数理解析研究所講究録
第 549 巻 1985 年 73-94

有限群の SK_1 について

信州大教養部　大林忠夫 (Tadao Obayashi)

序. 有限可換群 π の特殊 K_1-群 $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ は, 合同部分群問題の解決 (Bass-Milnor-Serre [3]) の成果に基づいて, Dennis, Stein 等により詳しく調べられている (Stein の総合報告 [16] を参照)。また最近, surgery 理論に関連しての Wall による $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ の研究や, Rehman-Stuhler, Bak 等による非可換環の K_2-群の研究を背景にして, Oliver は非可換有限群に対する $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ の研究を大きく前進させた。

この講演では, "SK_1 on finite group rings" と題された Oliver の一連の論文 (引用文献参照) の概要を紹介する。

§1. 代数的 K-理論からの準備.

環 A 上の一般線形群を $GL_n(A)$, 基本行列 $e_{ij}(a)$ 全体で生成された部分群を $E_n(A)$ とし, $GL(A) = \varinjlim GL_n(A)$, $E(A) = \varinjlim E_n(A)$ とおくと, 交換子群に対し, $E(A) = [E(A), E(A)] = [GL(A), GL(A)]$ となる。

A 上の K_i-群 $(i=1,2)$ は次によって定義される。

$$K_1(A) = H_1(GL(A)) \quad (\cong GL(A)/E(A))$$

$$K_2(A) = H_2(E(A))$$

K_i は環の圏から，可換群の圏への covariant な関手をなす。

可換環 A に対しては，通常の行列式から定義される写像 $\det ; K_1(A) \to A^*$（A の単数群）は split する。

$$K_1(A) \cong A^* \oplus SK_1(A) \qquad (SK_1(A) = \ker(\det)).$$

特に（可換）体 F に対し，$K_1(F) \cong F^*$. また，可換半局所環や代数体の整数環 A に対しても，$K_1(A) \cong A^*$ であることが知れている（[3], Bass [2]）.

$B = M_n(D)$ が体 F 上の中心的単純多元環ならば，Dieudonné determinant によって，$K_1(B) \cong B^*/[B^*, B^*] \cong D^*/[D^*, D^*]$ となる。また，被約ノルムによって，写像 $nrd_B ; K_1(B) \to F^*$ が定義される。これは，B が半単純多元環の場合にも拡張される。

F を Dedekind 整域 R の商体とし，B を F 上の半単純多元環とする。B の R-order A に対して

$$SK_1(A) = \ker[nrd_A : K_1(A) \to K_1(B) \xrightarrow{nrd_B} Z(B)^*] \qquad (Z(B) = B \text{ の中心})$$

と定義する。R が代数体または p 進体の整数環ならば，nrd_B は injective だから $SK_1(A) = \ker[K_1(A) \to K_1(B)]$ で，このとき，$SK_1(A)$ は有限群である（[2], Wall [17]）.

Dedekind 整域 R の標数が 0 のとき，有限群 π の R 上の群環 $R\pi$ に対して，$K'(R\pi) = Im(nrd_{R\pi})$ とおくと，完全列の injection

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & SK_1(R) & \longrightarrow & K_1(R)\oplus\pi^{ab} & \longrightarrow & R^*\oplus\pi^{ab} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma=\mathrm{nrd} & & \\
0 & \longrightarrow & SK_1(R\pi) & \longrightarrow & K_1(R\pi) & \xrightarrow{\mathrm{nrd}} & K_1'(R\pi) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が存在する。そこで, $Wh(R\pi)=\mathrm{Coker}(\beta)$, $Wh'(R\pi)=\mathrm{Coker}(\gamma)$ とおいて, 完全列 $0\to\mathrm{Coker}(\alpha)\to Wh(R\pi)\to Wh'(R\pi)\to 0$ が得られる。特にRが代数体またはp進体の整数環の場合は, $Wh'(R\pi)$ は torsion free である (Wall [18])。このときは, $SK_1(R)=0$ で, また $SK_1(R\pi)$ は有限群だから, $SK_1(R\pi)$ が $Wh(R\pi)$ の torsion part をなす。$Wh(\mathbb{Z}\pi)$ は π の Whitehead 群と呼ばれているもので, その幾何学的意義については, 松田氏の講演を参照されたい。

