数理解析研究所講究録
第546巻 1985年 159-170



# 重さ1の保型形式，4次剰余と楕円曲線

阪府大総合　石井伸郎（Noburo Ishii）

$D_3$ を位数6の2面体群として，次の様な体$\Omega$と楕円曲線Eのpair（$\Omega$，E）を考える。

（＊）$\Omega$は$\mathbb{Q}$上正規拡大で，$G(\Omega/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} D_3$。

（＊＊）Eは$\mathbb{Q}$上定義されていて，$\Omega$は$\mathbb{Q}$上Eの2等分点で生成される。

このとき，$\Omega$から構成される重さ1の cusp form の Fourier 係数と，谷山－Weil 予想を仮定することにより，Eから構成できる重さ2の cusp form の Fourier 係数の間に“2を法”とする合同式が成立することを，$\Omega$を最小分解体にもつ有理整係数の3次既約方程式の“高次相互法則”から，小池氏[3]は示した。ここでは，位数8の2面体群$D_4$に対して同様な問題を考える。すなわち

1）Kは$\mathbb{Q}$上，正規拡大で，ガロワ群$G(K/\mathbb{Q})$が$D_4$と同型なる体，

2) Eは$\mathbb{Q}$上定義された楕円曲線で，Kは$\mathbb{Q}$上Eの，ある2巾－等分点で生成される。

この2条件をみたすpair（K，E）から，cusp formの間の"2巾を法"とする合同式を得ることを考える。谷山－Weil予想を仮定せずにすますために

3) Eは虚数乗法をもつ。

という条件を付け加えることにする。さらに基礎体を$\mathbb{Q}$から実2次体Fにしたときに，F上条件1)～3)と同様の条件をみたす体と楕円曲線のpair（K，E）から，F上のHilbert modular formの間の合同式が得られるかを考える。ここでは次の様な，典型的な$D_4$－拡大と虚数乗法$\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$をもつ，楕円曲線のpair（K，E）をそれぞれ$\mathbb{Q}$上，実2次体上に考える。

（I） mを非平方な正整数として，

$$K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt[4]{m}),\quad E:\ y^2=x^3+4mx\ 。$$

（II） $F=\mathbb{Q}(\sqrt{n})$（n：square freeな正整数）を総正な基本単数をもつ実2次体で，$\varepsilon_n$をFの$a+b\sqrt{n}$（$a,b\in\mathbb{Z},\ a>0$）なる形の最小の単数とする。

$$K=F(\sqrt{-1},\sqrt[4]{\varepsilon_n}),\quad E:\ y^2=x^3+4\varepsilon_n x\ 。$$

(I)，(II)の場合共に，Kは基礎体上，Eの$(1+\sqrt{-1})^3$－等分点で生成されていて，pair（K，E）から重さ1，重さ2のcusp form（(II)に於ては，Hilbert cusp form）の間の

"4を法"とする合同式が，$m$，$\varepsilon_n$の"4次剰余性"から得られる。

以下、記号の説明をする。群$D_4$は，唯一の既約2次元複素表現をもつ。これを$\psi$で示す。群$G$が$D_4$と同型なるとき，$\psi$とその同型との合成で得られる$G$の表現を$\psi_G$で表す。

$k$，Nを自然数とする。$\chi$を$(\mathbb{Z}/N)^\times$の指標とするとき，

$S_k(N,\chi)$で重さ$k$の指標$\chi$に属する，モジュラー群$\Gamma_0(N)$に関するcusp formのなす空間を表す。

## §1. cusp formの合同

ここでは(I)の場合を扱う。$G=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$とおく。

$L(s,\psi_G)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$を$\psi_G$のArtin L-関数，Nを$\psi_G$のコンダクターとする。複素上半平面$\mathfrak{H}$上の関数，

$$\theta(\tau,K)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)q^n,\quad \theta'(\tau,K)=\sum_{n:\mathrm{odd}}a(n)q^n$$
$$(q=\exp(2\pi\sqrt{-1}\tau))$$

