数理解析研究所講究録
第 546 巻 1985 年 79-92

Ankeny-Artin-Chowla 型の合同式について
(純4次及び純6次体の場合)

京大理 亀井真人 (Masato Kamei)

$K=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ を、d を判別式とする実2次体とし、K の類数、基本単数をそれぞれ h, $\varepsilon=\frac{s+t\sqrt{d}}{2}$ と表わす。d を割る奇素数 p をとり、$m=\frac{d}{p}$ とおく。mod d の Dirichlet 指標 $\left(\frac{d}{\cdot}\right)$ を p-part $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ と m-part $\chi(\cdot)$ の積に分解する。この時、Ankeny, Artin, Chowla [1] により、$h\frac{t}{s}\equiv B_{\frac{p-1}{2},\chi} \mod p$ となる事が知られている。ここで $B_{\frac{p-1}{2},\chi}$ は一般 Bernoulli 数である。

本稿の目的は次の①②である。

① A-A-c の結果を純4次体、純6次体の場合に拡張する事.

純3次体の場合の結果は伊藤博氏の論文[3]で得られている。本稿も伊藤氏の方法によるものである。その際得られる結果（定理6）は、複素数の巾根の選び方から生じる不定性を持っている。そこで、

② 特殊な場合についてその巾根を決定し、それにより①の結果を精密化する事。

純3次体の場合には、②の議論は自明となる。以下では純4次体の場合を主に解説し、純6次体の場合は結果のみを記す。まず、①の結果を導びく過程の概略を述べよう。

$L_1=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$, $k_1=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $M=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m}, i)$, $k=\mathbb{Q}(i)$ とおく。誘導指標に対する Artin L-関数の関係より、

$$L(s, \chi, L_1/k_1) = L(s, \rho, M/k) \cdot L(s, \bar{\rho}, M/k)$$

を得る。ここで、χ は $Gal(L_1/k_1)$ の位数2の指標、ρ は $Gal(M/k)$ の位数4の指標である。適当な L_1 の単数 η_3 と M の楕円単数 η_e を選べば、$L'(0, \chi, L_1/k_1) = h\log\eta_3$, $L'(0, \rho, M/k) = \log\eta_e$（$h$ は L_1/k_1 の相対類数）と表わされ、$\eta_3{}^h=\eta_e$ となる。k における m の素因数 π をとり、η_3, η_e を局所体 $\overline{k_\pi}$ の元と見なして Kummer 対数微分をとれば、

$h\times$（η_3の係数の分数式）$\equiv$（一般 Hurwitz 数） mod（付値 ideal）

なる式を得る。これが①に対する我々の結果である。§2までで正確に記述する。

§1 $L'(0, \chi, L_1/k_1)$ 及び $L'(0, \rho, M/k)$

$m=ab^2c^3$, $a\neq 1$, b, c は平方因子を持たない正整数で、$a, b, c, 6$ はどの2つも互いに素であるとする。拡大 L_1/k_1 の相対単数を η_0, k_1 の基本単数を ε とおき、L_1 の単数 η_3 を

$$\eta_3 = \begin{cases} \eta_0 & \cdots \sqrt{\varepsilon\eta_0} \text{ が } L_1 \text{ の単数の時} \\ \eta_0^2 & \cdots \text{その他} \end{cases}$$

と定めると、相対単数基準 R_{L_1/K_1} は $R_{L_1/K_1} = \log \eta_3$ で表わされる。これより $L'(0, \chi, L_1/K_1) = h \log \eta_3$ が従う。

f を ρ の導手とする。($f \in N$ となる。) $O_K = \mathbb{Z}[i]$ の f を法とする ray class group を $Cl(f)$ と書けば、partial ζ-関数を用いて

$$L'(0, \rho, M/K) = \sum_{c \in Cl(f)} \rho(c)\, \zeta'(0, c) \qquad \text{--- (1)}$$

となる。ここで、$\varphi_f(c)$ を Siegel-Ramachandra-Robert の類不変量とすると $\zeta'(0, c) = -\frac{1}{6f} \log |\varphi_f(c)|$ である。$L(s, \rho, M/K) = L(s, \bar{\rho}, M/K)$ を思い出せば、(1) の右辺の和は $\rho(c) = \pm 1$ なる c についてのみ考えればよい事がわかり、

$$L'(0, \rho, M/K) = \frac{1}{12f} \log \frac{\prod_{\rho(c)=-1} \varphi_f(c)\,\overline{\varphi_f(c)}}{\prod_{\rho(c)=1} \varphi_f(c)\,\overline{\varphi_f(c)}} \qquad \text{--- (2)}$$

