数理解析研究所講究録
第548巻 1985年 223-241

函数方程式に対するCG法の適用について

大阪大学工学部 都田艶子
(Tsuyako Miyakoda)

[1] はじめに.

連立一次方程式の解法としてよく使われるCG法は、そのまま函数方程式に対する解法として適用できる。

我々は、2点境界値問題を解くことを目的として、それと等価なフレドホルム型積分方程式を解くことを考え、積分方程式に対し、CG法を適用した例を報告する。

[2] 境界値問題と積分方程式

常微分方程式

$$L[u] = p_0(x)u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = f(x) \qquad x \in I = [a, b] \tag{1}$$

境界条件 $B_1[u] = 0$, $B_2[u] = 0$

を考える。ただし

$p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ は滑らかな函数

$p_0(x)$ は I で 正, $f(x)$ は I で 連続

とする。今

$$D=\{u\,;\,u\in C^2(I),\ B_1[u]=0,\ B_2[u]=0\}$$

とし、これに対して次のような函数の集合を設定する。

$$D^*=\{v\,;\,v\in C^2(I),\ p_0(vu'-uv')+(p_1-p_0')uv\Big|_a^b=0,\ \text{for } u\in D\}$$

$v\in D^*$である条件は、共役な境界条件で、次のように書く。

$$B_1^*[v]=0\ ,\quad B_2^*[v]=0\ .$$

境界値問題が自己共役であるとは$L=L^*$, $D=D^*$であるときである。(1)に対するgreen函数$g(x,\xi)$は次を満たす。

$$L[g]=\delta(x-\xi)\quad ,\quad a<x,\xi<b$$

$$B_1[g]=0\ ,\quad B_2[g]=0\ .$$

そして、共役なgreen函数$h(x,\eta)$は次を満たすものとして定義する。

$$L^*[h]=\delta(x-\eta)\quad ,\quad a<x,\eta<b$$

$$B_1^*[h]=0\ ,\quad B_2^*[h]=0\ .$$

すると、これらより次の式が成り立つ.

$$\int_a^b(h\,L[g]-g\,L^*[h])\,dx=h(\xi,\eta)-g(\eta,\xi)=0$$

$$a<\xi,\eta<b$$

よって.

$$h(\xi,\eta)=g(\eta,\xi)$$

つまり、自己共役な境界値問題であれば

$$g(x,\xi)=g(\xi,x)\quad ,\quad a<x,\xi<b$$

が成り立つ。

そこで、自己共役な境界値問題

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x)$$

$$B_1[u]=\alpha u(a)+\alpha' u'(a)=0 \qquad (2)$$

$$B_2[u]=\beta u(b)+\beta' u'(b)=0$$

ここで、$f(x)=\lambda\sigma(x)u+s(x)$

λ；パラメータ

$\sigma(x)$；連続，非負の実数値函数

$s(x)$；Iで可測な実数値函数

とすると、この解はgreen函数を用いて

$$u(x)=\lambda\int_a^b g(x,\xi)\sigma(\xi)u(\xi)d\xi+\int_a^b g(x,\xi)s(\xi)d\xi \qquad (3)$$

と書ける。

$$K(x,\xi)=\sqrt{\sigma(x)}\,g(x,\xi)\sqrt{\sigma(x)}$$

$$r(x)=\sqrt{\sigma(x)}\int_a^b g(x,\xi)s(\xi)d\xi$$

$$y(x)=\sqrt{\sigma(x)}\,u(x)$$

とすると、(2)の解を表わす積分方程式は次のようになる。

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi+r(x) \qquad (4)$$

以下、解く方程式として考えるのは、この形の積分方程式とする。

[3] 線型方程式に対するCG法

一般的に方程式を次のように書く

$$Lx = f \tag{5}$$

ここで、

L；線型，自己共役，正値な作用素，$\mathcal{D} \to \mathcal{R}$

（$\mathcal{D}$, $\mathcal{R}$はともにHilbert空間$\mathcal{H}$の部分空間）

f；与えられたHilbert空間の元

とすると、Lは連続な逆作用素 L^{-1}；$\mathcal{R} \to \mathcal{D}$ をもち、(5)は唯一解 $u = L^{-1}f \in \mathcal{D}$ をもつ。

