数理解析研究所講究録
第549巻 1985年 52-72

整環の表現における
AUSLANDER-REITEN QUIVER

信州大・教育　岩永恭雄 (Yasuo Iwanaga)

体の上の有限次元多元環の表現において最も基本的かつ重要であった Brauer-Thrall の予想—直既約表現の次元に関して上限があれば，直既約表現の同型類は有限個か？—は 1968年に A.V. ROITER によって肯定的に解決されたが，その証明からヒントを得て M. AUSLANDER と I. REITEN は [1] において，"almost split sequence" なる概念を導入し，それを利用して artin 多元環（中心上有限生成加群である artin 環）の表現を発展させた． almost split sequence の有効性はその後，多くの人によって明らかにされており，現在は多元環の表現において，この概念は常識となっている．

標題の "Auslander-Reiten quiver" とは，直既約加群の同型類を点とし，almost split sequence から導かれる矢によって点が結ばれている有向グラフのことである． 与えられた多元環に対してその Auslander-Reiten quiver の形を決定

することは重要な問題であって，逆にそれを指標として多元環を分類するということも行われている．　実際，ある種の多元環（*e.g.* 有限表現型の遺伝的多元環，QF多元環 *etc.*）については解明されており，又幾何学的観点から取り組んだ仕事も出ている．

一方，1976年頃からK.W. ROGGENKAMPは *almost split sequence* を整環（*order*）の表現にも利用することをAUSLANDERに示唆し，彼ら及びその周辺の人々が実際に成果をあげてきている．　更につい最近では，AUSLANDERは整環の表現と *singularity* との関連性についての仕事を行い，それについて1983年の *Antwerp* 及び1984年の *Ottawa* での *Conference* で発表し，1984年に *Bielefeld Univ.* では講義をしている，［22］．（紙数の制限上，今回はこれに言及しない．）

この報告では，上記の仕事について幾つか興味のあるものを紹介してみたい．　又，総合報告的な記事としては，［11］と［12］がある．

§1. ALMOST SPLIT SEQUENCES

まず *almost split sequence* の定義から始める．

この§では，

R = 可換 noether 環,

Λ = R-algebra, i.e. ∃ ring homomorphism $R \longrightarrow \mathrm{Center}(\Lambda)$ かつ Λ は R-加群として有限生成

としておく.

<u>定義</u>. Λ-加群の完全列 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ は次の条件が充たされているとき, <u>almost split sequence</u> 又は <u>Auslander-Reiten sequence</u> (略して A-R列) と云われる:

(i) split していない,

(ii) $f : {}_\Lambda X \longrightarrow {}_\Lambda C$ が 'splittable epi' でなければ, ∃Λ-準同型 $h : {}_\Lambda X \longrightarrow {}_\Lambda B$ s.t. $\psi h = f$,

$$\begin{tikzcd} & & & X \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"'] & B \arrow[r, "\psi"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(iii) $g : {}_\Lambda A \longrightarrow {}_\Lambda Y$ が 'splittable mono' でなければ, ∃Λ-準同型 $h' : {}_\Lambda B \longrightarrow {}_\Lambda Y$ s.t. $h'\varphi = g$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[r, "\psi"] \arrow[dl, dashed, "\exists h'"] & C \arrow[r] & 0 \\ & Y \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & & & \end{tikzcd}$$

定義から, 加群の直既約, A-R列の一意性が次のような形で成立する.

PROPOSITION

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0, \qquad 0 \to A' \xrightarrow{\varphi'} B' \xrightarrow{\psi'} C' \to 0$$

を共にΛ-加群の A-R 列とする．

(1) $\mathcal{E}nd_\Lambda(A)$, $\mathcal{E}nd_\Lambda(C)$ は共に局所環であり，従って，$_\Lambda A$, $_\Lambda C$ は直既約.

(2) 次は全て同値である：

(i) 上の 2 つの A-R 列は同型，i.e.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \to & 0 \\
 & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \\
0 & \to & A' & \xrightarrow{\varphi'} & B' & \xrightarrow{\psi'} & C' & \to & 0
\end{array}$$

なる可換図式を得る，

(ii) $A \cong A'$ （Λ-加群として），

(iii) $C \cong C'$ （Λ-加群として）.