を考えると，$\theta(\tau,K)\in S_1(N,(\frac{-1}{*}))$，

$$\theta'(\tau,K)\in S_1(4N,(\tfrac{-1}{*}))$$

となる（Serre [4]，志村 [5]）。

Eの L-関数を$L(s,E)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s}$，Eのコンダクターを$C_E$とおけば，$\mathfrak{H}$上の関数$\theta(\tau,E)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)q^n$は$S_2(C_E,1)$に属す（志村 [5]）。体Kは$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$上

のアーベル拡大で，そのコンダクターは正整数 $f$ で生成されている。$p$ を素数とするとき，$p$ 番目の Fourier 係数 $a(p)$，$c(p)$ は次の様に与えられる。

$$(1.1)\qquad a(p)=\begin{cases}\operatorname{trace}\psi_{G}(\sigma_p) & \text{if } p\nmid N,\\ 0 & \text{if } p\mid f,\end{cases}$$

$$a(2)=0,\pm 1。$$

$$(1.2)\qquad c(p)=\begin{cases}p+1-N_p & \text{if } p\nmid C_E,\\ 0 & \text{otherwise}。\end{cases}$$

ここで $\sigma_p$ は拡大 $K/\mathbb{Q}$ における $p$ の Frobenius 置換を表し，$N_p$ は，楕円曲線 $E$ を $p$ で reduction して得られる $\mathbb{F}_p\ (=\mathbb{Z}/p)$ 上の楕円曲線 $E_p$ の $\mathbb{F}_p$-有理点の個数を示す。

注意－1. $N$，$C_E$ と $f$ の間の関係は次の通りである。

$$N=4f^2,\quad C_E=2^{\gamma}N,\quad \gamma=\max(0,3-2e),$$

$e$ は $f$ の 2-指数である。特に $\gamma=0 \iff f\equiv 0 \bmod 4$。

上で定義した cusp form の間に次の合同式が成立する。

定理－1. 上の記号の下で

$$\Theta'(\tau,K)\equiv\Theta(\tau,E)\bmod 4$$

さらに $f$ が偶数ならば，

$$\Theta(\tau,K)\equiv\Theta(\tau,E)\bmod 4。$$

以下定理の証明の概略を示す。（詳しくは[1]を参照）

$p \nmid N$ なる素数 $p$ に対して $m$ の $p$ を法とする“4次剰余性”を表す量 $S(p)$ を次の様に定義する。

$$S(p) = \#\{\alpha \in \mathbb{F}_p \mid \alpha^4 \equiv m \mod p\}$$

このとき $a(p)$、$c(p)$ が $S(p)$ で次の様に表わされる。

<u>Lemma 1</u>　$p \nmid N$ ならば

$$a(p) = S(p) - 1 - \left(\frac{m}{p}\right).$$

（証）$K$ の部分体 $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{m})$ の各元を不変にする $G$ の部分群を $H$ とする。$1_H$ で $H$ の恒等指標，$1_H^G$ でその $G$ への誘導指標を示せば，

$$S(p) = 1_H^G(\sigma_p).$$

となる。$1_H^G$ を既約指標に分解すれば，

$$1_H^G = 1 + \mathrm{trace}\,\psi_G + \chi,$$

$\chi$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に対する $G$ の一次表現である。(1.1) より上の結果を得る。

<u>Lemma 2</u>　$p \nmid N$ ならば

$$c(p) \equiv -S(p) - \left(\frac{-1}{p}\right) - \left(\frac{-m}{p}\right) + \gamma(p) \mod 8$$

ここで

$$\gamma(p) = \begin{cases} 4 & p \equiv 5 \mod 8 \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

（証）$p \nmid N$ ならば $p \nmid C_E$ である。$T(p)$ で $E_p$ の $\mathbb{F}_p$-有理的な $(1+\sqrt{-1})^3$-等分点の個数を示せば，$S(p)$ がその中の primitive な $(1+\sqrt{-1})^3$-等分点の個数を表わしているので

$$T(p) = 3 + \left(\frac{-m}{p}\right) + S(p)$$

を得る。次に，合同式

$$N_p \equiv T(p) + \mu(p) \mod 8$$

$$\mu(p) = \begin{cases} 4 & \text{if } p \equiv 7 \mod 8 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