今、xを真の解uのある近似としたとき、

$$\left.\begin{aligned} r &= f - Lx \\ y &= u - x \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$E(x) = (y, r) = (u - x, L(u - x)) \tag{7}$$

とすると、任意の$x \in \mathcal{D}$，$h \in \mathcal{H}$に対し、

$$\delta E(x, h) = \frac{\partial}{\partial t} E(x + th)\Big|_{t=0} = -2(r, h)$$

$$\sup_h \{\delta E(x, h), \|h\| = 1\} = 2\|r\|$$

これより、誤差函数として考える汎函数$E(x)$のgradientはrであると考えられる。

さて、B_n, x_nを

$\{B_n\}$；$\mathcal{D}$に収束する有限次元の単調増加な閉部分空間の列

$$\{x_n\};\ x_n \in B_n\ ,\ E(x_n) = \min\{E(x),\ x \in B_n\}$$

としたとき、

$$r_n = f - Lx_n = L(u - x_n)$$

に対して、次のことが成り立つ。

$$(r_n, z) = 0 \text{ on } B_n\ ,\ \text{for } \forall z \in \mathfrak{D} \tag{8}$$

$$x_n \longrightarrow u\ (n \to \infty)\ ,\ (\text{ノルムの意味で})$$

今、u に対する任意の近似 x_0 とし、列 $\{v_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{aligned} v_0 &= r_0 = f - Lx_0 \\ v_n &= L^n r_0 \quad ,\quad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{9}$$

この $\{v_n\}$ は線型一次独立であり、B_n を $\{v_0, \cdots, v_{n-1}\}$ によって張られる部分空間とする。$\{v_i\}$ より、直交系 $\{p_i\}$ を

$$(Lp_i, p_j) = 0\ (i \neq j) \tag{10}$$

となるように構成する。(Schmidt の直交化法)。すると、$\{p_0, \cdots, p_{n-1}\}$ はまた B_n を張る。

$\mathfrak{D}$ を可分と仮定する。

$\mathfrak{D}$ には少くとも1つの線型独立な列 $\{p_n\}$ が存在し、各 B_n は $\{p_0, \cdots, p_{n-1}\}$ で張られ、$\bigcup^{\infty} B_n = \mathfrak{D}$ となる。

そこで、

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i p_i \tag{11}$$

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p_i \quad , \qquad x_n \in B_n \qquad (12)$$

とすると、

$$x_n = x_{n-1} + \alpha_{n-1} p_{n-1}$$

$(L(u - x_n), p_{n-1}) = 0$ より

$$\alpha_{n-1} = (r_{n-1}, p_{n-1}) / (L p_{n-1}, p_{n-1})$$

ただし $r_{n-1} = f - L x_{n-1}$

$$r_n = f - L x_n = r_{n-1} - \alpha_{n-1} L p_{n-1}$$

ここで、$\{p_n\}$ を $\{L^n r_0\}$ より構成すると

$p_0 = r_0$ として

$$p_n = L^{n-1} r_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L^{n-1} r_0, L p_k)}{(L p_k, p_k)} p_k \qquad (13)$$

となるが、これはまた直交系の三項漸化式の関係を用いると

$$p_n = -\alpha_{n-1} L p_{n-1} + (1 - \beta_{n-1}) p_{n-1} + \beta_{n-2} p_{n-2}$$

$$\beta_{n-1} = \frac{(r_n, L p_{n-1})}{(L p_{n-1}, p_{n-1})} \quad , \quad \beta_{-1} = 0 \qquad (14)$$

と書け、$p_0 = r_0$, $p_1 = r_1 - \beta_0 p_0$ より

$$p_n = r_n - \beta_{n-1} p_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

とできる。このとき次のそれぞれの関係式が成り立つ。

$$(r_i, r_k) = 0 \quad , \quad i \neq k$$

$$(p_n, r_k) = (r_n, r_n)$$

$$p_n = (r_n, r_n) \sum_{i=k}^{n} r_i / (r_i, r_k) \qquad (15)$$

$$(p_n, p_k) = \left((r_n, r_n)/(r_k, r_k)\right)(p_k, p_k)$$

以上より、反復公式は以下のようになる．

x_0；初期値

$$r_0 = f - Lx_0\ ,\quad p_0 = r_0$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k\ ,\qquad \alpha_k = \frac{(r_k, p_k)}{(Lp_k, p_k)} \tag{16}$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k L p_k$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k\ ,\qquad \beta_k = \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)}$$