この結果から，A-R 列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ は A 又は C により同型を除いて一意的に決定されるので，A 及び C の *invariant* と云える．そこで，C によって決まる A を τC で，A によって決まる C を $\tau^{-1}A$ で表わし，この τ を <u>*Auslander-Reiten translation*</u> と呼ぶ．

更に，与えられたΛに対して，次の基本的な問題が生じる．

(1) どのようなΛ-加群A, Cに対して, A-R列
$0 \to A \to B \to C \to 0$が存在するか？

(2) Λ-加群A, CがA-R列$0 \to A \to B \to C \to 0$として現われるとき, τ又はτ^{-1}を具体的に記述せよ.

(3) A-R列$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$があったとき, Λ-加群A及びC, そしてmorphisms φ, ψにA-R列はどのような影響を与えるか？

これらの問題に対して以下の§§で解答を与えるのであるが, その前に幾つかA-R列の例を述べる.

<u>EXAMPLES</u>　ここでは, Rを完備な離散的付値環, RのJacobson radicalを$(\pi) = \pi R$とする.

(1) $$\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ \pi R & R \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R, \ \begin{matrix} c \in \pi R \\ a - d \in \pi R \end{matrix} \right\}$$

とすると, ΛはいわゆるGorenstein orderで,
$$\begin{pmatrix} R \\ \pi R \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}, \ \Lambda$$
が全ての非同型な直既約Λ-lattice, i.e. R-torsionfree, 有限生成なΛ-加群である.

Λ上のA-R列は次の2種類となる：

$$0 \to \begin{pmatrix} R \\ \pi R \end{pmatrix} \to \Lambda \to \begin{pmatrix} R \\ \pi R \end{pmatrix} \to 0 ,$$

$$0 \to \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \to \Lambda \to \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} \to 0 ,$$

従って,

$$\tau \begin{pmatrix} R \\ \pi R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ \pi R \end{pmatrix} , \quad \tau \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix} .$$

(2) $\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ \pi^t R & R \end{pmatrix}$, $t \geqq 1$

とすると, この Λ も Gorenstein order であって, $1 \leqq i \leqq t-1$ なる任意の i について,

$$0 \to \begin{pmatrix} R \\ \pi^i R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R \\ \pi^{i-1} R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R \\ \pi^{i+1} R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R \\ \pi^i R \end{pmatrix} \to 0$$

なる A-R 列を得る.

(3) G = 有限群,

R = p-進整数環,

Λ = $R[G]$, 群環

${}_\Lambda P$ = Λ の principal block に属する直既約射影加群

とすると,

$$0 \to {}_\Lambda K \to {}_\Lambda P \to {}_\Lambda R \to 0$$

なるΛ-加群の完全列を得るが，これはΛ-加群${}_\Lambda R$の射影被覆であって，かつA-R列になっている．

§2. A-R列の存在性とその構成

通常，整環の表現を展開する際，表現加群としては，いわゆる'lattice'のみを取り扱うわけであるから，A-R列について論ずるときもlatticesのカテゴリーで話を展開しなければならない，i.e. A-R列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ においてA, B, Cは全てlatticeであるようにする必要がある．そこで，この§ではこのようなA-R列の存在性，及び存在する場合にはどのように構成するかを述べる．

以下，取り扱う整環は次のようなものとする：

R = 完備な離散的付値環，

K = Rの商体，

Λ = 分離的 K-多元環の中のR-整環，
i.e. $\Lambda \otimes_R K$ は分離的多元環

$$\mathcal{L}(\Lambda) = 左\ \Lambda\text{-lattices の category}.$$

このとき，Λが semiperfect 環，i.e. 任意の有限生成なΛ-加群は射影被覆を持つことに注意する必要がある．

<u>THEOREM</u> [4], [16] (存在性定理)

$\mathcal{L}(\Lambda)$ は A-R列を持つ, i.e. 非射影的 Λ-lattice C に対して, $0 \to A \to B \to C \to 0$ with $A, B \in \mathcal{L}(\Lambda)$ なる A-R列が存在する. 双対的に, 非入射的 Λ-lattice A に対して, $0 \to A \to B \to C \to 0$ with $B, C \in \mathcal{L}(\Lambda)$ なる A-R列が存在する. ここで, A, C は直既約とする.