を示す。$p \equiv 3 \mod 4$ のときは明らか。$p \equiv 1 \mod 4$ のとき，$E_p$ の $\mathbb{F}_p$－有理点のなす群を $M$ として，$M^+$ でその 2-Sylow 群，$M^-$ でその直和補因子を表す。すなわち $M = M^+ \oplus M^-$。虚数乗法 $\sqrt{-1}$ が $\mathbb{F}_p$ 上定義されることにより，群 $\langle\sqrt{-1}\rangle$ は $M^+$, $M^-$ に作用する。$\langle\sqrt{-1}\rangle$ の orbit を考えることより

$$\#(M^+) \equiv T(p) \mod 8, \quad \#(M^-) \equiv 1 \mod 4$$

これより　$N_p \equiv T(p) \mod 8$。(1.2) に注意すれば，上の結果を得る。

これらの事より，$p \nmid N$ ならば

$$(1.3) \qquad a(p) \equiv c(p) + \gamma(p) \mod 8$$

を得る。$f$ が偶数ならば $a(2) = c(2) = 0$ に注意して，Fourier 係数が乗法的なることより，定理-1 が示される。

注意－2　$m=2^{\alpha}\cdot m_1$，$(m_1,2)=1$ とおくとき，$f$が奇数であるための条件は次の様に与えられる。

$$f:\text{奇数} \Longleftrightarrow \alpha:\text{偶数},\ m_1\equiv(-1)^{\frac{\alpha}{2}} \bmod 8$$

## §2. Hilbert modular form の合同

(II)の場合を考える。すなわち $K=F(\sqrt{-1},\sqrt[4]{\varepsilon_n})$，$E$を方程式 $y^2=x^3+4\varepsilon_n x$ で定義された楕円曲線とする。

### 2.1. Hilbert modular form の構成

Kから次の様に、Hilbert modular form を構成する。

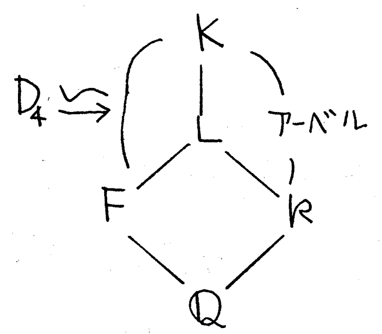
$G=Gal(K/F)$，$G_0=Gal(K/\mathbb{Q})$ とおく。$\psi_G^{G_0}$ で，$\psi_G$ の $G_0$ への誘導表現とする。$\psi_G^{G_0}$ を既約表現に分解すると

$$\psi_G^{G_0}=\psi_0\oplus\psi_1$$

ここで $\psi_0,\psi_1$ は2次元既約表現で，Fに対応する$G_0$の一次表現を$\chi_F$とすれば

$$(2.1)\quad \psi_1=\psi_0\otimes\chi_F$$

なる関係がある。今 $L=\mathbb{Q}(\sqrt{-1},\sqrt{n})$，$k=\mathbb{Q}(\sqrt{n})$ とおけば




Kはk上アーベル拡大である。$\psi_i$を$Gal(K/k)$に制限し，相異なる指標に分解できる。すなわち

$$\psi_i|Gal(K/k)\simeq\xi_i\oplus\xi_i'.$$

$\xi_i^*$で$\xi_i$によってきまるkのイデアル

指標，$\hat{\xi}_i^*$ で $\xi_i^*$ の primitive な指標を表せば，

$$L(s,\ \psi_i) = L(s,\ \hat{\xi}_i^*)$$

となる。$\xi_i$ が分岐しているときには，$L(s, \xi_i^*) = L(s, \hat{\xi}_i^*)$ となる。上の図式より次の事が分る。

(2・2)　$\xi_0^*$ と $\xi_1^*$ が共に分岐 $\Longleftrightarrow$ K が L 上分岐。

$\chi$ で k の L に対応するイデアル指標を示せば，(2・1) より

$$\xi_1^* = \chi \cdot \xi_0^*$$

なることが分る。

今 $L(s,\ K) = L(s,\ \psi_G^{G_0})$ とおけば (2.2) の仮定の下で

$$\begin{aligned} L(s,\ K) &= L(s,\ \psi_0)L(s,\ \psi_1) = L(s, \xi_0^*)L(s, \xi_1^*) \\ &= L(s,\ \xi_0^* \circ N_{L/k}) \\ &= \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(s,\ K), \end{aligned}$$