誤差函数 $E(x)$ に対しては、以下のことがいえる。

$$\mu(z) = \frac{(Lz, z)}{(z, z)}\ ,\quad \nu(z) = \frac{(L^{-1}z, z)}{(z, z)}\ ,\quad z \in \mathcal{D}$$

とすると、$0 < m \leq \mu(z) \leq M$, $0 < \frac{1}{M} \leq \nu(z) \leq \frac{1}{m}$.（m, M はそれぞれ L のスペクトルの最大下界と最小上界）．

$$\frac{E(x_{n+1})}{E(x_n)} = \frac{(y_{n+1}, Ly_{n+1})}{(y_n, Ly_n)}$$

$$= 1 - \frac{2\alpha_n (p_n, Lp_n) - \alpha_n^2 (p_n, Lp_n)}{(y_n, Ly_n)}$$

$$= 1 - \frac{\alpha_n}{\nu(r_n)}$$

α_n は次の関係式を満たす．

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{\mu(r_n)} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{\mu(p_n)} \leq \frac{1}{m}$$

よって．$E(x_{n+1}) \leqq \left(1 - \frac{m}{M}\right) E(x_n)$

くりかえすと．

$$E(x_{n+1}) \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right) E(x_n) \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right)^{n+1} E(x_0) \tag{17}$$

$$E(x_{n+1}) = (y_{n+1}, Ly_{n+1}) \geqq m(y_{n+1}, y_{n+1})$$

$$E(x_{n+1}) = (L^{-1}r_{n+1}, r_{n+1}) \geqq \frac{1}{M}(r_{n+1}, r_{n+1})$$

より、さらに次のことがいえる.

$$(y_{n+1}, y_{n+1}) \leqq \frac{1}{m}E(x_{n+1}) \leqq \frac{1}{m}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{n+1}E(x_0) \qquad (18)$$

$$(r_{n+1}, r_{n+1}) \leqq \frac{1}{M}E(x_{n+1}) \leqq \frac{1}{M}\left(1-\frac{m}{M}\right)^{n+1}E(x_0) \qquad (19)$$

[4] 非線型境界値問題

今、解くべき方程式を次のようなものとする。

$$y''(x) = f(x, y(x)) \quad , \quad x \in I = [a, b]$$

$$\text{境界条件} \quad B_1[y] = 0 \, , \, B_2[y] = 0 \qquad (20)$$

この解は

$$g''(x) = 0 \, , \, B_1[g] = 0 \, , \, B_2[g] = 0$$

を満たす green 函数を用いて、次のような積分方程式となる。

$$y(x) = \int_a^b g(x, t) f(t, y(t))\, dt \qquad (21)$$

これは、Hammerstein 型の積分方程式として知られるものである。

以下、問題 (20) を解くことを、積分方程式 (21) を解くことに帰着させて考察を進める。[a, b] を [−1, 1] とする。このとき green 函数は次のようなものとなる。

$$g(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+1)(t-1) & , \quad x<t \\ \frac{1}{2}(x-1)(t+1) & , \quad x \geqq t\end{cases} \qquad (22)$$

積分方程式を一般的に書いて、次のようにする．

$$y(x)-\int_{-1}^{1}K(x,t)f(t,y(t))dt=0 \qquad (23)$$

このとき、$K(x,t)$ は対称，正値，2乗可積分 であるものである。

Hammerstein 積分演算子 H として

$$H(y)=\int_{-1}^{1}K(x,t)f(t,y(t))dt \qquad (24)$$

とおく。ここで

$f(t,u)$; 連続，$-1 \leq t \leq 1$，$-\infty < u < \infty$.