ここに Λ が有限表現型のとき, i.e. 非同型な直既約 Λ-lattices が有限個である場合の証明を述べるが, そのアイデアは一般の場合にも, 加群を functor に置き換えることにより有効である.

今, Λ を有限表現型と仮定し, 全ての非同型な直既約 Λ-lattices $M_1, \cdots, M_t$ を取って, $G = \coprod_{i=1}^{t} M_i$ とおく. このとき, $\Gamma = \mathcal{E}nd_\Lambda(G)$ を考えると, Γ は

$$gl.\dim \Gamma \leq 2, \quad dom.\dim \Gamma \geq 2$$

なる R-order となり, functor $Hom_\Lambda(G, -)$ は $\mathcal{L}(\Lambda)$ と射影的 Γ-lattices の category $\underline{P}(\Gamma)$ の間の equivalence を与える, [5].

さて, $M_i = C$ を非射影的とすると, $Hom_\Lambda(G, C)$ は直既約な射影的 Γ-lattice なので unique maximal submodule L を持ち, ${}_\Gamma L$ は射影的でない. このとき,

$$0 \longrightarrow {}_\Gamma L \longrightarrow {}_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(G,C) \longrightarrow {}_\Gamma S \longrightarrow 0$$

なる単純Γ-加群 $S = \mathrm{Hom}_\Lambda(G,C)/L$ の射影被覆を得るが，更に，Γ-加群 L の射影被覆を

$${}_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(G,B) \longrightarrow {}_\Gamma L \longrightarrow 0 \quad \text{with } B \in \mathcal{L}(\Lambda)$$

とすると，$gl.\dim \Gamma \leqq 2$ より，

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(G,A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(G,B) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(G,C) \to S \to 0$$
$$\text{with } A \in \mathcal{L}(\Lambda)$$

なる ${}_\Gamma S$ の最小射影分解 (*minimal projective resolution*) を得る．　更に，これから導かれるΛ-加群（実際はΛ-*lattice*）の完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ が A-R 列であることが示される．　そこで，$f : {}_\Lambda X \to {}_\Lambda C$ を *splittable epi* でないとすると，f から導かれたΓ-準同型 $\bar{f} : \mathrm{Hom}_\Lambda(G,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(G,C)$ は *epic* でないので，

$$\begin{tikzcd}
 & {}_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(G,X) \arrow[dl, dashed, "\exists \bar{h}"'] \arrow[d, "\bar{f}"] \arrow[dl, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] & \\
{}_\Gamma \mathrm{Hom}_\Lambda(G,B) \arrow[r] & {}_\Gamma L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

なる可換図式を得る．　この $\bar{h}$ から導かれるΛ-準同型 $h : {}_\Lambda X \longrightarrow {}_\Lambda B$ により，

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, shift left=4, "\circlearrowleft"] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

この証明を一般の場合に拡張するには，上述のGの役割を忘れて，射影的Γ-加群 $Hom_\Lambda(G, X)$ の代わりに functor category $Func(\mathcal{L}(\Lambda), Ab.)$ における射影的対象 $Hom_\Lambda(-, X)$ に移行することになる．詳細は [4] 又は [16] を参照．

次に，A-R列の構成について述べ，p.5の問題(2)の解答を与えたい．

Λ-加群 ${}_\Lambda X$ に対して，$X^*{}_\Lambda = Hom_\Lambda(X, \Lambda)$，更に，$DX = Hom_R(X, R)$ を R-duality とおく．${}_\Lambda C$ を直既約な非射影的左 Λ-lattice，

$$ {}_\Lambda P \xrightarrow{p} {}_\Lambda C \longrightarrow 0 $$

をその射影被覆とすると，右 Λ-lattices の完全列

$$ \begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & Hom_\Lambda(C, \Lambda)_\Lambda & \xrightarrow{[p, \Lambda]} & Hom_\Lambda(P, \Lambda)_\Lambda & \longrightarrow & Cok[p, \Lambda] & \longrightarrow 0 \\ & \| & & \| & & \| \text{ put} & \\ & C^* & & P^* & & Tr\,C & \\ & & & & & (\underline{transpose} \text{ of } C) & \end{array} $$

