数理解析研究所講究録
第 546 巻 1985 年 126-137

$\mathfrak{p}$進体上の交代行列の空間における球関数

立教大理　佐藤文広　(Fumihiro Sato)
信州大理　広中由美子 (Yumiko Hironaka)

§0. $\mathfrak{p}$進体 $k_{\mathfrak{p}}$ 上の reductive 代数群 G, G の good maximal compact subgroup K に対して, Hecke環 $\mathcal{H}(G, K)$ を考える。G の等質空間 X が与えられたとき, $\mathcal{H}(G, K)$ は X 上の K-不変な関数からなる関数空間に自然に作用する。このようにして得られる Hecke環 module の構造を調べることは, 興味深い問題である。実際, $G = G_1 \times G_1$, $K = K_1 \times K_1$, $X = G_1$ として, G の X への作用が, $g \cdot x = (g_1, g_2) \cdot x = g_1 x g_2^{-1}$ で与えられる場合には, この問題は, G の帯球関数の理論に他ならない。

さて, 我々は, 本稿において,

$$G = GL(2n, k_{\mathfrak{p}})$$
$$K = GL(2n, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}) \qquad \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}$$
$$X = \{x \in M(2n, k_{\mathfrak{p}}) \mid {}^t x = -x,\ \det x \neq 0\} \cong GL(2n, k_{\mathfrak{p}}) / Sp(n, k_{\mathfrak{p}})$$

の場合に調べ、球関数、球Fourier変換の理論を構成する（§1, Th. A, B, C）。

又、X上の"球関数"は、（合同式の解の密度として定義される）いわゆる"local density"と密接な関係がある（§1, Th D）。この関係を利用して、交代行列の"local density"のexplicite formulaeを求めることができる（§1, Th E）。

以下の議論は、$GL(m, k_{\mathfrak{p}})$の球関数についての詳しい情報（[1], [2]）に基いている。

§1.

1° $k = k_{\mathfrak{p}}$: $\mathfrak{p}$-進体, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} = \pi\mathcal{O}$, $q = \# \mathcal{O}/\mathfrak{p}$

$G := GL(2n, k)$, $K = GL(2n, \mathcal{O})$

$X := \{x \in G \mid {}^t x = -x\}$, $J_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J_n := \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_1 \end{pmatrix}$

とすると、GはX上に、$g \cdot x = g x {}^t g$ $(g \in G,\ x \in X)$ により作用する。$x \in X$に対し、$Pf_i(x)$でxの初めの2i次小行列のpfaffianを表わす。$x \in X$と、複素変数$s = (s_1, \cdots, s_n)$について、

$$\zeta_{\mathfrak{p}}(x ; s) := \int \prod_{i=1}^{n} |Pf_i(k \cdot x)|_{\mathfrak{p}}^{s_i} \, dk ,$$

ただし、dkはK上のHaar measureで$\int_K dk = 1$, 積分領域は、$\{k \in K \mid \prod_{i=1}^{n} Pf_i(k \cdot x) \neq 0\}$とする、

と定める。積分$\zeta_{\mathfrak{p}}(x ; s)$は、$\mathrm{Re}\, s_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$において絶

対収束し、sの関数として$\mathbb{C}^n$全体に解析接続されることがわかる。(実は、$q^{-s_1}, \cdots, q^{-s_n}$の有理関数となる。) 又、この積分は、群の帯球関数の積分表示 (Harish-Chandra, Satake) の類似である。変数変換

$$s_i = z_{i+1} - z_i - 2 \qquad (1 \leq i \leq n) \quad z_{n+1} = n+1$$

をしたとき、$\zeta_g(x; z)$と表わし、

$$\Phi_z(x) := \frac{\zeta_g(x; z)}{\zeta_g(J_n; z)} \quad \text{, ただし } J_n = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in X$$

と定義し、これを、X上の球関数と呼ぶ。その意味は、Th A, B で明らかになる。

2° $\mathcal{H}(G, K) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(kgh) = f(g) \quad {}^\forall k, h \in K, {}^\forall g \in G \\ \mathrm{Supp}\, f : \text{compact} \end{array} \right\}$

$$C^\infty(K \backslash X) := \{ \varphi : X \longrightarrow \mathbb{C} \mid \varphi(k \cdot x) = \varphi(x) \quad {}^\forall k \in K \quad {}^\forall x \in X \}$$

$$\mathcal{S}(K \backslash X) := \{ \varphi \in C^\infty(K \backslash X) \mid \mathrm{Supp}\, f : \text{compact} \}$$