この演算子は２つの演算子の積で書ける．

$$H=KF \qquad (25)$$

ただし、$K(y)=\int_{-1}^{1}K(x,t)y(t)dt$

$F(y)=f(s,y(s))$, $-1 \leq s \leq 1$

これでわかるように、K は線型演算子，$F'(y_0)=f'_y(s,y_0(s))\cdot I$ もまた線型演算子である。よって

$$H'(y_0)=KF'(y_0)=Kf'_y(s,y_0(s))\cdot I \qquad -1 \leq s,t \leq 1$$

$$H'(y_0)(y)=\int_{-1}^{1}K(s,t)f'_y(t,y_0(t))y(t)dt \qquad (26)$$

H' は線型演算子である。

(23) を解くために、次の条件を付け加える。

1. $f(t,u)$; $-1 \leq t \leq 1$, $-\infty < u < \infty$ で連続，u について偏

微分可能

2. $|f(t,u)| < M + N|u|$, M; $K(s,t)$の最大固有値

$N > 0$ (27)

3. $\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leq c < M$

[5] 非線型積分方程式に対するCG法

解く方程式(23)を次のように書く.

$$J(y) = y - H(y) = 0 \qquad (28)$$

Jは$\mathcal{H}$から$\mathcal{H}$へのyについての連続な写像である。

次のことを仮定する。

K ; 対称, 完全連続, 正値の線型演算子

F ; 連続な potential 演算子

$H'_{y_0} = KF'_{y_0}$ は条件(27)より, 有界な線型演算子であり、次が成り立つ。

$$(KF'_y(h), k) = (h, KF'_y(k)) \ , \quad h, k \in \mathcal{H} \qquad (29)$$

ゆえに、ある汎函数$g(y)$が存在して, FのFrechet微分がyについて存在する領域で、grad $g = J$ となるものがある。そこで、grad $g(y) = J(y) = 0$ なるyを求めることに問題を帰着させることができる。

線型の場合に準じて、近似解の列を

$$y_{k+1} = y_k + c_k p_k \qquad (30)$$

c_k ; 実数

p_k ; H で定義されたある点列

で計算するものとする。このとき $\dfrac{d}{dc}g(y+cp)=0$ なる c を求めることは $(J(y+cp),\ p)=0$ なる c を求めることに一致する。

$$(J(y+cp),\ p)\fallingdotseq(J(y)+cJ_y'(p),\ p)=0$$

より $c=-(J(y),p)/(J_y'(p),p)$ とする。

$\{p_k\}$ は J_y' に関して共役になるように定めることにすれば、反復公式は線型の場合に準じて、次のようにできる。

y_0 ; 初期値

$$\begin{aligned}
&r_0=-J(y_0)\ ,\quad p_0=r_0\\
&y_{k+1}=y_k+c_kp_k\ , \qquad c_k=-\frac{(J(y_k),\ p_k)}{(J_{y_k}'(p_k),\ p_k)}\\
&r_{k+1}=-J(y_{k+1})\\
&p_{k+1}=r_{k+1}+b_kp_k\ , \qquad b_k=-\frac{(r_{k+1},\ J_{y_{k+1}}'(p_k))}{(p_k,\ J_{y_{k+1}}'(p_k))}
\end{aligned} \tag{31}$$

これによる数値例を(表1)，(表2)，(表3)に示す。例題は次のものである。[7]

(例1) $y''(x)=\dfrac{3}{8}y(x)^2+\dfrac{3}{8}y(x)(3x-5)-\dfrac{3}{32}(3x-5)^2$

$y(-1)=y(1)=0$

解く方程式

$$y(x)-\int_{-1}^{1}g(x,t)\left\{\frac{3}{8}y(t)^2+\frac{3}{8}y(t)(3t-5)-\frac{3}{32}(3t-5)^2\right\}dt=0$$

1つの真の解 $y(x)=16/(x+3)^2+(3x-5)/2$.