を得る，ここで，$[p, \Lambda] = Hom_\Lambda(p, \Lambda)$．更に，これにDを施すと，

$$ 0 \longrightarrow {}_\Lambda DTr\,C \longrightarrow {}_\Lambda DP^* \xrightarrow{D[p, \Lambda]} {}_\Lambda DC^* \longrightarrow 0 $$

なる左 Λ-lattices の完全列を得るが，Cを右側の項に持つA-R列を求めるために，この完全列に $Hom_\Lambda(-, C)$ を施すと，

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(C, DP^*) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_\Lambda(C, DC^*)$$

$$\xrightarrow{\sigma} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, DP^*) = 0$$

ここで, $\rho = [C, D[p, \Lambda]]$.

なる完全列を得る. あとは $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C)$ について調べるのであるが, そのために次のような概念を導入する.

Λ-加群 X, Y に対して,

$$P(X,Y) = \{ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) \mid f \text{ factors through projective.} \},$$

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X,Y) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y)/P(X,Y).$$

と定める. 上の完全列に戻って, ρ の *image* は $D\mathrm{Hom}_\Lambda(C,C)$ によって与えられるのであるが, 実際

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C) \cong D\,\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(C,C), \quad \underline{\mathrm{End}}_\Lambda(C)\text{-加群として.}$$

となっていて, $\underline{\mathrm{End}}_\Lambda(C)$ は局所環であったから *unique maximal submodule* を持ち, 従って, $D\,\underline{\mathrm{End}}_\Lambda(C) = D\,\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(C,C)$ は *unique minimal submodule* (*i.e. simple socle*) を持つ入射的な *lattice* である. そこで, $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C)$ の *socle* の零でない元が C を右側の項に持つ A-R 列を与えることを示せばよい. 今, そのような完全列

$$0 \neq \mathbb{E}:\ 0 \to D\mathrm{Tr}\,C \to E \xrightarrow{\psi} C \to 0 \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C)$$

を取り, $f : {}_\Lambda X \longrightarrow {}_\Lambda C$ を *splittable epi* でない Λ-準同型とするとき, *pullback* を取って

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\mathbb{E}': & 0 \longrightarrow & D\mathrm{Tr}\,C & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow f & & \\
\mathbb{E}: & 0 \longrightarrow & D\mathrm{Tr}\,C & \longrightarrow & E & \xrightarrow[\varphi]{} & C & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

とする．　ここで，

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}xt^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C) & \cong & D\underline{Hom}_\Lambda(C, C) \\
{\scriptstyle \mathcal{E}xt^1_\Lambda(f, D\mathrm{Tr}C)}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle D\underline{Hom}_\Lambda(C,f)} \\
\mathcal{E}xt^1_\Lambda(X, D\mathrm{Tr}\,C) & \cong & D\underline{Hom}_\Lambda(C, X)
\end{array}
$$

において，fは *splittable epi* でないので，$D\underline{Hom}_\Lambda(C,f)$は *mono* でなく，従って $\mathcal{E}xt^1_\Lambda(f, D\mathrm{Tr}\,C)$ は *mono* でない．よって，$\mathcal{E}xt^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C)$の *socle* は写像 $\mathcal{E}xt^1_\Lambda(f, D\mathrm{Tr}\,C)$で$0$に移り，i.e. $\mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}' = 0$ で $\mathbb{E}'$は *split exact*，これから $\exists\Lambda$-準同型 $h: {}_\Lambda X \to {}_\Lambda E$ s.t. $f = \varphi h$．　以上から，$\mathbb{E}$が A-R 列であることがわかる．　更に，*Auslander-Reiten translation* τは　$\tau = D\mathrm{Tr}$ であることもわかった．