任意の環 A に対して, $E(A)$ は perfect 群であるから, $K_2(A)=H_2(E(A))$ は, $E(A)$の普遍中心拡大の kernel に同型である。記号 $x_{ij}(a)$ $(1\leqq i\neq j\leqq n,\ a\in A)$ を生成元, $x_{ij}(a+b)=x_{ij}(a)x_{ij}(b)$, $[x_{ij}(a),x_{kl}(b)]=1$ $(i\neq l,\ j\neq k)$, $[x_{ij}(a),x_{jl}(b)]=x_{il}(ab)$ $(i\neq l)$ を基本関係として定義される群を $St_n(A)$ とすると,

$$St(A)=\varinjlim St_n(A)\xrightarrow{\varphi}E(A)\qquad (x_{ij}(a)\mapsto e_{ij}(a))$$

は普遍中心拡大をなし, したがって $K_2(A)\cong\ker(\varphi)$ である。

$A^*\ni a$ に対し, $w_{ij}(a)=x_{ij}(a)x_{ji}(-a^{-1})x_{ij}(a)$, $h_{ij}(a)=w_{ij}(a)w_{ij}(-1)$ とおき, $A^*\times A^*\ni(a,b)$ に対し

$$c^A(a,b)=h_{12}(a)h_{12}(b)h_{12}(ba)^{-1}$$

と定めると, $\varphi(c^A(a,b))=\begin{pmatrix} aba^{-1}b^{-1} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}$ である。よって,

$ab=ba$ ならば, $c^A(a,b)\in K_2(A)$ となる。

一般に, 可換群 $\mathcal{S}$ に値をとる体 F 上の双乗法的写像 $c: F^*\times F^*\longrightarrow \mathcal{S}$ がさらに $c(a,1-a)=1$ $(a,\ 1-a\in A^*)$ を満たすとき, F 上の symbol と呼ばれる。$c^F: F^*\times F^*\longrightarrow K_2(F)$ は F 上の普遍 symbol である (Matumoto [8]).

B が体 F 上の中心的単純多元環ならば, $c^B; F^*\times B^*\longrightarrow K_2(B)$ から, 写像 $\bar{c}^B; F^*\times B^*/[B^*,B^*]\longrightarrow K_2(B)$ が得られる。

右図で, nrd_B が bijective になる場合は, 写像 $\bar{c}^B\circ nrd_B^{-1}; F^*\times F^*\to K_2(B)$ は F 上の symbol であり, よって

$$\begin{tikzcd}
F^*\times B^*/[B^*,B^*] \arrow[r, "\bar{c}^B"] \arrow[d, equal] & K_2(B) \\
F^*\times K_1(B) \arrow[d, "nrd_B"] & \\
F^*\times F^* \arrow[r, "c^F"] & K_2(F) \arrow[uu, dashed, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

図を可換にする準同型 $\psi: K_2(F)\longrightarrow K_2(B)$ が一意的に定まる。

特に, B が p 進体 $\mathbb{Q}_p$ 上の単純多元環ならば, nrd_B は bijective で, ψ が定まるが, このとき ψ は surjective になる (Rehman-Stuler [14], Bak).