を得る。さて、$c, c' \in Cl(f)$ に対して、$\varphi_f(c)^{\sigma_{c'}} = \varphi_f(cc')$ ($\sigma_{c'}$ は c' に対応する $Gal(K_f/K)$ の元)、及び $\varphi_f(c)/\varphi_f(c')$ が K_f (K の mod f の maximal ray class field) の単数の $12f$ 乗となっている事が知られている。従って、$\rho(C_\gamma) = -1$ となる $\gamma \in O_K$ をとり $\eta^f = \frac{\varphi(C_\gamma)}{\varphi(C_1)}$ となる K_f の単数 η をとると、

$$L'(0, \rho, M/K) = \frac{1}{12} \log (N_{K_f/M}\, \eta\bar{\eta}) \qquad \text{--- (3)}$$

となる。このηは具体的には次のように書かれる。(Robert [7] 参照)

$E: y^2=4x^3-4x$ を $\mathcal{O}_K$ を準同型環として持つ楕円曲線とし、$\Omega\mathcal{O}_K=\mathcal{L}$ を E に対応する周期格子とする。(すなわち、$\xi: \mathbb{C}/\mathcal{L}\to E$ $\xi(z)=(\wp(z), \wp'(z))$ が同型となる格子である。) $\Omega\in\mathbb{R}_+$ としてよい。$\sigma(z)$ を Weierstrass σ-関数とし、$\theta(z)$ 及び $\phi(z,\alpha)$ $(\alpha\in\mathcal{O}_K)$ を $\theta(z)=\Delta(\mathcal{L})\sigma^{12}(z)$, $\phi(z,\alpha)=\theta(\alpha z)/\theta(z)^{N\alpha}$ で定める。この時 $\phi(z,\alpha)$ は楕円函数であり、

$$\phi(z,\alpha)=\alpha^{12}\Delta(\mathcal{L})^{1-N\alpha}\prod_{\beta\in\alpha^{-1}\mathcal{L}/\mathcal{L}}'(\wp(z)-\wp(\beta))^6$$

となる。有限添字集合 J 及び、$\beta_j\in\mathcal{O}_K$, $m_j\in\mathbb{Z}$ $(j\in J)$ を

$$N\delta-1+\sum_{j\in J}m_j(N\beta_j-1)=0$$

$$\rho(c_{\beta_j})=1, \quad (\beta_j, 6f)=1$$

となるように選ぶ。ここで $\tau=\frac{\Omega}{f}$ とすると

$$\eta=\phi(\tau,\delta)\prod_{j\in J}\phi(\tau,\beta_j)^{m_j}$$

となる。対数微分を取る際、ηが℘関数の特殊値で表わされている事が重要となる。

§2 一般 Hurwitz 数、Kummer 対数微分、及び主定理

χ を $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[i]$ の mod f の原始指標、τ を $\mathbb{C}/\mathcal{L}$ の原始 f 分点としよう。(K, $\mathcal{L}$ 以外は先の記号と無関係とする。) 非負整数

k に対して $G_{k,\chi,\tau}$ を Lichtenbaum [4] による一般 Hurwitz 数とする。$G_{k,\chi,\tau}$ は Weierstrass ζ-関数を用いて定義される数であるが、我々は次の等式を利用する。

命題 1　$\chi(-1)=1$ の時、$\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha \bmod f \\ (\alpha,f)=1}} \chi(\alpha)^{-1} \frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(\alpha\tau)} = -\sum_{k=0}^{\infty} G_{k,\chi,\tau} z^{k-1}$

以後、前節までの記号を用いる。ψ を E の虚数乗法に対応する量指標とする。この時、f と素な K の ideal $\mathfrak{a}$ に対し、$\psi(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の一つの生成元となっている。$\mathfrak{a}=(\alpha)$ の時 $\alpha^*=\psi(\mathfrak{a})$ と定めると α^* は $\alpha^* \equiv 1 \mod (1+i)^3$ となる $\mathfrak{a}$ の生成元である。

a を割る $\mathcal{O}_K$ の素数 π をとる。(つまり、π は m を丁度 1 回だけ割り切る。) $\pi=\pi^*$ としてよい。m, $f=\text{cond}\,\rho$, $\rho=\left(\frac{m}{\cdot}\right)_4$, $\tau=\frac{\rho}{f}$ を π-part と π と素な part に分解する。

- $m=\pi m_2$
- $f=\pi f_2$
- $\rho(\cdot)=\left(\frac{m}{\cdot}\right)_4=\chi_1(\cdot)\chi_2(\cdot)$, $\text{cond}\,\chi_1=\pi$, $\text{cond}\,\chi_2=f_2$
- $\tau\equiv\tau_1+\tau_2 \mod \mathfrak{L}$, τ_1 : π 等分点, τ_2 : f_2 等分点.

