

LES 流体計算に対する
ICCG 法適用の試み

東大・大型計センター 唐木 幸比古

(Yukihiro Karaki)

東大・生研 堀内 潔 (Kiyosi Horii)

1. はじめに

近年の計算機の発達に伴ない，乱流場の数値計算による研究も行なわれるようになってきたが，壁に沿う流れといった平均流を伴う剪断乱流の数値計算を試みようとするに，残念ながら次のような困難が生じる。

1. 乱流場は本質的に 3 次元性が強いので，3 次元の計算をしなくてはならない。

2. スペクトルが，エネルギーの生成に寄与する波数帯から，散逸するスケールまでの非常に広い範囲にわたる。

3. アンサンブル平均のみでなく局所的な空間の構造をも解明する必要がある。

したがって，分子粘性の効く小さなスケールまで計算し

ようとすると, $Re^{\frac{9}{4}}$ というオーダーの格子点数が必要になる。ここに, Re は, レイノルズ数を表すが, 乱流の発生する Re が 10^3 程度以上であることを考えると, 剪断乱流場の直接数値計算は, 現状では, 不可能である。ところで, 乱流場中に存在するさまざまな渦を, 大まかに大きな渦と小さな渦という2つのスケールに分けて考えると, 大きな渦は主流の影響を受け, 流れ場によって大きく異なるのに対し, 小さなスケールの渦は比較的普遍的であることが, 実験的にはよく知られている。このことは, 散逸に寄与する小さなスケールの渦は, モデル化できるのではないかという期待を抱かせる。こうした工夫の一つとして考え出されたのが, 本研究でとりあげた Large Eddy Simulation (以下 LES) と呼ばれる方法で, これは前述の困難のうち, 2つを克服するものである。ここでは, LES を, 平行平板間の流れ場に適用した。これは, 剪断乱流では, 最も単純な流れであり, 種々の乱流モデルを適用して検討するのに適している。

本研究では, 基礎方程式の離散化の結果得られる連立差分方程式の解法に, ILUCR 法を用いるものと, Pseudo-Spectral 法 (以下 P.S. 法) を用いるものとも取り上げ, 紹介した。

2. 基礎方程式.

ここでは、非圧縮性流体を考えるので、基礎方程式は、ナビエ・ストークス方程式(2.1)および、連続の方程式(2.2)である。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \Delta u_i \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

ここに、 u_i , p は、おのこの、速度と圧力を表し、 $i, j = 1, 2, 3$ はおのこの、 x, y, z に対応し、 x は下流方向、 y は横断方向、 z は、平板に垂直な方向を示し、おのこの方向の速度成分を、 u, v, w と表すことにし、 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ は、計算に用いる各方向の格子間隔とする。(2.1) および、(2.2) の無次元化は、壁面摩擦速度 (= 壁面摩擦応力の平方根) u^* , 平板間の距離 h , 動粘性率 ν により、レイノルズ数 Re は、 $Re = u^* h / \nu$ と定義されている。

LES では、乱流場に存在するさまざまな渦を、計算の格子にかかるスケール (Grid scale ; 以下 GS) の渦と、それ以下のスケール (Subgrid scale ; 以下 SGS) の渦に分離するため、格子平均を導入する。本研究では、Leonard [1] に従い、フィルタリングを用いる。ま

ず、すべてのスケールを含む量 $f(x)$ に対して、空間的かつ局所的にフィルターをかけた量 $\bar{f}(x)$ を次のように定義する。

$$\bar{f}(x) = \iiint G(x-x') f(x') dx' \quad (2.3)$$

$G(x)$ はフィルター関数であり、ガウシアン形、もしくは、トッポ・ハット形が用いられているが、ここでは、後者を用いる。すなわち、

$$G(x) = \begin{cases} \prod_{\alpha=1}^3 \frac{1}{\Delta_{\alpha}} & |x_{\alpha}| \leq \frac{\Delta_{\alpha}}{2} \\ \emptyset & |x_{\alpha}| > \frac{\Delta_{\alpha}}{2} \end{cases} \quad (2.4)$$