[表 1]

(例.1)　N=15,　Gauss-Chebyshev 積分公式

反復回数　8

		y_n (近似値)	r_n	$u-y_n$ (誤差)
1	X=	-0.689951325193848865D-02	0.8085122D-09	0.1427045D-02
2	X=	-0.582201309028894751D-01	0.3666695D-08	0.9733238D-02
3	X=	-0.151735587118359855D+00	0.5513701D-08	0.2128331D-01
4	X=	-0.276252530705659402D+00	0.6643924D-08	0.3291880D-01
5	X=	-0.418673264460276057D+00	0.7870028D-08	0.4333961D-01
6	X=	-0.564179436795575723D+00	0.8463432D-08	0.5289895D-01
7	X=	-0.696527312877439297D+00	0.7089547D-08	0.6319714D-01
8	X=	-0.798592848312280279D+00	0.3827241D-08	0.7637062D-01
9	X=	-0.853388416571218431D+00	0.6865250D-09	0.9391935D-01
10	X=	-0.845893037954980498D+00	-0.4843318D-09	0.1149649D+00
11	X=	-0.766169192139487712D+00	-0.7009584D-09	0.1342086D+00
12	X=	-0.614285497856656981D+00	-0.1942557D-08	0.1408913D+00
13	X=	-0.407269974479490968D+00	-0.1832346D-09	0.1217442D+00
14	X=	-0.187190918538144957D+00	0.8486328D-08	0.7179108D-01
15	X=	-0.269581755248003646D-01	0.6256101D-08	0.1335261D-01

[表 2]

(例 1)　N=15,　Gauss-Legendre 積分公式

反復回数 8

		y_n (近似値)	r_n	$u-y_n$ (誤差)
1	X=	-0.299501472316662330D-01	0.6113633D-09	0.3605444D-03
2	X=	-0.147322800148819044D+00	-0.4279371D-08	0.1835200D-02
3	X=	-0.320236852864916988D+00	-0.1871993D-07	0.3490125D-02
4	X=	-0.501280973385872297D+00	-0.2465573D-07	0.4486617D-02
5	X=	-0.649246964651592220D+00	-0.1685524D-07	0.4572133D-02
6	X=	-0.738951729954824471D+00	-0.8056501D-08	0.3976002D-02
7	X=	-0.762308331581731627D+00	-0.5236012D-08	0.3075293D-02
8	X=	-0.724389343752725637D+00	-0.6114501D-08	0.2167121D-02
9	X=	-0.638282814171576188D+00	-0.7804381D-08	0.1408500D-02
10	X=	-0.520762425438363277D+00	-0.9087171D-08	0.8465832D-03
11	X=	-0.389288425146380485D+00	-0.8769790D-08	0.4673492D-03
12	X=	-0.260143864379850459D+00	-0.6239213D-08	0.2322487D-03
13	X=	-0.147342659070128459D+00	-0.2815132D-08	0.9893268D-04
14	X=	-0.620041504062784007D-01	-0.5794674D-09	0.3101895D-04
15	X=	-0.119825071903818534D-01	-0.7493960D-11	0.2167499D-05

[表 3]

(例 2)　N=15，Gauss-Legendre 積分公式

反復回数 5

		y_n (近似値)	r_n	$u-y_n$ (誤差)
1	X=	-0.278222015488345081D-02	-0.1074232D-09	0.1711941D-04
2	X=	-0.141453460854058270D-01	-0.3568574D-09	0.9420828D-04
3	X=	-0.325550836753736193D-01	-0.2584737D-09	0.2153210D-03
4	X=	-0.549316663119360600D-01	0.2673056D-09	0.3561487D-03
5	X=	-0.776011713671145020D-01	0.6761755D-09	0.4918675D-03
6	X=	-0.969228887679718792D-01	0.4685332D-09	0.6021790D-03
7	X=	-0.109857145711528575D+00	-0.1534856D-09	0.6733335D-03
8	X=	-0.114401103651282809D+00	-0.4886821D-09	0.6978276D-03
9	X=	-0.109857145711528589D+00	-0.1534856D-09	0.6733335D-03
10	X=	-0.969228887679719070D-01	0.4685331D-09	0.6021790D-03
11	X=	-0.776011713671145020D-01	0.6761756D-09	0.4918675D-03
12	X=	-0.549316663119360582D-01	0.2673056D-09	0.3561487D-03
13	X=	-0.325550836753736202D-01	-0.2584737D-09	0.2153210D-03
14	X=	-0.141453460854058287D-01	-0.3568574D-09	0.9420828D-04
15	X=	-0.278222015488345092D-02	-0.1074232D-09	0.1711941D-04