$G_{k,\chi_2}=G_{k,\chi_2,\tau_2}$, $G_{k,\chi_2^{-1}}=G_{k,\chi_2^{-1},\tau_2}$ を一般 Hurwitz 数とする。

補題 2　i) G_{k,χ_2}, $G_{k,\chi_2^{-1}} \in K_{f_2}$ (conductor f_2 の max. ray class field)

ii) $G_{k,\chi_2}/\sqrt[4]{m_2}$, $G_{k,\chi_2^{-1}}/\sqrt[4]{m_2}^3 \in K(\sqrt{2})$

iii) $m=p$, p : 有理素数, $p\equiv 3 \mod 4$, $\pi=-p$ の時は

$G_{k,\chi_2}/\sqrt{2}$, $G_{k,\chi_2^{-1}}/\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

命題1に $Gal(K^{ab}/K)$ を作用させて i) ii) が示される。iii) は直接計算により示される。

さて、概略に述べたように、K_f の楕円単数 η の Kummer 対数微分が G_{k,α_2} 及び $G_{k,\alpha_2'}$ で表わされる事を示そう。K に E の α 等分点の座標を付加してできる体を $K(E_\alpha)$ と書く。$K(E_f)$ を $\mathbb{C}_p$ ($\overline{\mathbb{Q}}_p$ の完備化) に埋め込み、この埋め込みに関する $K(E_f)$, $K(E_{f_2})$, $K(E_\pi)$, K の完備化をそれぞれ $K_{\mathfrak{F}}$, $K_{\mathfrak{q}}$, $K_{\mathfrak{P}}$, $K_{\mathfrak{p}}$ で表わす。$K_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{q}}$, $K_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$ は完全分岐拡大、$K_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{P}}$, $K_{\mathfrak{q}}/K_{\mathfrak{p}}$ は不分岐拡大である。Λ を $K_{\mathfrak{P}}$ の素元とすれば、$K_{\mathfrak{P}} = K_{\mathfrak{p}}(\Lambda)$, $K_{\mathfrak{F}} = K_{\mathfrak{q}}(\Lambda)$ となる。Coates-Wiles [2] により、$\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{p}}}$ 上の3つの形式群

G_a: formal additive group

$\hat{E}$: formal group of kernel of reduction mod $\mathfrak{p}$

Σ: basic Lubin-Tate group

を考え、$\delta: G_a \to \hat{E}$　$w: \hat{E} \to \Sigma$ を $K_{\mathfrak{p}}$ 上の同型写像とする。$\lambda_1 = \dfrac{-2\wp(\tau_1)}{\wp'(\tau_1)}$, $\Lambda_1 = w(\lambda_1)$ とおけば、λ_1, Λ_1 は $K_{\mathfrak{P}}$ の素元であり、$\lambda_1 \equiv \Lambda_1 \mod \mathfrak{P}^2$ が成り立つ。以後、拡大 $K_{\mathfrak{F}}/K_{\mathfrak{q}}$ に対する Kummer 対数微分 $\varphi_k : K_{\mathfrak{F}}^{\times} \to \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{q}}}/\mathfrak{q}\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{q}}}$　($1 \leq k \leq q-1$, $q = \pi\bar{\pi}$) を $\varphi_k = \varphi_{k,\Lambda_1}$ で定義する。

<u>注意3</u>　埋め込み $K(E_{\mathfrak{p}}) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ によって $\lambda_1 = \dfrac{-2\wp(\tau_1)}{\wp'(\tau_1)}$ は $\mathbb{C}_p$ の元とみなせ、それにより Λ_1 は $\pi + X^{q-1} = 0$ の根のうち $\lambda_1 \equiv \Lambda_1 \mod \mathfrak{P}^2$