上記の Δ_{α} は、計算に用いる格子の間隔を示す。(2.3) を、(2.1) および (2.2) に適用すると、(2.6) および (2.7) を得る ($u_i = \bar{u}_i + u_i'$, $p = \bar{p} + p'$. (2.5))

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i u_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \Delta \bar{u}_i \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \emptyset \quad (2.7)$$

(2.6) 式中の非線形項 $\overline{u_i u_j}$ は、(2.8) のように書きおろせる。

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{u_i' u_j'} \quad (2.8)$$

LESでは、(2.8)の右辺の各項を $\overline{u_i}$ と関係づける必要が生じる。ここでは、

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i' u_j'}$$

と置きかえている。これは、 $\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j}$ と近似し、 $\overline{u_i' u_j'}$ と呼ぶた GSとSGSの相関を無視したわけで、レイノルズの仮定と呼ばれているが、残念なことに、(2.3)のようなフィルタリングを用いた際には、これらの近似は必ずしも成り立たない。しかし、(2.6)を差分近似した際、打ち切り誤差として含まれる項の中に、上記の置きかえで生じる誤差と見分けのつかない項があるため、(2.9)を採用した。(2.8)の最終項 $\overline{u_i' u_j'}$ は、SGSのレイノルズ応力と呼ばれ、乱流場で、最も重要な量の一つであり、これを $\overline{u_i}$ と関係づけることがLESでは最も肝要なことである。現在行なわれているLESの計算は全て Smagorinsky [2]によるモデルが基本となっている。これは、

$$\overline{u_i' u_j'} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_\ell' u_\ell'} - \kappa \left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right]$$

$$\kappa = (c\Delta)^2 \left[\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

というモデルで、ここに、 κ は eddy viscosity と呼ばれるもので、 c は定数、 Δ は、特性的なフィルター

幅で, $\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{\frac{1}{3}}$ である. eddy viscosity K は, 小さなスケールの渦が, ほとんど散逸的な役割を果たすことに着目し, 分子粘性との類推から出されたものである. SGSの運動エネルギーは, convection, production, dissipation, diffusion という4つの項から成り立っているが, Smagorinsky モデル (2.10) は, 各格子内で局所平衡にあり, 各項のうち, productionと dissipation のみの釣り合いを仮定することで導ける. しかし, 一般的な乱流場では, この2者のみが必要しも, 卓越していない場合もあり, 全ての項をとりこむモデル (1方程式モデル) の必要も指摘されている. 詳しくは, Yoshizawa and Horiuti [3], Horiuti [4] を参照されたい. 以上で, 全ての量 $\overline{u_i}$ 及び \overline{p} に関係づけることができた.

(2.6) および (2.7) に対し, 初期条件および境界条件は, 次のように与えた. x および y 方向には, 周期境界条件を課し, z 方向には, 壁で粘着の条件を課し, 圧力の境界条件は, 壁を通してのモーメントの連続として与えた. x および y 方向の周期の長さは, おのおの $L_x = 3.2$ ㏎, $L_y = 1.6$ ㏎としたが, この長さは, 実験的に測定された各方向の2点速度相関が十分に小さくなる距離を目安に

決めている。また、初期条件は、適当な平均速度分布に、一様乱数を用いて発生させた攪乱を重ね合わせてきた。又 x, y 方向には等間隔格子を、 z 方向には不等間隔を用いた。

3. CG-like な方法による解法

簡単のために、(2.1), (2.2) で定常の場合に於ける議論をするが、(2.6), (2.7) に対しても、同様な議論はできる。

先づ、村田 [5] にならり、(2.1) を次の保存型式で書く。

$$\operatorname{div} (-\nu \nabla u_i + u_i u) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (3.1)$$

この式に、計算の各格子内での体積平均を施し、ガウスの発散公式を用いることにより次式を得る。

$$\int_{\partial \Omega} \{ (-\nu \nabla u_i + u_i u) \cdot n + p n \} dS = 0 \quad (3.2)$$