環 A の ideal $\mathfrak{a}$ に対して, $GL_n(A,\mathfrak{a}) = \ker[GL_n(A)\to GL_n(A/\mathfrak{a})]$, 基本行列 $E_{ij}(a)$ $(a\in\mathfrak{a})$ 全体で生成された $E_n(A)$ の正規部分群を $E_n(A,\mathfrak{a})$ とし, $GL(A,\mathfrak{a}) = \varinjlim GL_n(A,\mathfrak{a})$, $E(A,\mathfrak{a}) = \varinjlim E_n(A,\mathfrak{a})$ とおくと, $E(A,\mathfrak{a}) = [GL(A), GL(A,\mathfrak{a})]$ が成り立つ。よって, 可換群 $K_1(A,\mathfrak{a}) = GL(A,\mathfrak{a})/E(A,\mathfrak{a})$ が定義される。$SK_1(A)$ が考えられる場合は, $SK_1(A) = SL(A)/E(A)$ なる $GL(A)$ の正規部分群 $SL(A)$ に対して $SL(A,\mathfrak{a}) = SL(A)\cap GL(A,\mathfrak{a})$ とおいて,

可換群 $SK_1(A,\mathfrak{a}) = SL(A,\mathfrak{a})/E(A,\mathfrak{a})$ を定義する。このとき，次の完全列が得られる。

$$K_2(A) \to K_2(A/\mathfrak{a}) \to SK_1(A,\mathfrak{a}) \to SK_1(A) \to SK_1(A/\mathfrak{a})$$

特に A が代数体の整数環の場合は，$SK_1(A,\mathfrak{a})$ の構造は完全に決定されている（[3]）。

右を環の pullback 図とする。f_2 または g_2 が surjective のとき，環の cartesian square と呼ぶことにする。

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & B \\ \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} \\ C & \xrightarrow{f_2} & D \end{array}$$

また，右が位相環の pullback 図で，f_i が open，g_i が open かつ dense であるとき，環の approximation square という。環の cartesian square または approximation square から，次の Mayer-Vietoris の完全列が得られる（詳しくは，Bak [1] 参照）。

$$K_2(A) \to K_2(B)\oplus K_2(C) \to K_2(D) \xrightarrow{\partial} K_1(A) \to K_1(B)\oplus K_1(C) \to K_1(D)$$

§2. Cl_1-群とその構造

$\mathbb{Q}$ を有理数体，$\hat{\mathbb{Q}}_p$ を p 進体とする。以下では，$\mathbb{Q}$，$\hat{\mathbb{Q}}_p$ の有限次拡大体を各々 n 体，p 体といい，その整数環を n 環，p 環と呼ぶことにする。R が $\mathbb{Q}$ の部分環のとき，$\mathbb{Q}$ 上の半単純多元環 B とその R-order A に対し，$\hat{A}_p = A\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}}_p$，$\hat{B}_p = B\otimes_{\mathbb{Q}}\hat{\mathbb{Q}}_p$ とおく。approximation square

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_p \hat{A}_p & \longrightarrow & \prod_p (\hat{B}_p, \hat{A}_p) \end{array} \text{（制限直積）}, \qquad \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A[\frac{1}{p}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}_p & \longrightarrow & \hat{B}_p \end{array}$$

に、各々 Mayer-Vietoris を適用して，次の完全列を得る。

補題 1.

(1) $K_2(B) \to \sum_p \mathrm{Coker}[K_2(\hat{A}_p) \to K_2(\hat{B}_p)] \xrightarrow{\partial} SK_1(A) \longrightarrow \sum_p SK_1(\hat{A}_p) \longrightarrow 0$

(2) $K_2(A[\frac{1}{p}]) \oplus K_2(\hat{A}_p) \to K_2(\hat{B}_p) \xrightarrow{\partial_p} SK_1(A) \longrightarrow SK_1(A[\frac{1}{p}]) \oplus SK_1(\hat{A}_p) \longrightarrow 0$