となる $\mathbb{C}_p$ の元として一意に定まるが、単に $\overline{\mathbb{Q}}$ の元としては λ_1 に対応すべき $\pi + X^{q-1} = 0$ の根は定まらない。これが ① に関する不定性である。

以上の準備の下で次の定理が成り立つ。

<u>定理 4</u>

$$\varphi_k(\eta_e) = \begin{cases} -\frac{1}{4} G_{\frac{q-1}{4}, \chi_2} & \bmod \mathfrak{q} \quad \cdots \ k = \frac{q-1}{4} \\ -\frac{1}{4} G_{\frac{3}{4}(q-1), \chi_2^{-1}} & \bmod \mathfrak{q} \quad \cdots \ k = \frac{3}{4}(q-1) \\ 0 & \bmod \mathfrak{q} \quad \cdots \ \text{その他の } k \end{cases}$$

（証明） Coates-Wiles [2] により、

$$\varphi_k(\phi(\tau_1 + \mu\tau_2, \delta)) = \left(\begin{array}{l} z\frac{d}{dz}\log(\phi(z+\mu\tau_2, \delta)) \text{ の } z=0 \text{ での Taylor} \\ \text{展開の } z^k \text{ の係数} \quad \bmod \mathfrak{q} \end{array} \right)$$

ところで、 $N_{K_f/M}\, \phi(\tau, \delta)^{16} = \prod_{\substack{\alpha \bmod f \\ (\alpha, f)=1}} \phi(\alpha\tau, \delta)^{1+\rho(\alpha)+\rho^2(\alpha)+\rho^3(\alpha)}$ より、

$$16\, \varphi_k(N_{K_f/M}\, \phi(\tau, \delta))$$

$$= \sum_{\mu \in (\mathcal{O}/f_2)^\times} \sum_{\nu \in (\mathcal{O}/\pi)^\times} \left(1 + \chi_1(\nu)\chi_2(\mu) + \chi_1^2(\nu)\chi_2^2(\mu) + \chi_1^3(\nu)\chi_2^3(\mu)\right) \varphi_k(\phi(\nu\tau_1 + \mu\tau_2, \delta))$$

$\varphi_k(\phi(\nu\tau_1 + \mu\tau_2, \delta)) = \varphi_k(\phi(\tau_1 + \mu\tau_2, \delta)^{\sigma_\nu}) = \nu^k \varphi_k(\phi(\tau_1 + \mu\tau_2, \delta))$ を用いて、$\varphi_k(N_{K_f/M}\, \phi(\tau, \delta))$ の計算を $\phi(z + \mu\tau_2, \delta)$ の対数微分の Taylor 展開に帰着させれば

$$16\, \varphi_k(N_{K_f/M}\, \phi(\tau, \delta)) = \begin{cases} 12\,(\rho(\delta) - N\delta)\, G_{k, \chi_2} & k = \frac{1}{4}(q-1) \\ 12\,(\rho(\delta) - N\delta)\, G_{k, \chi_2^{-1}} & k = \frac{3}{4}(q-1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る。これより定理が従う。

次に $\eta_3 = s + t\sqrt[4]{m} + u\sqrt{m} + v\sqrt[4]{m^3}$ とおく。$\Lambda_1^{q-1} = -\pi$ だったから、$\sqrt[4]{m} = \Lambda_1^{\frac{q-1}{4}}\xi$ と ξ を定義すれば $\xi^4 = -m_2$ である。これより、$\eta_3 = s + t\xi\Lambda_1^{\frac{q-1}{4}} + u\xi^2\Lambda_1^{\frac{q-1}{2}} + v\xi^3\Lambda_1^{\frac{3}{4}(q-1)}$。

$L_1 \subset M \subset K_{\mathfrak{q}}$ によって η_3 を $K_{\mathfrak{q}}$ の単数と考え、$\varphi_k(\eta_3)$ を求めたい。（勿論この値は Λ_1 の取り方及び M の $\mathfrak{q}$ 上の素 ideal $\mathfrak{Q}$ の取り方によっている。）Coates-Wiles [2] によって $\varphi_k(\eta_3)$ は

$f(T) = s + t\xi T^{\frac{q-1}{4}} + u\xi^2 T^{\frac{q-1}{2}} + v\xi^3 T^{\frac{3(q-1)}{4}}$ の対数微分の係数として与えられる。従って