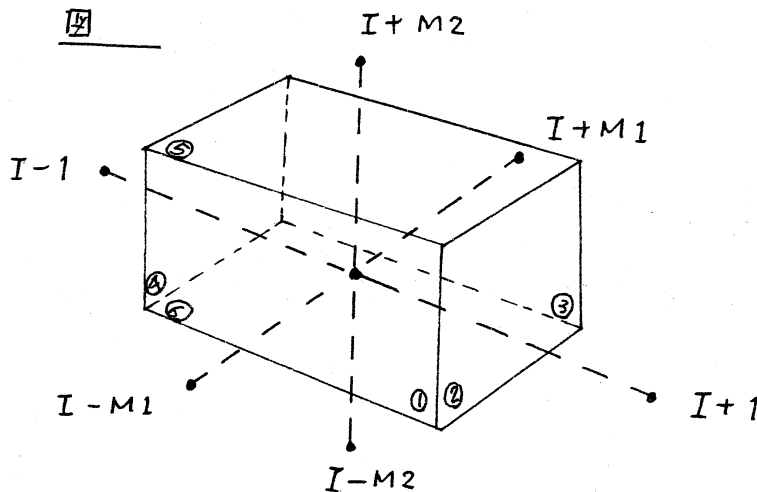
ここに、 n は、外向きの法線ベクトルである。(3.2)

により、(3.1) は、面力の差分として、(3.3) のようになる。例えば、 $i=1$ に対しては、

$$\begin{aligned} & -\nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{\textcircled{2}} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{\textcircled{4}} \right) \Delta y \cdot \Delta' z_k - \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{\textcircled{1}} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{\textcircled{3}} \right) \Delta x \cdot \Delta' z_k \\ & - \nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{\textcircled{5}} - \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{\textcircled{6}} \right) \Delta x \cdot \Delta y \\ & + \left(u_1^{n+1} u_1^n \Big|_{\textcircled{2}} - u_1^{n+1} u_1^n \Big|_{\textcircled{4}} \right) \Delta y \cdot \Delta' z_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-u_1^{n+1} u_2^n |_{\textcircled{1}} + u_1^{n+1} u_2^n |_{\textcircled{2}}) \Delta x \cdot \Delta' z_k \\
& + (u_1^{n+1} u_3^n |_{\textcircled{3}} - u_1^{n+1} u_3^n |_{\textcircled{4}}) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\
& + (p |_{\textcircled{5}} - p |_{\textcircled{6}}) \Delta y \cdot \Delta' z_k = \phi \quad (3.3)
\end{aligned}$$

ここに, $\Delta' z_k = \frac{1}{2}(z_{k+1} - z_{k-1})$, 上つきの suffix は, タイム・ステップを, $|_{\textcircled{i}}$ 等は, 図の各面における値を表わす. u_i, p は, 図の \bullet の点で評価されている.



$$M1 = NX$$

$$M2 = NX * NY$$

NX, NY, NZ は,
 x, y, z 方向の
 格子点数.

(3.3) は, (3.4) のような差分方程式になる.

$i=1$

$$\begin{aligned}
& a_{1, I-M2} u_1(I-M2) + a_{1, I-M1} u_1(I-M1) \\
& + a_{1, I-1} u_1(I-1) + a_{1, I} u_1(I) \\
& + a_{1, I+1} u_1(I+1) + a_{1, I+M1} u_1(I+M1) \\
& + a_{1, I+M2} u_1(I+M2) \\
& + d_{I-1} \cdot p(I-1) + d_{I+1} \cdot p(I+1) = \phi \quad (3.4)
\end{aligned}$$

$$\underline{i=2} \quad a_{2, I-M_2} U_2 (I-M_2) + \dots$$

$$\underline{i=3} \quad a_{3, I-M_2} U_3 (I-M_2) + \dots$$

又、連続の方程式 (2.2) は、(3.5) のようになる。

$$(U_1(I+1) - U_1(I-1)) / \Delta x + (U_2(I+M_1) - U_2(I-M_1)) / \Delta y + (U_3(I+M_2) - U_3(I-M_2)) / \Delta z_k = \phi \quad (3.5)$$