そこで，（A の類群 $Cl(A)$ に倣って）次のように定義する。

$$Cl_1(A) = \mathrm{Im}(\partial) = \ker[SK_1(A) \to \sum_p SK_1(\hat{A}_p)]$$

$SK_1(A)$ は $Cl_1(A)$ と局所的な場合の SK_1 の研究に帰着される。後者に関しては，群環の場合次のことが知られている。

定理 2（Wall [17]）. p 環 R と有限群 π に対して

(1) $SK_1(R\pi)$ は（有限）p 群である。

(2) π の Sylow-p 部分群 π_p が可換ならば，$SK_1(R\pi) = 0$. 特に π が可換群ならば，任意の n 環 R に対して，$SK_1(\hat{R}_p\pi) = 0$ $(\forall p)$ となり，$Cl_1(R\pi) = SK_1(R\pi)$ が成り立つ。

Cl_1 の研究は，K_2-群の研究に帰着される。

補題 3. (1) $\varphi ; B \to B'$ が $\mathbb{Q}$ 上の半単純多元環の surjection ならば，$\varphi(A) \subseteq A'$ なる B, B' の R-order A, A' に対し，$\varphi_* ; Cl_1(A) \to Cl_1(A')$ は surjective である。

(2) $A \subseteq A'$ を B の R-order, $\mathfrak{a}$ を A に含まれる A' の最大の ideal とする。$p \nmid \mathfrak{a}$ ならば，p 成分について

$Cl_1(A)_{(p)} \cong Cl_1(A')_{(p)}$ が成り立つ。

(証明) (1) 任意の p に対して、$K_2(\hat{B}_p) \to K_2(\hat{B}'_p)$ が surjective だから、補題1の(1)より明らか。(2) (1)より $Cl_1(A)_{(p)} \to Cl_1(A')_{(p)}$ は surjective. $p \nmid \mathfrak{a}$ より、$A/\mathfrak{a}$ は位数が p と素な有限環だから $K_2(A/\mathfrak{a})$ の位数も p と素である。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ A/\mathfrak{a} \arrow[r] & A'/\mathfrak{a} \end{tikzcd}$$

よって、右の Cartesian square に Mayer-Vietoris を適用して、$Cl_1(A)_{(p)} \to Cl_1(A')_{(p)}$ の injectivity がいえる。

Cl_1 の p 成分については、一般に次が成り立つ。

<u>補題4</u>

(1) $\mathbb{Q}$ 上の半単純多元環 B の R-order A に対して、$A[\frac{1}{p}]$ の各単純成分への像が hereditary ならば

$$K_2(A[\tfrac{1}{p}])_{(p)} \oplus K_2(\hat{A}_p)_{(p)} \to K_2(\hat{B}_p)_{(p)} \xrightarrow{\partial_p} Cl_1(A)_{(p)} \to 0 \qquad (\text{完全})$$

(2) 特に、有限群 π の R 環上の群環 $R\pi$ に対しては

$$K_2(R[\tfrac{1}{p}]\pi)_{(p)} \oplus K_2(\hat{R}_p\pi)_{(p)} \to K_2(\hat{F}_p\pi)_{(p)} \xrightarrow{\partial_p} Cl_1(R\pi)_{(p)} \to 0 \qquad (\text{完全})$$

(証明) maximal order に対しては $Cl_1 = 0$ となる (Keating [6]) ことから、hereditary order に対しても $Cl_1 = 0$ が導かれるので、$Cl_1(A[\frac{1}{p}])_{(p)} = 0$ である。よって、補題1,(2)より、(1)を得る。

(2)についても、$Cl_1(R[\frac{1}{p}]\pi)_{(p)} = 0$ をいえばよい。一般に、$K_1(R\pi)_{(p)}$, $Wh(R\pi)_{(p)}$, $SK_1(R\pi)_{(p)}$, したがって $Cl_1(R\pi)_{(p)}$ に対して、Witt の誘導定理が成り立つ。よって、π は p-F-elementary としてよい。このとき、$R[\frac{1}{p}]\pi$ の各単純成分