<u>定理5</u> i) $\varphi_{\frac{q-1}{4}}(\eta_3) = -\frac{1}{4}st\xi$

ii) $\varphi_{\frac{3}{4}(q-1)}(\eta_3) = -\frac{1}{4}(3sv - tu)\xi^3$

iii) $\varphi_k(\eta_3) = 0 \quad \text{for } k \neq \frac{1}{4}(q-1),\ \frac{3}{4}(q-1)$

定理4との比較により

<u>定理6</u> $K(E_f)$ の (π) 上の素 ideal $\mathfrak{Q}$ を一つ固定して Λ_1 を決める。この時

i) $k = \frac{N\pi-1}{4} \Rightarrow hst \equiv G_{k,\chi_2}/\xi \mod \mathfrak{Q}$

ii) $k = \frac{3}{4}(N\pi-1) \Rightarrow h(3sv - tu) \equiv G_{k,\chi_2^{-1}}/\xi^3 \mod \mathfrak{Q}$

ただし、$\xi = \sqrt[4]{m}/\Lambda_1^{\frac{N\pi-1}{4}}$ は $-m_2$ の4乗根のうちの一つであり、$\mathfrak{Q}$ に依存して決まる。

実際に $\mathfrak{Q}$ を固定した時 ξ が何になるかを決定するのは、k 上で4乗剰余の Gauss 和の偏角を決定するのと同様の難かしさがある。（もっとも、h の divisibility を知るだけなら ξ の逐

び方とは無関係)　$m=p$：有理素数、$p\equiv 3 \mod 4$ の時は $\pi=-p$ となるので ξ は1の4乗根である。この場合の $\mathfrak{L}$ と ξ の関係を次節以降で調べる。

§3 $\frac{1}{4}$-set

p を法4で3と同値な有理素数、$\pi=-p$ とおく。E に対する $\wp(z)$, $\wp'(z)$ の π-等分点の値について $\prod_{\alpha\in(\mathcal{O}/\pi)^\times}\wp(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)=\pi^{-2}$, $\prod_{\alpha\in(\mathcal{O}/\pi)^\times}\wp'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)=(-64)^{\frac{N\pi-1}{4}}\pi^{-3}$ が成り立つ。$q=N\pi=p^2$ とおくと

$$\prod_{\alpha\in(\mathcal{O}/\pi)^\times}\frac{-2\wp(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}{\wp'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)} = -p/16^{\frac{q-1}{8}} \in -\mathbb{R}_+$$

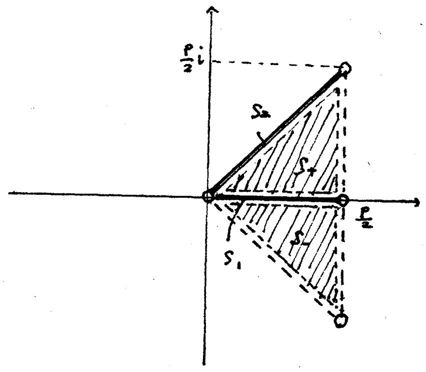
Matthews [5] によって $\frac{1}{4}$-set を導入しよう。$(\mathcal{O}_K/\pi)^\times$ における $(\mathcal{O}_K/\pi)^\times/\mu_4$ の完全代表系 S を $\frac{1}{4}$-set と呼ぶ。このとき、$(\mathcal{O}_K/\pi)^\times = S \amalg (iS) \amalg (-S) \amalg (-iS)$ となる。$G(S)=\prod_{\alpha\in S}\frac{-2\wp(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}{\wp'(\frac{\alpha}{\pi}\Omega)}$ と $G(S)$ を定義すると、$\beta\in(\mathcal{O}/\pi)^\times$ に対して $G(\beta S)=\left(\frac{\beta}{\pi}\right)_4 G(S)$ が成立する。ここで、$\left(\frac{\cdot}{\cdot}\right)_4$ は4乗剰余記号である。従って、

$$G(S)^4 = G(S)G(iS)G(-S)G(-iS) = -p/16^{\frac{q-1}{8}}$$

$$\therefore G(S) = \pm\frac{\sqrt[4]{p}}{2^{\frac{q-1}{8}}}\zeta_8 \quad \text{又は} \quad \pm i\frac{\sqrt[4]{p}}{2^{\frac{q-1}{8}}}\zeta_8$$

