} = U_p \cdot diag(p^2, p, 1, p) \cdot U_p ,$$

また，$K_p = \mathbb{Q}_p \oplus \mathbb{Q}_p$ のとき，$\pi_p = (p, 1)$ とし，$C_{3,p} = U_p \cdot diag(p\pi_p, \overline{\pi}_p, \overline{\pi}_p^{-1}, \overline{\pi}_p) \cdot U_p$，$C_{4,p} = \overline{C_{3,p}}$ とおく（混乱のおそれのない時には，$C_{i,p}$ を単に C_i と書く）。$\mathcal{H}_p$ の構造は次の通り。

$$(12)\quad \mathcal{H}_p = \begin{cases} \mathbb{C}[C_0, C_0^{-1}, C_1, C_2] & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = -1 \text{ or } 0, \\ \quad \text{ここで，} C_0, C_1, C_2 \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上独立.} & \\ \mathbb{C}[C_0, C_0^{-1}, C_1, C_2, C_3, C_4] & \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = 1, \\ \quad \text{ここで，} C_0, C_1, C_2, C_3 \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上独立で，} & \\ \quad (C_2 + (p+1)(p^2+1)C_0)^2 = C_0\{C_3C_4 + (p+1)C_1(C_3+C_4) + (p+1)^2 C_1^2\}. & \end{cases}$$

L関数の定義のため，$\mathcal{H}_p$-係数多項式 $P_p(T)$ を導入する。

$$(13)\quad P_p(T) = \begin{cases} \{1 - C_1 p^{-2} T + (C_2 + (p^3+p^2-p+1)C_0) p^{-3} T^2 - C_0 C_1 p^{-2} T^3 + C_0^2 T^4\} \\ \quad \times (1 - C_0 T^2) \qquad \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = -1, \\ \{1 - C_1 p^{-2} T + (C_2 + (p^2+p+1)C_0) p^{-3} T^2 - C_0(C_3 + C_4 + 2C_1) p^{-3} T^3 \\ \quad + (C_2 + (p^2+p+1)C_0) C_0 p^{-3} T^4 - C_1 C_0^2 p^{-2} T^5 + C_0^3 T^6\} \qquad \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = 1, \\ \{1 - (C_1 - (p^2-1)C_0) p^{-2} T + (C_2 - (p-1)C_0 C_1 + (p^3+p^2-p+1)C_0^2) T^2 \\ \quad - (C_1 - (p^2-1)C_0) C_0^2 p^{-2} T^3 + C_0^4 T^4\} \times (1 - C_0 T) \qquad \text{if } \left(\frac{K}{p}\right) = 0. \end{cases}$$

これは（基本的には）G_p の *local* Hecke *series* の分母に他ならない。すなわち，

$$(14)\qquad \sum_{m=0}^{\infty} T(m)(p^{-2}T)^m = P_p(T)^{-1}(1-p^{-2}c_0^e T^2)(1-c_0^e T^2),$$

ここで，$T(m)=\{g\in G_p\cap M_4(\mathcal{O}_p)\mid \mathrm{ord}_p\,\mu(g)=m\}$，$e$ は $K_p/\mathbb{Q}_p$ の分岐指数。

<u>Remark</u>　(13) から明らかなように，$\left(\frac{K}{p}\right)=-1,0$ のときは，(14) の表示は既約ではない。また，$\left(\frac{K}{p}\right)=-1$ の場合を除き，Hecke *series* は全 *similitudes* 群の場合のそれとは異なる。

$\mathcal{H}\ni\Gamma g\Gamma=\coprod_j \Gamma g_j$ (disjoint)，$F\in\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ のとき，

$$F|[\Gamma g\Gamma]_k(Z)=\sum_j F(g_j\langle Z\rangle)J(g_j,Z)^{-k}$$

として $\mathcal{H}$ は $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ に作用する。この作用は可換・正規であり，$\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ は $\mathcal{H}$ の同時固有関数からなる基底を有す。そこで，任意の $\phi\in\mathcal{H}$ に対し $F|[\phi]_k=\sigma_F(\phi)F$ のとき，F の L 関数 $L(F;s)$ を，

$$(15)\qquad L(F;s)=\prod_{p<\infty}\left\{\sigma_F(P_p(T))\big|_{T=p^{-s}}\right\}^{-1}\qquad(\mathrm{Re}\,s\gg 0),$$