最後にこの§を終えるにあたって，A-R列を用いた興味ある結果を２つ紹介しておく．

<u>(SCHMIDT, [18])</u>　*R-order* Λを ${}_\Lambda\Lambda$ が直既約加群であるような *Gorenstein order* (i.e. ${}_\Lambda\Lambda$ が $\mathcal{L}(\Lambda)$で入射的）とし，Λの *radical* $Rad(\Lambda)$ が分解していると仮定する．　このとき，次のいずれかが起る：

(i) R-torsionfree で有限生成でないΛ-加群で，直和因子にΛ-lattice を持たないものを構成できる，

又は，

(ii) $\mathrm{Rad}(\Lambda)$ の直既約因子が全ての非同型な非射影Λ-lattice で直既約なものを与える．

(i)におけるようなΛ-加群を構成するには，

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

なるΛ-lattice の A-R 列で，B が非射影的なものから始め，次にBの各直既約因子に対して，それを右側の項に持つ A-R 列を取る，というように次々に A-R 列を作って行って，それらに現われる lattices の極限を取ってなされる．

<u>(BUTLER, [8])</u> Λを有限表現型の R-order (i.e. 非同型なΛ-lattice は有限個) とすると，Λ-lattices の A-R 列はΛの Grothendieck 群の relations を生成する．

この結果は，Λが artin 多元環についても成立することが [8] で示されているが，この逆，即ち A-R 列が relations を生成すれば，Λは有限表現型であることが AUSLANDER によって得られている．

§3. AUSLANDER-REITEN QUIVERS

Λ-lattices の A-R 列：

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

において，Λ-lattices A, C は直既約であるが，B は必ずしも直既約とは限らないので，B を $B = \coprod_{i=1}^{t} B_i$ と直既約な lattices $B_1, \cdots, B_t$ に分解し，それに応じて現われる projection, injection を用いて φ, ψ から導かれる写像

$$\varphi_i : A \longrightarrow B_i\ , \quad \psi_i : B_i \longrightarrow C \quad (1 \leqq i \leqq t)$$

を考えると，これらは大へん興味深い性質を持っていることがわかる．このような写像を特徴付けるために次のような概念を導入する．

<u>定義</u>　$X, Y \in \mathcal{L}(\Lambda)$ と $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)$ について，次の条件が充たされるとき，φ を <u>irreducible map</u> と云う：

(i) φ は split mono でも split epi でもない，

(ii) φ の分解：
$$\begin{tikzcd} {}_\Lambda X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & {}_\Lambda Y \\ & {}_\Lambda Z \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$
があると，α が splittable mono であるか，β が splittable epi となる．

定義から明らかに，irreducible map は mono 又は epi である．

さて，再びA-R列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi=(\varphi_i)} B=\coprod_{i=1}^{t} B_i \xrightarrow{\psi=(\psi_i)} C \longrightarrow 0$$

へ戻ると，各 φ_i 及び ψ_i $(1 \leq i \leq t)$ は *irreducible map* であり，逆に，任意の *irreducible map* $f: {}_\Lambda A \longrightarrow {}_\Lambda X$ (${}_\Lambda X$ は直既約) 及び $g: {}_\Lambda Y \longrightarrow {}_\Lambda C$ (${}_\Lambda Y$ は直既約) に対して，

$$\exists\, i, j : X \cong B_i \;,\; Y \cong B_j$$

となり，f (*resp.* g) は本質的には φ_i (*resp.* ψ_j) と同じものである.

この *irreducible map* の概念を用いて *Auslander-Reiten quiver* の定義が次のようになされる.

<u>定義</u> 直既約な Λ-*lattices* X, Y に対して，

$$\mathrm{Rad}_\Lambda(X,Y) = \{ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) \mid f \text{ は非同型} \},$$

$$\mathrm{Rad}^2_\Lambda(X,Y) = \{ \sum f_i g_i \mid f_i \in \mathrm{Rad}_\Lambda(X, Z_i),\ g_i \in \mathrm{Rad}_\Lambda(Z_i', Y) \},$$

$$\mathrm{Irr}_\Lambda(X,Y) = \mathrm{Rad}_\Lambda(X,Y)/\mathrm{Rad}_\Lambda^2(X,Y)$$