とおく。$\mathcal{H}(G, K)$は、和とconvolution $*$ について、可換$\mathbb{C}$-algebraをなす。ここで、$f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G, K)$について、

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)\, dh \qquad \text{for } {}^\forall g \in G \text{ 。}$$

又、$C^\infty(K \backslash X)$, $\mathcal{S}(K \backslash X)$は、次の作用により、$\mathcal{H}(G,K)$-moduleとなる： $f \in \mathcal{H}(G, K)$, $\varphi \in C^\infty(K \backslash X)$について、

$$f*\varphi(x) = \int_G f(g)\,\varphi(g^{-1}\cdot x)\,dg \qquad \text{for } {}^{\forall}x\in X.$$

Gの元 g が、$g = khn$, $k\in K$, $h=\begin{pmatrix} h_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & h_{2n}\end{pmatrix}$, $n=\begin{pmatrix}1 & * \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

と岩沢分解しているとき，$2n$ 個の複素変数 $s=(s_1,\cdots,s_{2n})$

に対し、

$$\Phi_s(g) := \prod_{i=1}^{2n} |h_i|^{s_i-(n-i+\frac{1}{2})}$$

$$w_s(g) := \int_K \Phi_s(g^{-1}k)\,dk$$

$$\hat{w}_s(f) := \int_G f(g)\,w_s(g^{-1})\,dg \quad , \text{for } f\in\mathcal{H}(G,K)$$

と定めると，

$$f*w_s = \hat{w}_s(f)\,w_s \quad , \text{for } {}^{\forall}f\in\mathcal{H}(G,K)$$

$$w_s(g^{-1}) = w_{-s}(g) \quad , \text{for } {}^{\forall}g\in G$$

が成立している（[2]）。

我々は、これを用いて，$\mathcal{H}(G,K)$ 及び $\mathcal{S}(K\backslash X)$ 上の Fourier 変換を次のように定義する：

$$\mathcal{H}(G,K) \longrightarrow \mathbb{C}[q^{\pm z_1},\cdots,q^{\pm z_n}]$$

$$f \longmapsto \tilde{f}(z) = \hat{w}_{\tilde{s}_z}(f),$$

ただし，$\tilde{s}_z = s_z + (\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$, $s_z = (z_n, z_n-1, \cdots, z_1, z_1-1)$

$$\mathcal{S}(K\backslash X) \longrightarrow \mathbb{C}[q^{\pm z_1},\cdots,q^{\pm z_n}]$$

$$\varphi \longmapsto \hat{\varphi}(z) = \int_X \varphi(x)\,\Phi_z(x^{-1})\,dx$$

ただし，dx は X 上の G-invariant measure で $\int_X dx = 1$.
対称群 S_n を，$\{z_1,\dots,z_n\}$ に作用させたときに固定される元全体 $\mathbb{C}[q^{\pm z_1},\dots,q^{\pm z_n}]^{S_n}$ を $\mathcal{C}$ で表わす。Fourier変換の像は $\mathcal{C}$ に含まれることがわかり，次の定理が成立する。

Theorem A

(1) Fourier変換 $f \mapsto \hat{f}$ により ring epimorphism
$\mathcal{H}(G,K) \longrightarrow \mathcal{C}$ を得る。

(2) $f * \Phi_z = \hat{f}(z)\Phi_z$ for $\forall f \in \mathcal{H}(G,K)$.

(3) $C^\infty(K\backslash X)$ 内の，$\mathcal{H}(G,K)$-同時固有関数は
ある $c\in\mathbb{C}$ と $z_0 \in \mathbb{C}^n$ により $c\cdot\Phi_{z_0}$
と表わされる。

Theorem B

Th A-(1) の ring homomorphism によって，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{H}(G,K)$-module とみなすと，Fourier変換 $\varphi\mapsto\hat\varphi$ により，

$$\mathcal{S}(K\backslash X) \cong \mathcal{C} \quad (\text{as } \mathcal{H}(G,K)\text{-modules}).$$

3° $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{Z}^n$ に対し，$\varpi^\lambda = \begin{pmatrix}\pi^{\lambda_1}J_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{\lambda_n}J_1\end{pmatrix}$, $J_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ と定める。特に，$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$ のときに，λ を長さ n の partition と呼ぶ。