ここで積は F の 2 と素な素イデアル $\mathfrak{p}$ 全体を渡り，$L_{\mathfrak{p}}(s, K)$ は，

$$(2\cdot3)\quad L_{\mathfrak{p}}(s,\ K) = \prod_{\substack{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p} \\ \mathfrak{P}:\text{prime in } L}} \left(1 - \xi_0(N_{L/k}(\mathfrak{P}))\, N_{L/\mathbb{Q}}(\mathfrak{P})^{-s}\right)^{-1}$$

である。このことにより

$$L(s,\ K) = \sum_{\mathfrak{m}} a(\mathfrak{m})\, N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})^{-s}$$

和は F の整イデアルの全てを渡ると表わせる。今 h を F の狭義の類数として，$\mathfrak{a}_1, \cdots \mathfrak{a}_h$ で F の狭義の各類を代表する整イデアルの一組を表わすものとする。$\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ 上の関数

$g_\lambda(z, z')$, $\lambda=1,\cdots,h$ を次の様に定義する。

$$g_\lambda(z, z') = \sum_{\substack{\xi \in \mathfrak{a}_\lambda \\ \xi \gg 0}} a(\xi \mathfrak{a}_\lambda^{-1}) e^{2\pi\sqrt{-1}(\xi z + \xi' z')}$$

ここで $\xi'$ は $\xi$ の $\mathbb{Q}$ 上の共役を示し，$\xi \gg 0$ は $\xi$ が総正であることを意味する。$g_\lambda(z, z')$ は重さ 1 の $GL_2(F)^+$ の合同部分群に関する Hilbert cusp form である（志村 [6]）。次に E の F 上の L-関数を

$L(s, E) = \sum_{\mathfrak{m}} C(\mathfrak{m}) N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})^{-s}$ の形に表し，

$\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ 上の関数 $f_\lambda(z, z')$ を

$$f_\lambda(z, z') = \sum_{\substack{\xi \in \mathfrak{a}_\lambda \\ \xi \gg 0}} C(\xi \mathfrak{a}_\lambda^{-1}) e^{2\pi\sqrt{-1}(\xi z + \xi' z')}$$

と定義すれば，E は虚数乗法をもち，$L(s, E)$ が L の量指標の L-関数と一致することより，$f_\lambda(z, z')$ は重さ 2 の $GL_2(F)^+$ のある合同部分群に関する Hilbert cusp form である。

## 2·2 合同式

$g_\lambda(z, z')$, $f_\lambda(z, z')$ $\lambda=1,\cdots,h$ の間に次の合同式が成立する。$a(\mathfrak{m})$, $C(\mathfrak{m})$ はすべて整数である。

定理−2. K が L 上分岐しているならば，

$$g_\lambda(z, z') \equiv f_\lambda(z, z') \mod 4$$

が $\lambda=1,\cdots,h$ に対して成立する。

この定理は次のLemmasから証明される。詳しくは[2]を参照して下さい。体Fの2と素な素イデアル$\mathfrak{p}$に対して，$\mathbb{F}_{\mathfrak{p}}$で$\mathfrak{p}$の剰余体，$\sigma_{\mathfrak{p}}$で拡大K/Fでの$\mathfrak{p}$のFrobenius置換を表す。$\varepsilon_n$の“4次剰余性”を示す量

$$S(\mathfrak{p}) = \#\{\alpha \in \mathbb{F}_{\mathfrak{p}} \mid \alpha^4 \equiv \varepsilon_n \mod \mathfrak{p}\}$$