とおくと，$\mathrm{Irr}_\Lambda(X,Y)$ は $\mathrm{End}_\Lambda(X)$-$\mathrm{End}_\Lambda(Y)$ *bimodule* で，両方の側から見て有限の組成列を持つので，

$$a_{X,Y} = \mathrm{End}_\Lambda(X)\text{-加群としての } \mathrm{Irr}_\Lambda(X,Y) \text{ の組成列の長さ},$$

$$a'_{X,Y} = \mathrm{End}_\Lambda(Y)\text{-加群としての } \mathrm{Irr}_\Lambda(X,Y) \text{ の組成列の長さ}$$

と定める. *R-order* Λ の <u>*Auslander-Reiten quiver*</u> $\mathfrak{A}(\Lambda)$ とは，

vertex として，直既約 Λ-*lattice* の同型類 $[X]$，

$$\exists \text{ arrow } [X] \xrightarrow{(a_{XY},\, a'_{XY})} [Y] \text{ iff } \mathrm{Irr}_\Lambda(X, Y) \neq 0$$

によって定められた有向グラフである.

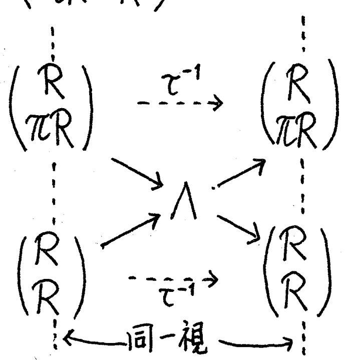
Auslander-Reiten quiverを調べることにより，直既約なlatticeについてだけでなく，irreducible mapを通じて直既約なlatticeの間の相互関係なども知ることが出来る．例えば，有限表現型のR-order Λ上の直既約latticesの間の零でない準同型写像はirreducible mapsの合成の和という形に表わされる.

orderが有限表現型になる場合に次のような判定法が得られている.

<u>(WIEDEMANN, [20])</u> R-order ΛのA-R quiver $\mathfrak{A}(\Lambda)$に，有限個の点から成る連結成分$\mathscr{C}$が存在したら，Λは有限表現型であって，$\mathscr{C} = \mathfrak{A}(\Lambda)$となる.

EXAMPLES

(1) $\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ \pi R & R \end{pmatrix}$ とすると，$\mathfrak{A}(\Lambda)$の中に



なる連結成分があるので，これが $\mathfrak{A}(\Lambda)$ 全体であって，
$\begin{pmatrix} R \\ \pi R \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}$，$\Lambda$ が全ての非同型な直既約 Λ-*lattices* を与える．

(2)　G = 素数位数 p の巡回群，
　　R = 完備な p-進整数環，
　　$\Lambda = R[G]$，群環，
　　$\mathfrak{a}$ = *augmentation ideal of* Λ

とすると，$0 \to \mathfrak{a} \to \Lambda \to R \to 0$ が A-R 列なので，$\mathfrak{A}(\Lambda)$ の中に

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a} \arrow[rr, dashed, "\tau^{-1}"] \arrow[dr] & & R \\
& \Lambda \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
R \arrow[ur] \arrow[rr, dashed, "\tau^{-1}"'] & & \mathfrak{a}
\end{tikzcd}$$

Möbius strip

なる連結成分があるので，これが $\mathfrak{A}(\Lambda)$ 全体となる．

order の *Auslander-Reiten quiver* が *artin* 多元環のそれと決定的に異なる点は，*order* の場合に $\bullet\!\circlearrowright$ という形の *loop* が存在することである，即ち $X \xrightarrow{\varphi} X$ なる *irreducible map* が存在することがある．このようなことが起る *order* は次の結果によって特徴付けられている．

<u>(WIEDEMANN，[20])</u>　Λ を両側直既約な R-*order* とするとき，

$$\exists X \in \mathcal{L}(\Lambda)\ \exists \textit{irreducible map}\ \varphi : X \to X$$

$\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{A}(\Lambda)$ は 次の形：

$$\underset{1}{\circ} \rightleftarrows \underset{2}{\circ} \rightleftarrows \underset{3}{\circ} \quad \cdots\cdots \quad \underset{t}{\circ} \rightleftarrows \underset{t-1}{\circ} \circlearrowleft$$

このとき，$R/\pi R$ が有限体なら，Λ は Bass order に森田同値.