$X = \dot{\bigcup}_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^n \\ \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n}} K \cdot \varpi^\lambda$ と disjoint union に分解される。

$\zeta_g(x;z)$ は、K-不変であり、$\tilde{\lambda} = \lambda + (t, \cdots, t)$ のとき

$$\zeta_g(\varpi^{\tilde{\lambda}}; z) = q^{t(z_1 + \cdots + z_n)} \zeta_g(\varpi^\lambda; z)$$

であるから、$\zeta_g(x;z)$ の値は、$x = \varpi^\lambda$ (λ : partition) での値で決定される。$\lambda, \mu \in \mathbb{Z}^n$ に対して、$\langle \lambda, \mu \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$ とし、一方が変数の場合も、この記号 $\langle\ ,\ \rangle$ を流用すると、次のように explicite formulae が記述される。

Theorem C

(1) $$\zeta_g(J_n; z) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-2k-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1-q^{z_i - z_j - 1}}{1-q^{z_i - z_j + 1}}$$

(2) λ を長さ n の partition, $\rho = (n-2i+1 \mid 1 \leq i \leq n) \in \mathbb{Z}^n$ とすると、

$$\Psi_z(\varpi^\lambda) = q^{-\langle \lambda, \rho \rangle} \prod_{i=1}^{n} \frac{1-q^{-2}}{1-q^{-2i}} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} q^{\langle \lambda, \sigma z \rangle} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1-q^{z_{\sigma(j)} - z_{\sigma(i)} - 2}}{1-q^{z_{\sigma(j)} - z_{\sigma(i)}}}$$

従って、$\Psi_z(x) \in \mathbb{C}[q^{\pm z_1}, \cdots, q^{\pm z_n}]^{S_n}$ for $^\forall x \in X$。

Remark. 後に定義する H.-L. 多項式 P_λ などを用いれば、

$$\Psi_z(\varpi^\lambda) = q^{-\langle \lambda, \rho \rangle} \frac{w_\lambda(q^{-2})}{w_n(q^{-2})} P_\lambda(q^{z_1}, \cdots, q^{z_n}; q^{-2})$$

と記述される。

4° ξ, λ を長さ m, n の partition とする ($m \geqq n$)。$\ell \in \mathbb{N}$ に対して,

$$N_\ell(\varpi^\xi, \varpi^\lambda) = \#\{ v \in M(2m, 2n : \mathcal{O}/\mathfrak{p}^\ell) \mid {}^t v \varpi^\xi v \equiv \varpi^\lambda \pmod{\mathfrak{p}^\ell} \}$$

$$N_\ell^{pr}(\varpi^\xi, \varpi^\lambda) = \#\left\{ v \in M(2m, 2n : \mathcal{O}/\mathfrak{p}^\ell) \;\middle|\; \begin{array}{l} v : \text{primitive} \\ {}^t v \varpi^\xi v \equiv \varpi^\lambda \pmod{\mathfrak{p}^\ell} \end{array} \right\}$$

ただし, $v \in M(2m, 2n ; \mathcal{O})$ が primitive とは, ある $u \in GL(2m, \mathcal{O})$ に対して, $v = u \boxed{\begin{matrix} 1_{2n} \\ 0 \end{matrix}}$ となるときにいう,

と定め, local density を次のように定義する:

$$\mu(\varpi^\xi, \varpi^\lambda) := \lim_{\ell \to \infty} \frac{N_\ell(\varpi^\xi, \varpi^\lambda)}{q^{-\ell n(4m-2n+1)}}$$

$$\mu^{pr}(\varpi^\xi, \varpi^\lambda) := \lim_{\ell \to \infty} \frac{N_\ell^{pr}(\varpi^\xi, \varpi^\lambda)}{q^{-\ell n(4m-2n+1)}} 。$$

長さ n の partition ξ に対し, $|\xi|$ で $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ を表わす。上の記号を用いると, まず, 次の induction formulae が得られる。