(例 2)　$y''(x)=\frac{1}{4}\exp(y(x))$, $y(-1)=y(1)=0$

解く方程式

$$y(x)-\int_{-1}^{1} g(x,t)\frac{\exp(y(t))}{4}dt = 0$$

真の解　$y(x)=-\ln 2+2\ln\left(C\sec\frac{Cx}{4}\right)$, $C=1.3360559\cdots$

次数はいずれの場合も $N=15$ とし、例 1 に対しては、積分公式として Gauss-Chebyshev 公式を用いた場合(表 1.)、Gauss-Legendre 公式を用いた場合(表 2.)、例 2 に対しては、Gauss-Legendre 公式を用いた場合(表 3)を示した。近似値 y_n は Chebyshev 点 又は Legendre 点を分点としたときのその上での値という形で求めている。分点の分離精度は 10^{-15}, CG 法の収束判定には $\varepsilon=10^{-11}$, $\left|\|r_n\|^2-\|r_{n-1}\|^2\right|<\varepsilon$ を用いた。初期値としては ε を与え、小さい解を求めるようにしている。

例からわかるように CG 法の収束はかなり速い。が、解の精度については積分の近似度に依存する。

[6] Legendre 多項式展開による線型演算部分の計算

解くべきもとの問題は

$$y''(x)=f(x,y(x)),\quad y(-1)=y(1)=0 \tag{20}$$

であるが、これを green 函数を用いて等価な積分方程式

$$y(x)=\int_{-1}^{1} g(x,t)\,f(t,y(t))\,dt \tag{23}$$

を解くことに帰着させて考えてきた。しかしgreen函数を核とする積分は[5]でみたように、その計算をGauss-Legendre公式で行った場合でも、CG法における残差は10^{-8}であるにもかかわらず、近似解の誤差は10^{3}であった。我々は未知函数$y(x)$の推定を標本点上での値という形でもつ。その標本点は積分のための分点と同一のものを用いる。それゆえ、標本点を可変とはできないので、適応型の積分公式を使うことができない。積分方程式の核であるgreen函数が、今の場合、1次微係数が不連続であるため、その積分の精度は[-1, 1]で台形公式を利用してだした結果以上の精度はでないことがいえる。

そこで、この点を克服するために、以下のようにする。

境界値問題(20)を解くことはまた、次の2重積分を計算することに等しい。

$$y(x)=\int_{-1}^{x} dx\int_{-1}^{x} f(t,y(t))\,dt+\alpha+\beta x \tag{32}$$

α, β ; $y(-1)=y(1)=0$ で決まる定数

我々は、Hammerstein型非線型積分方程式の線型計算に相当する部分

$$K(y)(x)=\int_{-1}^{1} k(x,t)\,f(t)\,dt$$

を、次の形の2重積分で行うことにする．

$$G(x)=\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}f(t,y(t))dt+\alpha+\beta x \qquad (33)$$

いま，

$$F(t)=f(t,y(t))$$

とおく．標本点$\{t_i\}$とし、未知函数$y(x)$の標本点上の推定$\{y(t_i)\}$がわかっているものとする。そして、$F(t)$をLegendre多項式系$\{P_k(t)\}$によって、次のように展開する。

$$F(t)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k P_k(t) \qquad (34)$$

ここで，

$$c_k=\int_{-1}^{1}F(t)P_k(t)dt \qquad (35)$$

これより

$$G(x)=\sum_{k=0}^{n-1}c_k\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}P_k(t)dt+\alpha+\beta x \qquad (36)$$

である。Legendre多項式は次の関係が成り立つ．

$$P_k(t)=\frac{1}{2k+1}(P'_{k+1}(t)-P'_{k-1}(t))$$
$$P_k(-1)=(-1)^k,\quad P_k(1)=1 \qquad (37)$$

この関係を使って(36)を計算すると、次のようになる。

$$G(x)=A+B+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{c_k}{2k+1}\left\{\frac{1}{2k+3}(P_{k+2}(x)-P_k(x))-\frac{1}{2k-1}(P_k(x)-P_{k-2}(x))\right\}+\alpha+\beta x$$

$$
\begin{aligned}
A &= C_0\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}P_0(t)\,dt = \frac{C_0}{3}\left(P_2(x)-P_0(x)\right)\\
B &= C_1\int_{-1}^{x}dx\int_{-1}^{x}P_1(t)\,dt = \frac{C_1}{15}\left(P_3(k)-P_1(x)\right)
\end{aligned}
\qquad (38)
$$