(3.4) および (3.5) は、2節に示した境界条件のもとに、図2のような行列からなる方程式となる。

E_2	ϕ	ϕ	D_1
ϕ	E_2	ϕ	D_2
ϕ	ϕ	E_2	D_3''
D_1	D_2	D_3'	ϕ

$U_1^{(n+1)}$	= ϕ
U_2	
⋮	
⋮	
V_1	= ϕ
V_2	
⋮	
⋮	
W_1	= ϕ
W_2	
⋮	
⋮	
P_1	= ϕ
P_2	
⋮	
⋮	

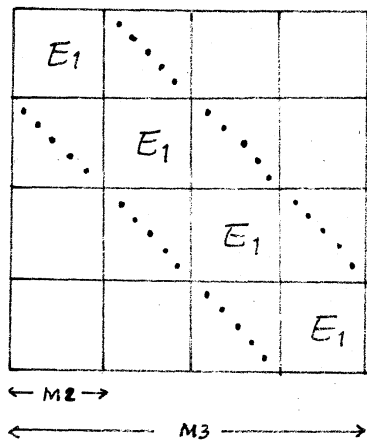
← M_3 →

← $M_3 \times 4$ →

図2

各成分、例えば、 E_2 は、図3のようになっている。
 ここでは、便宜のために、未知変数を、 $(U_I (I=1, M_3); V_I (I=1, M_3); W_I (I=1, M_3); P_I (I=1, M_3))$ の

E2



E1

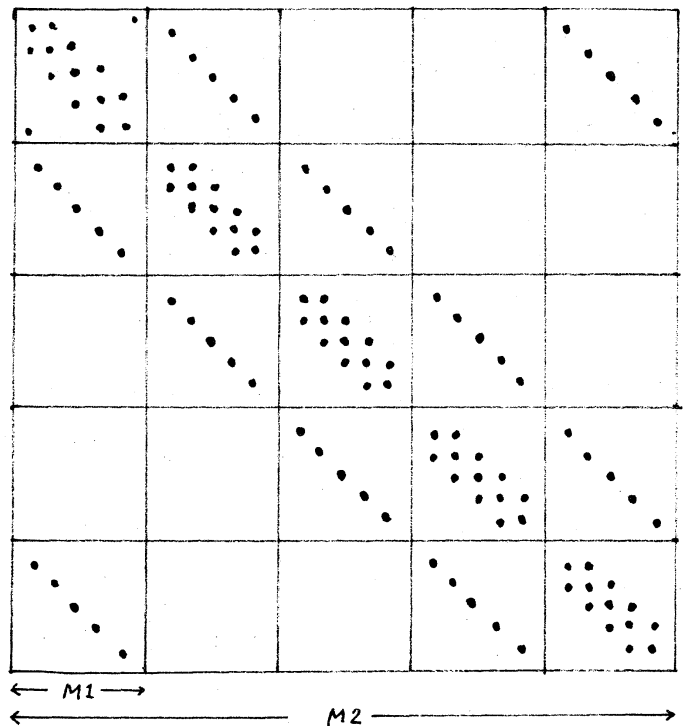


図 3

順に並べたが(以下, Type I), 別の並べ方として,
 $(u_1, v_1, w_1, p_1; u_2, v_2, w_2, p_2; \dots)$ としたもの
 の(以下, Type II)もできる. 実は, 3方向に周期境界条件を課した以外は, 本質的に同じ問題が, 小柳[6]によつて, ILUCR法を用いて, 解かれている事が, 研究の途上で, わかった. 紙面の通号上, 詳しい点は省くため, 小柳[6]を参照されたい.

4. Pseudo-Spectral法による解法.

この方法では, x, y 方向での周期境界条件を利用し,
 $\overline{u_i}, \overline{p}$ を, x, y 方向に離散フーリエ変換(4.1)をし,
 P. S. 法を用いることにより, 計算の精度と能率を上

げた。

$$\bar{u}_{i,j,k} = \sum_{l=-NX/2}^{NX/2-1} \sum_{m=-NY/2}^{NY/2-1} \tilde{u}_{l,m,k} \exp(\sqrt{-1} 2\pi \left(\frac{il}{NX} + \frac{jm}{NY} \right)) \quad (4.1)$$