Theorem D
ξ を長さ n の partition とすると,

$$\zeta_{\mathfrak{p}}(\varpi^{\xi}; s_1, \dots, s_n) = \prod_{j=3}^{2n} \frac{1}{1-q^{-j}} \, q^{-|\xi| s_n} \sum_{\lambda} \mu^{pr}(\varpi^{\xi}, \varpi^{\lambda}) \, vol(K_{n-1} \cdot \varpi^{\lambda})^{-1} \zeta_{\mathfrak{p}}(\varpi^{\lambda}; s_1, \dots, s_{n-1})$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (1-q^{-(s_i+\cdots+s_n+2n-2i+2)})(1-q^{-(s_i+\cdots+s_n+2n-2i-1)})}{\prod_{j=3}^{2n} (1-q^{-j})}$$

$$\times \, q^{-|\xi| s_n} \sum_{\lambda} \mu(\varpi^{\xi}, \varpi^{\lambda}) \, vol(K_{n-1} \cdot \varpi^{\lambda})^{-1} \zeta_{\mathfrak{p}}(\varpi^{\lambda}; s_1, \dots, s_{n-1})$$

ここで、$\sum_{\lambda}$ は長さ $n-1$ の partitions を渡る和であり、変数変換 $s_i = z_{i+1} - z_i - 2 \ (1 \leq i \leq n)$, $z_{n+1} = n+1$ を行うと、第2の式の $\prod_{i=1}^{n-1}$ の積の部分は

$$\prod_{i=1}^{n-1} (1-q^{z_i - z_n - 2})(1-q^{z_i - z_n - 1})$$

となる。

Remark　長さ n の partition ξ と変数 n に対し

$$w_{\xi}(t) := \prod_{i \geq 0} w_{m_i(\xi)}(t)$$

ただし、$m_i(\xi) = \#\{j \mid \xi_j = i\}$, $w_{\ell}(t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1-t^i)$,
と定めると、

$$vol(K \cdot \varpi^{\xi}) = q^{-\sum_{i=1}^{n} (3-4i)\xi_i} \frac{w_{2n}(q^{-1})}{w_{\xi}(q^{-2})}$$

となることがわかる。

Th C で与えられている $\zeta_\xi(\pi^\xi; s)$ の explicite formulae と Th D とを組み合わせて local density の explicite formulae が得られるが，それを述べる前に必要な記号を準備する（cf [1]）。

partition λ を Young 図形に表わしたとき，転置した図形に対応する partition を λ' で表わす。

λ, μ を長さ m, n の partitions とする。

$\lambda \supset \mu \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} m \geqq n$ かつ $\lambda_i \geqq \mu_i$ $(1 \leq {}^\forall i \leq n)$

このとき，$\lambda - \mu$ が horizontal strip (h.s.) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lambda'_i - \mu'_i \leqq 1$ $({}^\forall i \geqq 1)$ と定義し，更にこのような λ, μ に対して，

$$I_{\lambda/\mu} = \{ i \geqq 1 \mid \lambda'_i - \mu'_i = 1,\ \lambda'_{i+1} - \mu'_{i+1} = 0 \}$$

$$J_{\lambda/\mu} = \{ j \geqq 1 \mid \lambda'_j - \mu'_j = 0,\ \lambda'_{j+1} - \mu'_{j+1} = 1 \}$$

$$\varphi_{\lambda/\mu}(t) := \prod_{i \in I_{\lambda/\mu}} (1 - t^{m_i(\lambda)})$$

$$\psi_{\lambda/\mu}(t) := \prod_{j \in J_{\lambda/\mu}} (1 - t^{m_j(\mu)})$$

と定める。ただし $I_{\lambda/\mu} = \phi$ (resp. $J_{\lambda/\mu} = \phi$) のときは，$\varphi_{\lambda/\mu}(t) = 1$ (resp. $\psi_{\lambda/\mu}(t) = 1$) とする。

以下では，λ, μ, ν は長さ n の partitions とする。不定元 $x_1, \cdots, x_n, t$ に対し，Hall-Littlewood polynomial は，

$$P_\lambda(x;t)=P_\lambda(x_1,\dots,x_n;t):=\frac{(1-t)^n}{\omega_\lambda(t)}\sum_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{\lambda_n}\prod_{i<j}\frac{x_{\sigma(i)}-tx_{\sigma(j)}}{x_{\sigma(i)}-x_{\sigma(j)}}$$

と定義される。これについて次の関係が知られている。

$$P_\lambda(x;0)=\sum_{\substack{\lambda\geq\mu\\|\lambda|=|\mu|}} K_{\lambda\mu}(t)P_\lambda(x;t),$$