への像は hereditary となり，(1) から (2) が示される。

π は任意の有限群で，B は $\mathbb{Q}\pi$ の単純成分とする。また，R を B の中心 F の整数環とする。任意の素数 p に対して，$\hat{\psi}: K_2(\hat{F}_p) \to K_2(\hat{B}_p)$ が定義され，それは surjective である（§1）。もしも π が Eichler 条件を満たす（$\mathbb{R}\pi$ の単純成分の division に 4 元数体が現われない）ならば，nrd_B は bijective。よって $\psi: K_2(F) \to K_2(B)$ が定義され，次の可換図を得る。

$$\begin{array}{ccccc} K_2(R) & \xrightarrow{\alpha} & K_2(F) & \xrightarrow{\psi} & K_2(B) \\ \downarrow \beta & & \downarrow & & \downarrow \\ K_2(\hat{R}_p) & \xrightarrow{\gamma} & K_2^*(\hat{F}_p)_{(p)} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)} \end{array}$$

（ただし，$K_2^*(\ ) = K_2(\ )/(\text{divisible})$）. Dennis-Stein（[4]）より，$\gamma$ は surjective で，かつ十分大きな n に対して，$K_2(\hat{R}_p) \cong K_2(R/p^n)$. よって，$\mathrm{Coker}(\beta) \cong SK_1(R, p^n R)$．ここでさらに，$F$ が not totally imaginary ならば，$SK_1(R, p^n R) = 0$（[3]）より，β も surjective になる。すなわち，任意の p に対して，$K_2(R) \xrightarrow{\psi\circ\alpha} K_2(B) \to K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)}$ は surjective である。よって，写像

$$\mathrm{Ker}[\, K_2(B) \to \sum_{q \neq p} K_2^*(\hat{B}_q)_{(q)}\,] \longrightarrow K_2^*(\hat{B}_p)_{(p)}$$

は surjective となり，補題 1, (1) と補題 4, (2) の完全列より，$Cl_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)} = 0$ $(\forall p)$，したがって，$Cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ となる。特に次の場合は，上の諸条件が満たされる。

<u>定理 5</u>　π の絶対既約表現がすべて実数体 $\mathbb{R}$ で実現されるならば，$Cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$．

特に、対称群 S_n, dihedral 2-群 $D(2^n)$ に対して

$$Cl_1(\mathbb{Z}S_n) = Cl_1(\mathbb{Z}D(2^n)) = 0.$$

Cl_1 に対して，Witt の誘導定理より強い，Brauer の誘導定理が成り立つ。R を $\mathfrak{n}$ 環，F をその商体とする。有限群 π の p-elementary な部分群全体の類を $\mathcal{E}_p$ とすると

<u>定理 6.</u> (1) $Cl_1(R\pi)_{(p)} = \sum_{\pi' \in \mathcal{E}_p} \mathrm{Im}[Cl_1(R\pi')_{(p)} \to Cl_1(R\pi)_{(p)}]$

(2) p-elementary な群 $\mathbb{Z}_n \times \pi$ (π: p群，$p \nmid n$) に対して，

$F\mathbb{Z}_n = \sum F_i$，$R_i = F_i$ の整数環とすると

$$Cl_1(R[\mathbb{Z}_n \times \pi])_{(p)} \cong \sum Cl_1(R_i\pi)_{(p)}$$

(証明) (2) は補題3の(2)．(1) は Witt の誘導定理と補題4の完全列より，p群 π が K/F の Galois automorphism として作用しているときの，$K_2(\widehat{R}_p[\rho]) \longrightarrow K_2(\widehat{R}_p[\pi]^t)$ (ただし，ρ は π の作用の kernel で，$\widehat{R}_p[\pi]^t$ は twisted な群環) の surjectivity に帰着される。ここで inclusion $\widehat{R}_p[\rho] \hookrightarrow \widehat{R}_p[\pi]^t$ が，同一の極大部分体 E を有する単純環 $A \subseteq B$ による対角写像 $A^r \to M_r(B)$ の形の和で表されること，かつ $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ 上の単純多元環 A の極大部分体 E に対して，$K_2(E) \to K_2(A)$ が surjective になることから，$K_2(\widehat{R}_p[\rho]) \to K_2(\widehat{R}_p[\pi]^t)$ の surjectivity が示される。