方程式 (2.6) の各項のうち、粘性項と圧力項は、Crank-Nicolson 形の陰解法を、非線形項には、E-メントおよびエネルギー保存形で近似した上、Adams-Bashforth 形の陽解法を用いた。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{u}^{n+1} - \frac{2Re}{\Delta t} \bar{u}^{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{u}^{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{u}^{n+1} - Re \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial x} = RHS_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{v}^{n+1} - \frac{2Re}{\Delta t} \bar{v}^{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{v}^{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{v}^{n+1} - Re \frac{\partial \bar{p}^{n+1}}{\partial y} = RHS_2 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{w}^{n+1} - \frac{2Re}{\Delta t} \bar{w}^{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{w}^{n+1} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{w}^{n+1} - Re \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = RHS_3 \\ \frac{\partial \bar{u}^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^{n+1}}{\partial z} = \phi \end{array} \right. \quad (4.2)$$

したがって、 n ステップから $n+1$ ステップに進める際には、(4.2) のような連立方程式を解くことになる。ここに、右辺の詳細は省略した。(4.2) を解く一つの基本的な方法は、第1から第3の方程式の発散をとることにより得られる圧力に関するポワソン方程式 (4.3) を、(4.2) の連続の方程式を考慮して解き、圧力を決め、次に速度場を決める方法である。その際、境界条件を設定しなく

てはならないが、一般的には、(4.2)の第3の方程式の壁上での式から Neumann 形の境界条件を与える。しかし、同様に、(4.2)第1, もしくは、第2式から、Dirichlet 形の境界条件も得ることができ、問題は閉じてしまうことになる。(Gottlieb and Orszag [7])

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \bar{p}^{n+1} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{RHS}_i) \times \frac{1}{\text{Re}} \quad (4.3)$$

この矛盾を避けるため、ここでは、(4.2)を連立させて解いている。(2.6)の各項の x, y 方向の偏微分は、P. S 法では次のように計算される。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{i,j,k} = \sum_l \sum_m \sqrt{-1} k_x' \tilde{u}_{l,m,k} \exp\left(\sqrt{-1} 2\pi \left(\frac{il}{N_x} + \frac{jm}{N_y}\right)\right) \quad (4.4)$$

ここに、 $k_x' = 2\pi \cdot l / L_x$ である。すなわち、まず実空間の $\bar{u}_{i,j,k}$ から (4.1) により、フーリエ空間の $\tilde{u}_{l,m,k}$ を得、これに、 $\sqrt{-1} k_x'$ をかけて、逆フーリエ変換することにより、 x 方向の偏微分を得るわけで、 y 方向、および、高階の微分も同様に計算する。この方法は、与えられた自由度の中で最高の精度を与える。

(4.1) を、(4.2)に代入することにより、連立の偏微分方程式 (4.2) は、各波数の組 (k_x', k_y') に対し、 z に関する連立常微分方程式 (4.5) に置き換えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dz^2} \tilde{u}^{n+1} + \left(-\frac{2\text{Re}}{\Delta t} - k_x'^2 - k_y'^2 \right) \tilde{u}^{n+1} - \text{Re} \sqrt{-1} k_x \tilde{p}^{n+1} = \widetilde{\text{RHS}}_1 \\ \frac{d^2}{dz^2} \tilde{v}^{n+1} + \left(-\frac{2\text{Re}}{\Delta t} - k_x'^2 - k_y'^2 \right) \tilde{v}^{n+1} - \text{Re} \sqrt{-1} k_y \tilde{p}^{n+1} = \widetilde{\text{RHS}}_2 \\ \frac{d^2}{dz^2} \tilde{w}^{n+1} + \left(-\frac{2\text{Re}}{\Delta t} - k_x'^2 - k_y'^2 \right) \tilde{w}^{n+1} - \text{Re} \frac{d\tilde{p}^{n+1}}{dz} = \widetilde{\text{RHS}}_3 \\ \sqrt{-1} k_x \tilde{u}^{n+1} + \sqrt{-1} k_y \tilde{v}^{n+1} + \frac{d\tilde{w}^{n+1}}{dz} = \phi \end{array} \right. \quad (4.5)$$