と$\mathrm{trace}\,\psi_G(\sigma_{\mathfrak{p}})$, $C(\mathfrak{p})$ との関係を§1と同じ議論でもとめることによって次の結果を得る。

<u>Lemma 3</u>　上の記号の下で

$$\mathrm{trace}\,\psi_G(\sigma_{\mathfrak{p}}) \equiv C(\mathfrak{p}) + \gamma(\mathfrak{p}) \mod 8$$

ここで

$$\gamma(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 4 & p \equiv 5 \mod 8,\ \left(\frac{n}{p}\right) \neq -1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

今$L_{\mathfrak{p}}(s, E)$で$L(s, E)$の積表示における“$\mathfrak{p}$-part”，$L_p(s, \psi_i)$で$L(s, \psi_i)$のEuler積表示の“p-part”を示せば、Lemma 3から次の合同式を得る。

<u>Lemma 4</u>　pを奇素数，$\mathfrak{p}$でpをわるFの素イデアルとすると，$L_{\mathfrak{p}}(s, E)$, $L_p(s, \psi_i)$を変数$x = p^{-s}$の整係数をもつ巾級数とみなしたとき、次の合同式が成立する。

$$L_{\mathfrak{p}}(s, E) \equiv \begin{cases} L_p(s, \psi_0) = L_p(s, \psi_1) \mod 4 & \text{if } \left(\frac{E}{p}\right) = 1, \\ L_p(s, \psi_0) \cdot L_p(s, \psi_1) \mod 4 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ところで(2.3)の$L_g(s.K)$は

$$L_g(s.K)=\begin{cases} L_p(s,\psi_0) & \text{if } \left(\frac{F}{p}\right)=1, \\ L_p(s,\psi_0)L_p(s,\psi_1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となるので，Lemma 4より$g_\lambda(z,z')$，$f_\lambda(z,z')$のFourier係数の間の合同式を(2.2)の仮定の下で得ることができる。すなわち，すべてのFの整イデアル$\mathfrak{m}$に対して，

$$a(\mathfrak{m}) \equiv c(\mathfrak{m}) \mod 4$$

が成立する。これは定理-2の結果を示す。

<u>注意-3</u>　Kが L上不分岐なるための条件をきめる。

$\varepsilon_n = A+B\sqrt{n}$　$(A, B\in\mathbb{Z}, A>0)$とおくとき，

$$K\text{はL上不分岐} \Longleftrightarrow \begin{cases} A\equiv 1 \mod 8,\ B\equiv 0 \mod 8 & \text{if } n\equiv 1 \mod 4, \\ A\equiv 1 \mod 8,\ B\equiv 0 \mod 4 & \text{if } n\equiv 3 \mod 4, \\ B\equiv 0 \mod 4 & \text{if } n\equiv 2 \mod 4. \end{cases}$$

となる。例えば次の様な$n$に対して，$F=\mathbb{Q}(\sqrt{n})$上の(II)で定義されたKは(2.2)をみたす。

(i) $n$は素数で $n\equiv 3 \mod 4$。

(ii) $n$は相異なる素数$P_1, P_2$の積で$P_1, P_2$は次をみたす。

(ii-a) $P_1\equiv \pm 5 \mod 8$，$P_2\equiv 3 \mod 4$，$\left(\frac{P_1}{P_2}\right)=-1$。

(ii-b) $P_1=2$，$P_2\equiv 3 \mod 8$.

## 参考文献

[1] N. Ishii, Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves, to appear in Nagoya Math. J., 98 (1985).

[2] ———, Quadratic units and congruences between Hilbert modular forms, preprint.

[3] M. Koike, Higher reciprocity law, modular forms of weight one and elliptic curves, to appear in Nagoya Math. J.

[4] J. P. Serre, Modular forms of weight one and Galois representations, Proc. Symposium on algebraic number fields, Academic Press, London 1977, 193–268.

[5] G. Shimura, On elliptic curves with complex multiplication as factors of the jacobians of modular function fields, Nagoya Math. J., 43 (1971), 199-208.

[6] ———, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, Duke Math. J., 45 (1978), 637–679.