π の Sylow p群 π_p が可換ならば，$SK_1(\widehat{\mathbb{Z}}_p\pi) = 0$ (定理2) より $SK_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)} = Cl_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)}$．また，$p$ が不分岐な $\mathfrak{n}$ 環 R に対して，

$SK_1(R\mathbb{Z}_{p^n}) = SK_1(R[\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^n}]) = 0$ となることが分っている([2])ので、上定理より可換群の場合の Bass の結果([2]) が非可換群に拡張される。

系. $\pi_p \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ または $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^n}$ ならば, $SK_1(\mathbb{Z}\pi)_{(p)} = 0$. 特に metacyclic 群 π に対して, $SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ である。

上誘導定理により, p 群 π と n 環 R (p は不分岐) に対する $Cl_1(R\pi)$ が問題となる。まず Milnor ([9]) による transfer 写像 $tr: K_1(R\pi) \to K_1(\mathbb{Z}\pi)$ から得られる $tr: Cl_1(R\pi) \to Cl_1(\mathbb{Z}\pi)$ は surjective であることが示される。また, $Cl_1(\mathbb{Z}\pi) \to Cl_1(\mathbb{Z}\pi^{ab})$ も surjective (補題3) だから, $Cl_1(R\pi)$ の研究に可換 p 群 π の $SK_1(\mathbb{Z}\pi)$ に関する諸結果([16]) が利用できる。

<u>定理7.</u> R が totally imaginary (2は不分岐) なら, 2群 π に対して

$$Cl_1(R\pi) = 0 \iff \pi \cong \mathbb{Z}_{2^n} \text{ または } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^n}$$

(証明) $Cl_1(R\pi) = 0$ とすると, 上の注意より $Cl_1(\mathbb{Z}\pi^{ab}) = SK_1(\mathbb{Z}\pi^{ab}) = 0$ したがって, π または $\pi^{ab} \cong \mathbb{Z}_{2^n}, (\mathbb{Z}_2)^k, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2^n}$ ([16]). 定理の結果を得るには, 補題3 を用いて, $\pi \cong Q(8), D(8), (\mathbb{Z}_2)^3$ のとき, $Cl_1(R\pi) \neq 0$ を示すことに帰着されるが, これは K_2-群に関するやや複雑な計算によって確かめられる。

$R\,(\neq \mathbb{Z})$ が not totally imaginary の場合に, $Cl_1(R\pi) = 0$ なる p 群 π を決定することは難かしいようである。ただし, dihedral 群 $D(2^n)$, quaternionic 群 $Q(2^n)$, semidihedral 群 $S(2^n)$ に対しては,

$SK_1(R, 2^n R)$ の構造に関する Bass-Milnor-Serre の結果（[3]）と定理7より，次が成り立つ。

定理8. R: n 環（2は不分岐），$\pi \cong D(2^n), Q(2^n), S(2^n)$ のとき，

$$cl_1(R\pi) = 0 \quad (R: \text{not totally imaginary})$$

$$cl_1(R\pi) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (R: \text{totally imaginary})$$

$R = \mathbb{Z}$ の場合は，非可換 p 群に対して次が示される。

定理9. (1) $cl_1(\mathbb{Z}\pi) \neq 0 \quad (p: \text{odd})$

(2) $cl_1(\mathbb{Z}\pi) = 0 \Rightarrow \pi^{ab} \cong (\mathbb{Z}_2)^k \quad (p = 2)$

ここで，(2)の逆は一般には成り立たない。実際，$\pi^{ab} \cong (\mathbb{Z}_2)^3$ となる非可換2群 π で，$cl_1(\mathbb{Z}\pi) \neq 0$ となる例が得られる。

§3. SK_1 の局所的構造.