境界条件 $y(-1)=y(1)=0$ は ここで $G(-1)=G(1)=0$ であるが、関係 (37) を用いると $\alpha=\beta=0$ となるのがわかる。従って、(33) は次の式によって求めることができる。

$$
G(x) = A + B + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{C_k}{2k+1}\left\{\frac{1}{2k+3}\left(P_{k+2}(x)-P_k(x)\right) - \frac{1}{2k-1}\left(P_k(x)-P_{k-2}(x)\right)\right\} \qquad (39)
$$

A, B は (38) による。

各標本点上での $P_k(x)$ の値は、次の漸化式に従って求める。

$$
\begin{aligned}
&P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x\\
&P_k(x)=\frac{2k-1}{k}\,x\,P_{k-1}(x)-\frac{k-1}{k}P_{k-2}(x)
\end{aligned}
\qquad (40)
$$

以上により、反復公式 (31) における $J(y_{k+1})$, $J'_{y_k}(p_k)$ の中の次の2つの計算

$$
\begin{aligned}
H(y_{k+1})(x) &= \int_{-1}^{1} g(x,t)\,f(t,\,y_k(t))\,dt\\
H'_y(p_k)(x) &= \int_{-1}^{1} g(x,t)\,f'_y(t,\,y(t))\,p_k(t)\,dt
\end{aligned}
$$

を、(35), (39), (40) によっておきかえることにより、(31)

を実行する。標本点はN次 Legendre 多項式の零点を用い、展開係数 C_k の計算(35)には、Gauss-Legendre 公式を用いることとした。

この場合における数値例を、[5]の場合と同様の次の2つの問題について示す。

(例1) $y''(x)=\frac{3}{8}y(x)^2+\frac{3}{8}y(x)(3x-5)-\frac{3}{32}(3x-5)^2$

$$y(-1)=y(1)=0$$

[表.4]

(例2)

$$y''(x)=\frac{1}{4}\exp(y(x))$$

$$y(-1)=y(1)=0$$

[表.5]

次数は[5]の場合と同じく、N=15とし、これは多項式展開の項数と C_k を求める積分の次数

[表.4]

(例1) N=15(展開項数 及び 積分の次数)

反復回数 21

		y_n(近似値)	r_n
1	X=	-0.2958961397529789 96D-01	0.2051823D-08
2	X=	-0.1454876053291042 36D+00	0.7908191D-08
3	X=	-0.3167467176715874 08D+00	0.1004758D-07
4	X=	-0.4967943569371376 79D+00	0.3710091D-08
5	X=	-0.6446748289565820 97D+00	-0.8108265D-08
6	X=	-0.7349757359057826 34D+00	-0.1826393D-07
7	X=	-0.7592330521964372 61D+00	-0.2187349D-07
8	X=	-0.7222222374112764 60D+00	-0.1889912D-07
9	X=	-0.6368743234507122 51D+00	-0.1237267D-07
10	X=	-0.5199158467147281 53D+00	-0.5609133D-08
11	X=	-0.3888210746691230 93D+00	-0.6970016D-09
12	X=	-0.2599116138523943 91D+00	0.1703801D-08
13	X=	-0.1472437219162780 20D+00	0.1997274D-08
14	X=	-0.6197312673933007 36D-01	0.1160965D-08
15	X=	-0.1198033465614076 89D-01	0.2601895D-09

		u(真値)	$u-y_n$(誤差)
1	X=	-0.295896027479816137D-01	0.1122731D-07
2	X=	-0.145487599715857341D+00	0.5613246D-08
3	X=	-0.316746727610887957D+00	-0.9939300D-08
4	X=	-0.496794356307986851D+00	0.6291508D-09
5	X=	-0.644674831613044619D+00	-0.2656462D-08
6	X=	-0.734975727559483483D+00	0.8346299D-08
7	X=	-0.759233038538671412D+00	0.1365776D-07
8	X=	-0.722222222222222321D+00	0.1518905D-07
9	X=	-0.636874314040686951D+00	0.9410025D-08
10	X=	-0.519915842140160622D+00	0.4574567D-08
11	X=	-0.388821075880272371D+00	-0.1211149D-08
12	X=	-0.259911615660243678D+00	-0.1807849D-08
13	X=	-0.147243726387018325D+00	-0.4470740D-08
14	X=	-0.619731314514930798D-01	-0.4712163D-08
15	X=	-0.119803396904922810D-01	-0.5034351D-08