と定義する。ここで，$\sigma_F(P_p(T))$ は $P_p(T)$ の係数を F の固有値でおきかえた $\mathbb{C}$ 係数多項式。

<u>2° G' の Hecke 環</u>　§1 で触れたように，Hecke 環は新谷先生により一般の $G_{n,m}$ に対し導入され，かつ *good prime*

では Satake 同型の成立が証明されている。

$\underline{G}'_{\mathbb{Q}}$ 上のスカラー値関数 φ で 条件

i) $\varphi(\gamma_1 g \gamma_2) = \varphi(g) \quad {}^\forall\gamma_1, {}^\forall\gamma_2 \in \underline{\Gamma}'$,

ii) $\varphi((0,0,z)g) = \mathbb{e}[rz]\,\varphi(g) \quad {}^\forall z \in \mathbb{Q}$,

iii) $|Z_{\mathbb{Q}}\underline{\Gamma}' \backslash \mathrm{supp}\,\varphi|$: finite ,

をみたすもののなす集合を $\mathcal{L}^{(r)}$ であらわす。これは convolution により $\mathbb{C}$-algebra をなし，1° と同様に $\otimes_p \mathcal{L}_p^{(r)}$ と局所的なものの制限テンソル積に分解する。 $\mathrm{supp}\,\varphi = \coprod_j Z_{\mathbb{Q}}\underline{\Gamma}' g_j$, $f \in \mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ のとき，

$$f|[\varphi]_{r,k}(Z) = \sum_j J_{r,k}(g_j, Z)^{-1} f(g_j\langle Z\rangle)\cdot\varphi(g_j^{-1})$$

により $\mathcal{L}^{(r)}$ は $\mathfrak{S}_{r,k}(\underline{\Gamma}')$ に作用する。

以下 $r=1$ とし，$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)}$ と書く。各素数 p に対し $\varphi_{1,p} \in \mathcal{L}$ を，$\varphi_{1,p}\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix} = 1$, $\mathrm{supp}\,\varphi_{1,p} = Z_{\mathbb{Q}}\underline{\Gamma}'\begin{pmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{pmatrix}\underline{\Gamma}'$,

として定義する。また $p|D$ のとき $\varphi_{0,p} \in \mathcal{L}$ を

$$\varphi_{0,p}((0,y,0)) = 1/p \quad \text{for } {}^\forall y \in \mathfrak{P}^{-1} \quad (\mathfrak{P}\text{ は } p \text{ の上にある ideal}),$$
$$\mathrm{supp}\,\varphi = Z_{\mathbb{Q}}\underline{\Gamma}'\{(0,y,0) \mid y \in \mathfrak{P}^{-1}\}\underline{\Gamma}'$$

と定義する。このとき，

$$(16) \qquad \mathcal{L}_p = \begin{cases} \mathbb{C}[\varphi_{1,p}] & \text{if } p \nmid D \qquad (\text{Shintani}), \\ \mathbb{C}[\varphi_{1,p}, \varphi_{0,p}] & \text{if } p | D , \end{cases}$$

ここで $\varphi_{0,p}^2 = 1$, $\varphi_{0,p}\varphi_{1,p} = \varphi_{1,p}\varphi_{0,p} = \varphi_{1,p}$.

となることがわかる，とくに，$\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ は $\mathcal{L}$ の同時固有

関数からなる基底をもつ。$f \in \mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ が，$\mathcal{L}$ の同時固有関数：$f|[\varphi]_{1,k} = \lambda_f(\varphi) f$ （$\forall \varphi \in \mathcal{L}$）のとき，$f$ の L 関数 $L(f\,;s)$ を，

$$(17)\quad L(f\,;s) = \prod_{p<\infty} \left\{1-\left(\lambda_f(\varphi_{1,p})-p(p-1)\left(\frac{K}{p}\right)\right)p^{-2-s}+\lambda_f(\varphi_{0,p})p^{-2s}\right\}^{-1}\cdot\left\{1-\left(\frac{K}{p}\right)p^{-s}\right\}^{-1} \quad (\mathrm{Re}\, s \gg 0)$$

と定義する。（ただし，$p\nmid D$ のとき $\lambda_f(\varphi_{0,p})=1$ とみる）

<u>Remark</u>　$\varphi_{0,p}$ の定義に基づく簡単な計算より，§2-4° で導入した $\varepsilon_p \in E$ の $\mathfrak{S}_{1,k}(\underline{\Gamma}')$ への作用は $\varphi_{0,p}$ のそれと一致することがわかる：$f|[\varphi_{0,p}]_{1,k} = f|[\varepsilon_p]$ for $\forall p|D$．(16) の関係式より，$\lambda_f(\varphi_{0,p})=-1$ ならば，$\lambda_f(\varphi_{0,p})=0$ である。また，$\lambda_f(\varphi_{0,p})$ の符号については，$\prod_{p|D,\ \mathrm{ord}_p D=\mathrm{odd}} \lambda_f(\varphi_{0,p}) = (-1)^k$ なる関係がある。