$\alpha(S)\in(\mathcal{O}_K/\pi)^\times$ を、$\alpha(S)=\prod_{\beta\in S}\beta$ と定義すれば、$\alpha(S)$ は $(\mathcal{O}_K/\pi)^\times$ における1の原始8乗根であり、$G(S)$ は $\alpha(S)$ にしかよらない。そこで、$G(S)=G_{\alpha(S)}$ と書く。$\alpha\in\mu_4$ に対して $G_{\alpha\beta}=\alpha G_\beta$ とな

っているので、特殊な S について $\alpha(S)$ と $G(S)$ を決めれば G_β ($\beta \in \mu_8 - \mu_4$) は決まる。そこで、次のように S をとる。



$S = S_1 \amalg S_2 \amalg S_3 \amalg S_4$

$S_1 = \{ a \mid 1 \leq a \leq \frac{p-1}{2} \}$

$S_2 = \{ (1+i)a \mid 1 \leq a \leq \frac{p-1}{2} \}$

$S_+ = \{ a+bi \mid 2 \leq a \leq \frac{p-1}{2},\ 0 < b < a \}$

$S_- = \{ a-bi \mid 2 \leq a \leq \frac{p-1}{2},\ 0 < b < a \}$

この時 $\beta \in S$ に関して $\wp(\frac{\beta}{\pi}\Omega)$, $\wp'(\frac{\beta}{\pi}\Omega)$ の偏角のみに注意すると、$G(S) \in \zeta_8^{\frac{p-1}{2}} \mathbb{R}_+$ がわかる。従って

$$G(S) = \zeta_8^{\frac{p-1}{2}} \frac{4\sqrt{p}}{2^{\frac{3-1}{8}}}$$

他方 $\alpha(S)$ に関しては $N: \mathbb{F}_{p^2}^\times \longrightarrow \mathbb{F}_p^\times$ について

○ $p \equiv 3 \mod 8$ の時

$(\frac{2}{p}) = -1$ より $N(a+ai) = 2a^2$ は平方非剰余、従って、

$N: S_1 \cup S_2 \longrightarrow \mathbb{F}_p^\times$ は全単射であり、$N: S_+ \to \mathbb{F}_p^\times$ は $\frac{p-3}{8} : 1$ の全射となる。このとき

$$\alpha(S) = \prod_{\alpha \in S} \alpha = \Big(\prod_{\alpha \in S_1} \alpha\Big) \Big(\prod_{\alpha \in S_2} \alpha\Big) \Big(\prod_{\alpha \in S_+} N\alpha\Big)$$
$$= (-1)^{\frac{p-3}{8}} (1+i)^{\frac{p-1}{2}}$$

○ $p \equiv 7 \mod 8$ の時

$(\frac{2}{p}) = 1$ より $N(a+ai) = 2a^2$ は平方剰余、従って $N: S_+ \to \mathbb{F}_p^\times$ は平方剰余の上へ $(\frac{p+1}{8} - 1) : 1$ 非剰余の上へ $\frac{p+1}{8} : 1$ となっており、

$$
\begin{aligned}
\alpha(S) &= \Big(\prod_{\alpha\in S_1}\alpha\Big)\Big(\prod_{\alpha\in S_2}\alpha\Big)\Big(\prod_{\alpha\in S_+} N\alpha\Big)\\
&= \Big(\prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} a\Big)\Big(\prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}} (1+i)a\Big)\Big(\prod_{\beta\in\mathbb{F}_p^{\times 2}}\beta\Big)^{\frac{p-7}{8}}\Big(\prod_{\beta\in\mathbb{F}_p^{\times}-\mathbb{F}_p^{\times 2}}\beta\Big)^{\frac{p+1}{8}}\\
&= (-1)^{\frac{p+1}{8}}(1+i)^{\frac{p-1}{2}}
\end{aligned}
$$