一般に，order Λ に対してその Auslander-Reiten quiver 全体を完全に決定出来る場合はそう多くなく，実際には射影的 Λ-lattice や 入射的 Λ-lattice に対応する $\mathfrak{A}(\Lambda)$ における点の位置などは容易には判定出来ないことがある．そこで，このような lattice を除外した $\mathfrak{A}(\Lambda)$ のある部分のみを取り上げるという行き方が以下に述べる結果につながった．

<u>定義</u> 直既約 Λ-lattice X と $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\tau^{n}(X) \overset{\text{def}}{=} \tau(\tau^{n-1}X), \quad \tau^{-n}(X) \overset{\text{def}}{=} \tau^{-1}(\tau^{-(n-1)}X)$$

と定められるとき，X は <u>stable</u> であると云われる，i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，$\tau^{n-1}X$ (resp. $\tau^{-(n-1)}X$) を右側 (resp. 左側) の項に持つ Λ-lattices の A-R 列が存在するとき.

そして，$\mathfrak{A}(\Lambda)$ の中で stable lattice に対応する点のみから成る $\mathfrak{A}(\Lambda)$ の full subquiver を Λ の <u>stable Auslander-Reiten quiver</u> と云い，$\mathfrak{A}_s(\Lambda)$ で表わす.

これを用いると，有限表現型の Gorenstein order の分類が次のようになされる.

(RIEDTMANN, [10])　Gorenstein order が有限表現型である必要十分条件は，$\mathfrak{A}_s(\Lambda)$ が次の形をしていることである:

(i) L_t : $\underset{1}{\circ} \rightleftarrows \underset{2}{\circ} \rightleftarrows \underset{3}{\circ} \cdots\cdots \underset{t-1}{\circ} \rightleftarrows \underset{t}{\circ} \circlearrowleft$

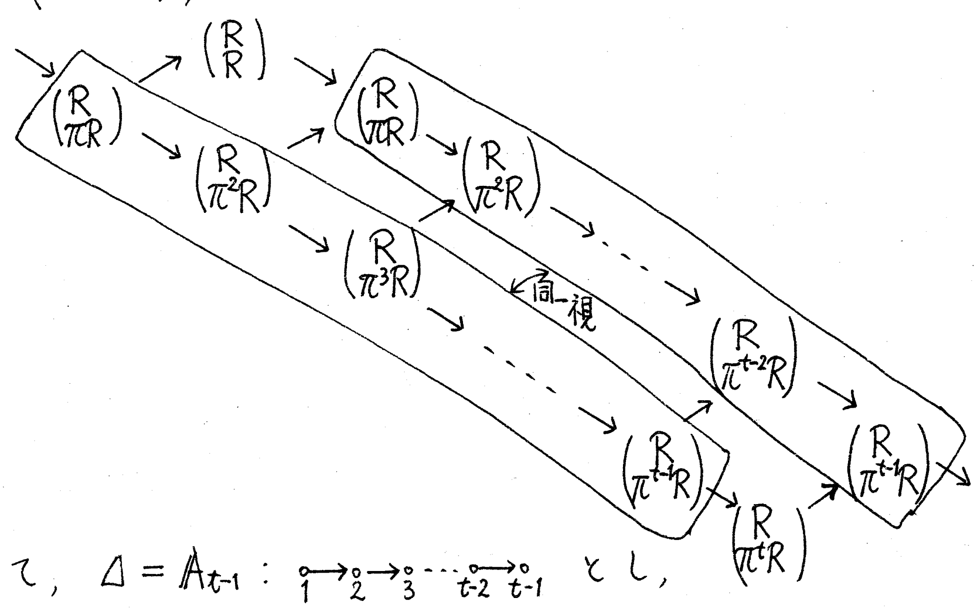
又は，

(ii) Dynkin graph Δ と $\mathbb{Z}\Delta$ の自己同型群 G によって，$\mathbb{Z}\Delta/G$ と表わされる，

ここで，$\mathbb{Z}\Delta$ は vertex が (n, x)，$n \in \mathbb{Z}$，x は Δ の点であって，$x \to y$ in Δ のとき，$(n, x) \to (n, y)$ 及び $(n, y) \to (n+1, x)$ なる arrows が定められた quiver.