<u>3°　L 関数の分解</u>　定理 1 の同型写像は，1°，2° の Hecke 環の作用と両立する。すなわち，

<u>定理 3</u>　記号は今まで通りとする。

(i)　$\mathcal{M}_k(\Gamma)$ は，$\mathcal{H}$-stable。

(ii)　$F=F(f)\in\mathcal{M}_k(\Gamma)$ のとき

　F が $\mathcal{H}$ の同時固有関数 $\Longleftrightarrow$ f が $\mathcal{L}$ の同時固有関数

(iii)　そしてこのとき次の分解が成立。（$\zeta(s)$: Riemann zeta）

$$L(F(f)\,;s) = L(f\,;s)\,\zeta(s-1)\,\zeta(s)\,\zeta(s+1)\quad .$$

証明は，(多少繁雑にはなるが) [1] Theorem 1 の証明と同様に進行する。すなわち，まず Maass space における Hecke 環の作用の退化の様子を調べる。

- $\{[C_2]_k-(p^2+1)[C_1]_k\}|\mathcal{M}_k(\Gamma)=-(p^2+1)(p^3+1)$ if $\left(\frac{K}{p}\right)=-1$,
- $\{[C_3]_k-[C_4]_k\}|\mathcal{M}_k(\Gamma)=0$, $\{[C_3]_k-p(p+1)[C_1]_k\}|\mathcal{M}_k(\Gamma)=-p(p+1)^2(p^2+1)$,
  $\{[C_2]_k-(p+1)^2[C_1]_k\}|\mathcal{M}_k(\Gamma)=-(p+1)(p^2+1)(p^2+p+1)$ if $\left(\frac{K}{p}\right)=1$,
- $\{[C_2]_k-p(p+1)[C_1]_k\}|\mathcal{M}_k(\Gamma)=-p^2(p+1)(p^2+1)$,
  $[C_0]_k|\mathcal{M}_k^{[\sigma]}(\Gamma)=\sigma(\varepsilon_p)$ if $\left(\frac{K}{p}\right)=0$.

その後，$F(f)$ と f の固有値の関係

$$\sigma_{F(f)}(C_{1,p})=\begin{cases}\lambda_f(\varphi_{1,p})+p^2(p+1)+p\left(1+\left(\frac{K}{p}\right)\right) & \text{if } p\nmid D,\\ \lambda_f(\varphi_{1,p})+p^3+p^2+p-\lambda_f(\varphi_{0,p}) & \text{if } p\mid D,\end{cases}$$

を求めて，証明がおわる。

参考文献

[1] A.N.Andrianov : Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture, Inv. Math. 53 (1979), 267-280.

[2] H. Braun : Hermitian modular functions III, Ann. of Math. 53(1951), 143-160.

[3] M. Eichler : Über die Anzahl der linear unabhängigen Siegelschen Modulformen von gegebenem Gewicht, Math. Ann. 213 (1975), 281-291.

[4] H. Kojima : An arithmetic of hermitian modular forms of degree two, Inv. Math. 69 (1982), 217-227.

[5] N. Kurokawa : Examples of eigenvalues of Hecke operators on Siegel cusp forms of degree two, Inv. Math. 49 (1978), 149-165.

[6] H. Maass : Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III, Inv. Math. 52 (1979), 95-104, 53 (1979) 249-253, 53 (1979), 255-265.

[7] T. Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231 (1977), 97-144.

[8] N.S. Rege : On certain classical groups over Hasse domain, Math. Zeit. 102 (1967), 120-157.

[9] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$-adic fields, Publ. Math. IHES 18 (1963).

[10] 佐武一郎: ある群拡大とそのユニタリ表現について，数学 (1969), 241-253.

[11] 清水英男：保型関数 I，岩波講座　基礎数学 (1977).

[12] G. Shimura : Arithmetic of unitary groups, Ann. of Math. 79 (1964), 369-409.

[13] T. Shintani : On construction of holomorphic cusp forms of half-integral weight, Nagoya Math. J. 58 (1975), 83-126.

[14] D. Zagier : Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'apres H. Maass), Seminaire Delange-Pisot-Poitou (1980).