両者を合わせて $\alpha(S) = (-1)^{[\frac{p+1}{8}]}(1+i)^{\frac{p-1}{2}} \mod \pi$

を得る。

§4 ξ の決定

π, P を前節通りとすると $f = \mathrm{cond}\, P = 4P$ となり、$4\tau_1 = \frac{-1}{\pi}\Omega \mod \mathcal{L}$ となる。$\lambda_1 = \dfrac{-2\wp(\tau_1)}{\wp'(\tau_1)}$, $\Lambda_1 = w(\lambda_1)$ であり, λ_1, Λ_1 は $K_{\mathfrak{p}}$ の素元で $\Lambda_1^{q-1} + \pi \equiv 0$, $\lambda_1 \equiv \Lambda_1 \mod \mathfrak{p}^2$ が成立している。さて, Λ を K_q 上の既約方程式 $T^{q-1} + \pi = 0$ の根としよう。ただし, Λ が K_q の閉体の中で何になるかは問題としない。この時, $T^{q-1} + \pi = 0$ は $K_q(\Lambda)$ で完全分解され、根の全体は $\{\Lambda, \zeta\Lambda, \cdots \zeta^{q-1}\Lambda\}$ となる。ζ は 1 の原始 $q-1$ 乗根である。埋め込み $K_q(\lambda_1) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定して $\lambda_1 \in \mathbb{C}_p$ と見なす。すると, いかなる埋め込み $K_q(\Lambda) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ に対しても $K_q(\lambda_1) = K_q(\Lambda)$ となるが、Λ_1 が $\{\Lambda, \cdots, \zeta^{q-1}\Lambda\}$ のどの元になるかは埋め込みによる。この事を代数体の levelで考えよう。以下、全ての代数体は $\mathbb{C}$ の部分体と考える。

$$(\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K)^\times \cong \mathrm{Gal}\,(K(\lambda_1)/K) \cong \mathrm{Gal}\,(K_q(\lambda_1)/K_q)$$

により，$(\mathcal{O}/\pi\mathcal{O})^\times \ni \nu$ に対応する $Gal(K_\mathfrak{f}(\lambda_1)/K_\mathfrak{f})$ の元を σ_ν と書く。$K_\mathfrak{f}(\lambda_1)=K_p(\Lambda)$ より σ_ν を Λ にも作用させれば，

$$\lambda_1^{\sigma_\nu} = \left(\frac{-2\wp(\tau_1)}{\wp'(\tau_1)}\right)^{\sigma_\nu} = \frac{-2\wp(\nu\tau_1)}{\wp'(\nu\tau_1)}$$

$$\Lambda^{\sigma_\nu} = \zeta_\nu\Lambda \quad , \zeta_\nu \in \mu_{\mathfrak{g}-1} \quad \nu \equiv \zeta_\nu \mod \mathfrak{p}$$

となる。従って，前節の $\frac{1}{4}$-set S に対し，

$$\prod_{\nu\in S} \lambda_1^{\sigma_\nu} = \prod_{\nu\in S}\Lambda^{\sigma_\nu} \mod \mathfrak{p}^{\frac{\mathfrak{g}-1}{4}+1}$$

$$\text{i.e.} \quad G(-\tfrac{1}{4}S) \equiv \alpha(S)\,\Lambda^{\frac{\mathfrak{g}-1}{4}} \mod \mathfrak{p}^{\frac{\mathfrak{g}-1}{4}+1}$$

これより $G(S)/\alpha(S) \equiv \Lambda^{\frac{\mathfrak{g}-1}{4}} \mod \mathfrak{p}^{\frac{\mathfrak{g}-1}{4}+1}$ が得られる。前節の結果と合わせて

$$\xi = \sqrt[4]{p}/\Lambda^{\frac{\mathfrak{g}-1}{4}} \equiv (-1)^{[\frac{p+1}{8}]}(1+i)^{\frac{p-1}{2}}\,2^{\frac{\mathfrak{g}-1}{2}}/\zeta_8^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\equiv \begin{cases} -\sqrt{2}\ \ 2^{\frac{p-3}{4}} \mod \mathfrak{p} & \text{if } p\equiv 3,7 \quad (16) \\ \sqrt{2}\ \ 2^{\frac{p-3}{4}} \mod \mathfrak{p} & \text{if } p\equiv 11,15 \quad (16) \end{cases}$$

最終的には

__定理7__　$p\equiv 3 \mod 4$，$L_1=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{p})$，$h=h_{L_1}/h_{K_1}$，$\eta_3 = s+t\sqrt[4]{p}+u\sqrt{p}+v\sqrt[4]{p^3}$，$k_0=\frac{p^2-1}{4}$ とすると，p を法として

i) $$hst \equiv 2^{\frac{p+1}{4}}G_{k_0,x_2}/\sqrt{2} \times \begin{cases} 1 & p\equiv 3,15 \mod 16 \\ -1 & p\equiv 7,11 \mod 16 \end{cases}$$

ii) $$h(3sv-tu) \equiv 2^{\frac{p+1}{4}}G_{3k_0,x_2}/\sqrt{2} \times \begin{cases} 1 & p\equiv 11,15 \mod 16 \\ -1 & p\equiv 3,7 \mod 16 \end{cases}$$