EXAMPLE

$\Lambda = \begin{pmatrix} R & R \\ \pi^t R & R \end{pmatrix}$ とすると，$\mathfrak{A}(\Lambda)$ は



となっていて，$\Delta = A_{t-1}$: $\underset{1}{\circ} \to \underset{2}{\circ} \to \underset{3}{\circ} \cdots \underset{t-2}{\circ} \to \underset{t-1}{\circ}$ とし，

$\sigma(n, x) \overset{\text{def}}{=} (n+1, x)$ と定めれば，$\mathfrak{A}_s(\Lambda) \cong \mathbb{Z}A_{t-1}/\langle\sigma\rangle$ である.

REFERENCES

1. Auslander, M. & I. Reiten: Representation theory of artin algebras III. Almost split sequences, Comm. Alg. 3(1975), 239-294.
2. Auslander, M.: Functors and morphisms determined by objects, Proc. of the Philadelphia Conf. on Rep. Thy. of Alg., Marcel Dekker, 1976, 1-244.
3. Auslander, M.: Applications of morphisms determined by modules, ibid.
4. Auslander, M.: Existence theorems for almost split sequences, Proc. of the Conf. on Ring Thy. II, Oklahoma, Marcel Dekker, 1977, 1-44.
5. Auslander, M. & K.W. Roggenkamp: A characterization of orders of finite lattice type, Invent. math. 17(1972), 79-84.
6. Auslander, M. & S.O. Smalø: Preprojective lattices over orders, Lect. Notes Math. 882(1981), 326-344, Springer.
7. Butler, M.C.R.: The construction of almost split sequences II, lattices over orders, Bull. LMS 11(1979), 155-160.
8. Butler, M.C.R.: Grothendieck groups and almost split sequences, Lect. Notes Math. 882(1981), 357-368, Springer.
9. Dieterich, E.: Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings, Math. Z. 183(1983), 43-60.
10. Riedtmann, C.: Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück, Comment. Math. Helvetici 55(1980), 199-224.
11. Roggenkamp, K.W.: The lattice type of orders: A diagrammatic

approach I, Lect. Notes Math. 825(1980), 104-129, Springer.

12. Roggenkamp, K.W.: Representation theory of blocks of defect 1 Lecture Notes Math. 832(1980), 521-544, Springer.

13. Roggenkamp, K.W.: The lattice type of orders II: Auslander-Reiten quivers, Lect. Notes Math. 882(1981), 430-477, Springer.

14. Roggenkamp, K.W.: Auslander-Reiten species of Bäckström orders, J. Alg. 85(1983), 449-476.

15. Roggenkamp, K.W.: Auslander-Reiten quivers for some artinian torsion theories and integral representations, Proc. of Methods in Ring Thy, NATO ASI series, Reidel, 1984.

16. Roggenkamp, K.W. & J. Schmidt: Almost split sequences for integral group rings and orders, Comm. Alg. 4(1976), 893-917.

17. Roggenkamp, K.W.& A Wiedemann: Auslander-Reiten quivers of Schurian orders, Comm. Alg. 12(1984), 2525-2578.

18. Schmidt, J.W.: A construction of large lattices by almost split sequences, Archiv der Math. 19(1977), 481-484.

19. Webb, P.J.: The Auslander-Reiten quivers of a finite group, Math. Z. 179(1982), 97-121.

20. Wiedemann, A.: Orders with loops in their Auslander-Reiten graphs, Comm. Alg. 9(1981), 641-656.

21. Wiedemann, A.: The Auslander-Reiten graph of blocks with cyclic defect two, Lect. Notes Math. 882(1981), 397-410, Springer.

22. Auslander, M.: Isolated singularities and existence of almost split sequences, Notes of the lectures at the University of Bielefeld, 1984.