を表わす。積分はGauss-Legendre公式。CG法の収束判定は[5]と同様にした。たとえば例1の場合、残差と同程度の誤差となっており、[5]の場合と比べて、近似解の精度はずっとよくなっているのがみられる。例2の場合には、誤差の程度は、残差よりもわるいが、[5]の場合よりはやはり良い。積分方程式の中の核として、green函数をもったまま計算を実行するのを避けて、このような直交多項式展開を用いて積分を実行するようにすると、望ましい結果が得られやすくなるということがわかると思う。反復回数は、例1，例2のどちらの場合も[5]よりは多くなっている。反復回数，近似解の精度はともに、次数Nを増しても、この場合あまり変化

[表・5]

(例2)　N=15（展開項数，及び積分の次数）

反復回数　10

		y_n（近似値）	r_n
1	X=	-0.276552430449042132D-02	-0.1440418D-10
2	X=	-0.140515571771501228D-01	-0.1245540D-09
3	X=	-0.323401748103300003D-01	-0.4720000D-09
4	X=	-0.545759220727055896D-01	-0.1158734D-08
5	X=	-0.771096997669456219D-01	-0.2126268D-08
6	X=	-0.963210994893208272D-01	-0.3146681D-08
7	X=	-0.109184198107936198D+00	-0.3921249D-08
8	X=	-0.113703660629264930D+00	-0.4209579D-08
9	X=	-0.109184198107936212D+00	-0.3921249D-08
10	X=	-0.963210994893208411D-01	-0.3146681D-08
11	X=	-0.771096997669456358D-01	-0.2126268D-08
12	X=	-0.545759220727055948D-01	-0.1158734D-08
13	X=	-0.323401748103300047D-01	-0.4720000D-09
14	X=	-0.140515571771501254D-01	-0.1245540D-09
15	X=	-0.276552430449042181D-02	-0.1440418D-10

		u（真値）	$u-y_n$（誤差）
1	X=	-0.276510073672825429D-02	0.4235677D-06
2	X=	-0.140511378049734126D-01	0.4193721D-06
3	X=	-0.323397626715287712D-01	0.4121388D-06
4	X=	-0.545755175216677546D-01	0.4045510D-06
5	X=	-0.771093038431694411D-01	0.3959237D-06
6	X=	-0.963207097649899646D-01	0.3897243D-06
7	X=	-0.109183812144089121D+00	0.3859638D-06
8	X=	-0.113703276004219700D+00	0.3846250D-06
9	X=	-0.109183812144089121D+00	0.3859638D-06
10	X=	-0.963207097649899646D-01	0.3897243D-06
11	X=	-0.771093038431694411D-01	0.3959237D-06
12	X=	-0.545755175216677546D-01	0.4045510D-06
13	X=	-0.323397626715287712D-01	0.4121388D-06
14	X=	-0.140511378049734126D-01	0.4193721D-06
15	X=	-0.276510073672825429D-02	0.4235677D-06

はない。

[7] Reference

(1) M.M. Vainberg ; Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators , Holden-Day , 1964.

(2) L. B. Rall ; Computational Solutions of Nonlinear Operators Equations , John-Wiley Sons , 1969.

(3) M.M. Vainberg ; Variational Method and Method of Monotone Operators , John-Wiley Sons , 1973.

(4) M. Z. Nashed ; The Convergence of the Method of Steepest Descent for Nonlinear Equations with Variational or Quasi-variational Operators , J. Math. Mech., vol. 13, 1964.

(5) J. W. Daniel ; The Conjugate Gradient Method for Linear and Nonlinear Operator Equations , SIAM J. Numer. Anal. , vol. 14 , 1967.

(6) David , Rabinowitz ; Methods of Numerical Integration, Academic Press , 1975.

(7) C. Suzuki ; Numerical Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems by Lobatto's Quadratures , IIAS Fujitsu , R.R. , No. 46 , 1984.