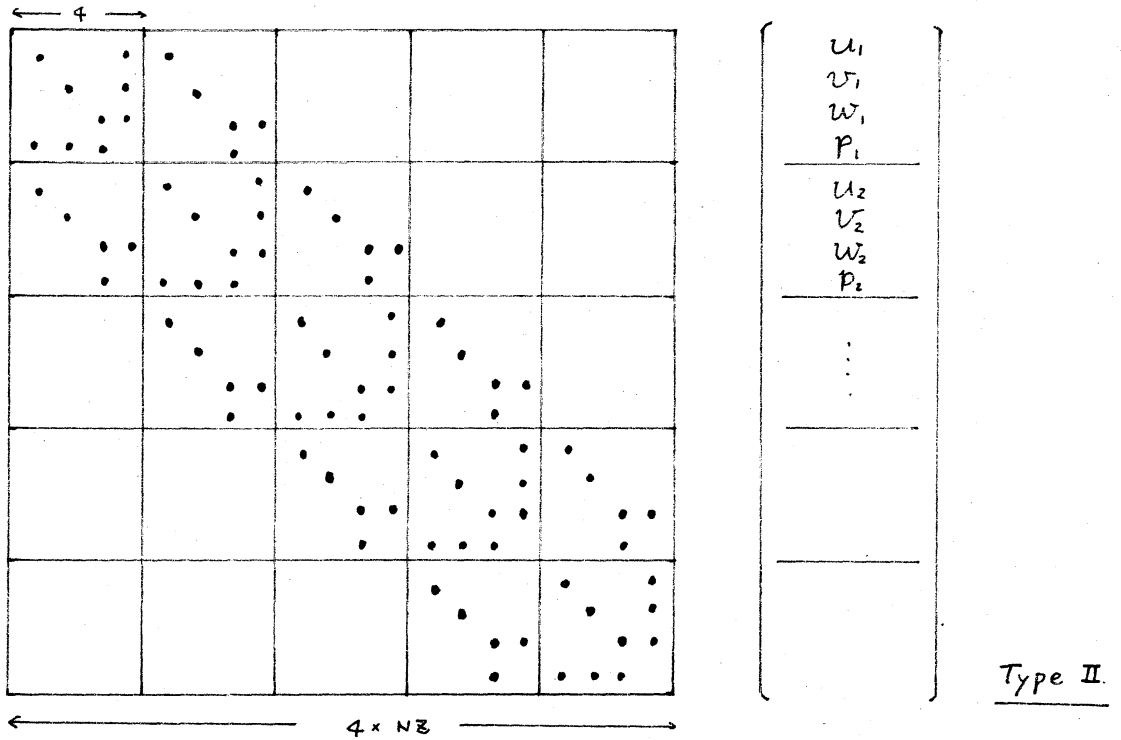
次に、 z 方向の微分を中心差分で近似することにより、
(4.5) は、連立の差分方程式 (4.6) を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_k \tilde{u}_{k-1} + \beta_k' \tilde{u}_k + \gamma_k \tilde{u}_{k+1} + \sqrt{-1} \beta_{x,k} \tilde{p}_k = \widetilde{\text{RHS}}_{1,k} \\ \alpha_k \tilde{v}_{k-1} + \beta_k'' \tilde{v}_k + \gamma_k \tilde{v}_{k+1} + \sqrt{-1} \beta_{y,k} \tilde{p}_k = \widetilde{\text{RHS}}_{2,k} \\ \alpha_k \tilde{w}_{k-1} + \beta_k''' \tilde{w}_k + \gamma_k \tilde{w}_{k+1} + d_k' \tilde{p}_{k-1} + d_k'' \tilde{p}_{k+1} = \widetilde{\text{RHS}}_{3,k} \\ \sqrt{-1} k_x \tilde{u}_k + \sqrt{-1} k_y \tilde{v}_k + e_k' \tilde{w}_{k-1} + e_k'' \tilde{w}_{k+1} = \phi \end{array} \right. \quad (4.6)$$

ここに、 α_k 等は係数で、詳細は省略する。又、suffix l, m も省略した。(4.6) は、Type II のような変数の並べ方を採用すれば、Block 3重対角形の行列 (図4) を係数行列にもつ連立方程式になるため、能率よく解くことができるが、一つの問題は、ほとんどの部分で対角要素が優越しているが、連続の方程式に相当する部分で、対角要素に零が現われることである。これは、例えば (4.6) の3式と4式を入れ替えることでも解消できるが