ここで、$K_{\lambda\mu}(t)\in\mathbb{Z}[t]$, $K_{\lambda\mu}(q^{-2})\geq 0$ であり、

$\lambda\geq\mu \underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \lambda_1+\cdots+\lambda_i\geq\mu_1+\cdots+\mu_i\ (\forall i\geq 1)$ である。

$$a_\mu:=\sum_{\substack{\lambda\geq\mu\\ \lambda_1+\lambda_2=|\lambda|=|\mu|}}\frac{q^{\lambda_1-\lambda_2}-q^{-2\lambda_1+\lambda_2-3}}{1-q^{-3}}K_{\lambda\mu}(q^{-2})$$ とおく。

k の不分岐2次拡大体の整数環を $\tilde{\mathfrak{o}}$ とし、$\tilde{\mathfrak{o}}$-module M が type λ であることを、$M\cong\tilde{\mathfrak{o}}/(\pi^{\lambda_1})\oplus\cdots\oplus\tilde{\mathfrak{o}}/(\pi^{\lambda_n})$ により定義する。これを1つ固定して、

$$G^\lambda_{\mu\nu}(\tilde{\mathfrak{o}}):=\#\left\{N \;\middle|\; \begin{array}{l}\tilde{\mathfrak{o}}\text{-sub-module of } M\\ N\text{ の type}=\mu,\ M/N\text{ の type}=\nu\end{array}\right\}$$

$$f^\lambda_{\mu\nu}(q^{-2}):=q^{2\sum_{i=1}^{n}(i-1)(-\lambda_i+\mu_i+\nu_i)}G^\lambda_{\mu\nu}(\tilde{\mathfrak{o}})$$

と定めると、明らかに $f^\lambda_{\mu\nu}(q^{-2})\geq 0$ である。

以上の記号を用いると、次のように explicite famulae が記述される。

Theorem E

ξ, λ を長さ n. $n-1$ の partitions とすると,

(1) $$\mu(\pi^{\xi},\pi^{\lambda}) = \prod_{i=1}^{2n-2}(1-q^{-i})\cdot\frac{w_{\xi}(q^{-2})}{(1-q^{-2})(1-q^{-2n+1})(1-q^{-2n})}\,q^{2\Sigma(i-1)\xi_i+\Sigma(2i-3)\lambda_i}$$

$$\times\left[\sum_{\substack{\mu,\eta\\ \lambda\supset\mu,\eta\\ |\lambda|=|\mu|+|\eta|\\ \xi-\eta\,:\,h.s.}} a_{\mu}\,\psi_{\xi/\eta}(q^{-2})\,f^{\lambda}_{\mu\eta}(q^{-2})\right]$$

(2) $$\mu^{pr}(\pi^{\xi},\pi^{\lambda}) = \prod_{i=1}^{2n-2}(1-q^{-i})\cdot\frac{w_{\xi}(q^{-2})}{(1-q^{-2})(1-q^{-2n+1})(1-q^{-2n})}\,q^{2\Sigma(i-1)\xi_i+\Sigma(2i-3)\lambda_i}$$

$$\times\left[\sum_{\substack{\mu\\ \left.\begin{array}{l}\lambda-\mu\\ \xi-\mu\end{array}\right\}h.s.}} q^{|\lambda|-|\mu|}\,\psi_{\xi/\mu}(q^{-2})\,\varphi_{\lambda/\mu}(q^{-2})\right]$$

。

定理に述べた、a_{μ}, $f^{\lambda}_{\mu\nu}(q^{-2})$ を具体的な形で求めるアルゴリズムは存在するが、ここでは次の系を述べるに留めておく。

Corollary

ξ, λ を 長さ n, $n-1$ の partitions とすると,

(1) $\mu(\pi^{\xi}, \pi^{\lambda}) \neq 0 \iff \xi - \xi \cap \lambda$ が horizontal strip,

(2) $\mu^{pr}(\pi^{\xi}, \pi^{\lambda}) \neq 0 \iff \xi - \xi \cap \lambda$ と, $\lambda - \xi \cap \lambda$ が 共に horizontal strip。

参考文献

[1] I. G. Macdonald : Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford 1979

[2] I. Satake : Theory of sphereical functions on reductive algebraic group over p-adic field, Publ. Math. IHES 18 (1963), 5-70