(i) ii) 共右辺は有理数なので合同式は意味を持つ。)

__例8__　$p=7$ とすると，

$\eta_3 = 43 + 26\sqrt[4]{7} + 16\sqrt{7} + 10\sqrt[4]{7^3}$

$h_{K_1}=1,\quad h_{L_1}=2,\quad h=2$

$\therefore\ hst \equiv 3\ ,\ h(3sv - tu) \equiv 5 \mod 7$

$G_{12,\chi_2} = \sqrt{2} \times 11232/25 \equiv \sqrt{2} \mod 7$

$G_{36,\chi_2} = \sqrt{2} \times 1447788874210204192/127679296875 \equiv 4\sqrt{2} \mod 7$

$\therefore\ -2^{\frac{p+1}{4}} G_{12,\chi_2}/\sqrt{2} \equiv 3\ ,\ -2^{\frac{p+1}{4}} G_{36,\chi_2}/\sqrt{2} \equiv 5 \mod 7$

§5 純6次体の場合

$L_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{m})$, $m = ab^2c^3d^4e^5$, $a \neq 1$, b, c, d, e, は正整数、square free で, $a, \cdots, e, 6$ はどの 2 つも互いに素とする。L_1 の部分体を $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, $F_1 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{m})$ とおき、K_1, F_1 の基本単数を $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ とおく。L_1 の単数群を $\mho_{L_1}$ と書く。η_0 を $N_{L_1/K_1}\eta_0 = 1$, $N_{L_1/F_1}\eta_0 = 1$ となる 1 より大きい最小の L_1 の単数とし、$\mho_0 =$ 仕リ $\times \varepsilon_2^{\mathbb{Z}} \times \varepsilon_3^{\mathbb{Z}} \times \eta_0^{\mathbb{Z}}$ とおく。a を割る $\mathbb{Q}(\zeta_3)$ の素数 π をとる。$E: y^2 = 4x^3 - 1$ に対する量指標 ψ に関し、$\psi(\pi) = \pi$ を仮定する。$\rho = \left(\frac{m}{\cdot}\right)_6$ の π と素な part χ_2 と適当な (cond χ_2)-等分点 τ_2 に対して $G_{k,\chi_2^{\pm1}} = G_{k,\chi_2^{\pm1},\tau_2}$ を一般 Hurwitz 数とすると、$-\frac{m}{\pi}$ の適当な 6 乗根 ξ に対し、

<u>定理 9</u>

- $\dfrac{h_{L_1}}{h_{K_1}h_{F_1}}\dfrac{6}{|\mho_{L_1} : \mho_0|}\, t \equiv G_{k_0,\chi_2}/\xi \mod \mathfrak{p}$
- $\dfrac{h_{L_1}}{h_{K_1}h_{F_1}}\dfrac{6}{|\mho_{L_1} : \mho_0|}(5\chi - tw) \equiv G_{5k_0,\chi_2^{-1}}/\xi^5 \mod \mathfrak{p}$

ここで $k_0 = \frac{N\pi - 1}{6}$ であり、$\mathfrak{P}$ は (π) 上のある素 ideal である。特に $P \equiv -1 \bmod 9$ かつ $P \equiv 1 \bmod 4$ の時は $\chi_2 =$ trivial, $\mathfrak{J} = 1$ となり、合同式が不定性なく記述される。

文献

[1] N. Ankeny, E. Artin and S. Chowla : The class number of real quadratic fields. Ann. of Math (2) 56 (1952) 479-493

[2] J. Coates and A. Wiles : On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer. Invent Math 39 223-251 (1977)

[3] H. Ito : Congruence relations of Ankeny-Artin-Chowla type for pure cubic fields. preprint

[4] S. Lichtenbaum : On p-adic L-functions associated to elliptic curves. Invent. Math 56 (1980) 19-55

[5] C.R. Matthews : Gauss sums and elliptic functions, II. The Quartic sum. Invent Math 54 (1979) 23-52

[6] K. Nakamura : Class number calculation and elliptic units I, II, III. Proc. Japan Acad 57A (1981) 56-59, 117-120, 363-366.

[7] G. Robert : Unités elliptiques. Bull. soc. Math. France. Memoire 36 (1974)

[8] M. Kamei : Congruence Relations of Ankeny-Artin-Chowla Type for pure Quartic and Sectic Fields 修論. 1984