対角要素の優越性は必ずしも保証されない。

図 4



この問題は, Type I の並び方をとれば解消される。このとき, 方程式は, (4.7) のように書ける。

$$\begin{cases} B_1 \tilde{u}^{n+1} + C_1 \tilde{p}^{n+1} = f_1 & (4.7.1) \\ B_2 \tilde{v}^{n+1} + C_2 \tilde{p}^{n+1} = f_2 & (4.7.2) \\ B_3 \tilde{w}^{n+1} + C_3 \tilde{p}^{n+1} = f_3 & (4.7.3) \\ A_1 \tilde{u}^{n+1} + A_2 \tilde{v}^{n+1} + A_3 \tilde{w}^{n+1} = \phi & (4.7.4) \end{cases}$$

(4.7.1) ~ (4.7.3) より, $\tilde{u}^{n+1}, \tilde{v}^{n+1}, \tilde{w}^{n+1}$ を求め, (4.7.4) に代入して, (4.8) を得る。

$$(A_1 B_1^{-1} C_1 + A_2 B_2^{-1} C_2 + A_3 B_3^{-1} C_3) \tilde{p}^{n+1} = \text{RHS.} \quad (4.8)$$

しかし、(4.8) の係数行列は、三重対角性が失われ、 $Nz \times Nz$ の行列に密にまったものとなるため、計算時間、および、メモリーが、増大する欠点をもち、

(この際、注目すべきことは、(4.8) は、実質的に、(4.3) に相当するものになってける点である。) しかし、ここでは、Type I と II の双方を行ない、(但、双方とも pivoting はしていない。) 比較した結果、有意な差が認められなかったため、Type II を採用している。

計算時間のほとんどは、各波数の $\rho\sigma$ に対する連立方程式 (4.6) を解く部分と、P.S. 法を用いて (2.6) の非線形項を計算する部分、および、2次元の F.F.T. を行なう部分に分かれるが、いづれも、vectorize できるため、東大・大型計算機センターの S-810-20 を用いると、 $Nx = Ny = Nz = 32$ の格子点で、1ステップあたり、1秒以下で実行でき、M-280H にくらべて、20倍以上の加速率を出せる。現在は、拡張記憶を用いた 64^3 あるいは、 $64 \times 128 \times 64$ とした計算を計画している段階である。

計算結果の詳細な点は、Horvati [4] を参照されたい。

又、本研究では、P.S. 法を x, y 方向にのみ用い、 z

方向には差分法を用いたが、壁といた rigid な境界をもつ場合には、Chebyshev 多項式が有効である。(Gottlieb and Orszag [7].) しかし、LES にとり扱おうような、空間的に変動する eddy viscosity を、3方向の P.S. 法と組み合わせるには、まだ、多少の問題が残されているため、ここでは、差分法を用いた。

5. おわりに

平行平板間の LES 数値計算をするためのスキームとして、C.R. 法と P.S. 法の適用を試みた。P.S. 法は計算領域の形状が単純で、境界条件が、例えば、周期境界条件といった単純な場合には、有効に使えるが、複雑なときには、適用が難しい。こうした場合には、CR 法といった方法が有効になるものと思われる。

参考文献

- [1] Leonard, A., *Advan. Geophysics*, vol. 18A (1974) pp.237-248.
- [2] Smagorinsky, J. et al. *Mon. Weath. Rev.*, vol. 93 (1965), pp. 727-768.
- [3] Yoshizawa, A. et al., submitted to *J. Phys. Soc. Japan*.
- [4] Horiuti, K., to appear in *Turbulence Phenomena*, (Tokyo Institute of Technology Press)
- [5] 村田健郎, *ス-110-コンピュータ講習会テキスト* (1984)
- [6] 小柳義夫, *ス-110-コンピュータ講習会テキスト*, 日本物理学会.
- [7] Gottlieb, D and Orszag, S.A., *Numerical Analysis of Spectral Methods*, SIAM CBMS Monog. 26