以下では，π は p 群とし，R は p 環とする。R は p 進位相で完備な位相環である。群環 $R\pi$ は局所環であるから，$R\pi^* = GL_1(R\pi) \xrightarrow{j} K_1(R\pi)$ は surjective である（[2]）。特に，$I = I(R\pi) = \ker[R\pi \to R]$ を augmentation ideal とすると，$1 + I \leq R\pi^*$ であり，$Wh(R\pi)$ は $j(1+I)$ で生成され，また，$K_1(R\pi, pI)$ は $j(1+pI)$ で生成される。

$$\bar{I} = I / \langle x - gxg^{-1} \mid x \in I,\ g \in \pi \rangle$$

とおくと，$p\bar{I}$，$K_1(R\pi, pI)$ は $\hat{\mathbb{Z}}_p$-自由加群と見なされ，両者の階数は一致する。特に $K_1(R\pi, pI)$ は torsion free である。

pI と $1+pI$ においては，p 進指数関数，p 進対数関数

$$Exp(px) = 1 + px + \frac{p^2}{2!}x^2 + \frac{p^3}{3!}x^3 + \cdots\cdots \qquad (x \in I)$$

$$Log(1+px) = px - \frac{p^2}{2}x^2 + \frac{p^3}{3}x^3 - \cdots\cdots \qquad (x \in I)$$

が定義され，互に逆写像をなす。特に，Exp に $1+pI \xrightarrow{\eta} K_1(R\pi, pI)$ を合成して，同型

$$exp : p\bar{I} \xrightarrow{\sim} K_1(R\pi, pI)$$

が得られる（群演算が保たれることは，$pI \ni x, y$ に対して，torsion free な群 $K_1(R\pi, pI)$ においては，$(1+p^n x)^{\frac{1}{p^n}}(1+p^n y)^{\frac{1}{p^n}} \equiv (1+p^n(x+y))^{\frac{1}{p^n}} \pmod{p^n}$ が成り立つことと，$Exp(x) = \lim_{n\to\infty}(1+p^n x)^{\frac{1}{p^n}}$ であることからいえる）。

一方，十分大きな n に対して $I^{p^n} \subseteq pI$ となるから，p 進対数 $Log : 1+I \longrightarrow I\otimes\mathbb{Q}$ が定義される。したがって，そのような n を1つ定めると，$Log(1+x) = \frac{1}{p^n}Log(1+x)^{p^n}$ より次の可換図が得られる。

$$\begin{tikzcd}
Log: & 1+I \arrow[r, "p^n\text{乗}"] \arrow[d, "\eta"] & 1+pI \arrow[r, "Exp^{-1}=Log"] \arrow[d, "\eta"] & pI \arrow[r, "\frac{1}{p^n}\text{倍}"] \arrow[d] & I\otimes\mathbb{Q} \arrow[d] \\
& Wh(R\pi) \arrow[r, "p^n\text{乗}"] & K_1(R\pi, pI) \arrow[r, "exp^{-1}", "\sim"'] & p\bar{I} \arrow[r, "\frac{1}{p^n}\text{倍}"] & \bar{I}\otimes\mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

下の写像の合成から，準同型

$$log : Wh(R\pi) \longrightarrow \bar{I}\otimes\mathbb{Q}$$

が定義される。$SK_1(R\pi)$ が $Wh(R\pi)$ の torsion part であることより，$ker(log) = SK_1(R\pi)$ となる。特に，$1+I \ni 1+x$ に対して，$\eta(1+x) \in SK_1(R\pi) \Leftrightarrow Log(1+x) = 0$ in $\bar{I}\otimes\mathbb{Q}$．この

判定条件と，やや複雑な考察から次の結果が得られるが，詳細は係論文を参照されたい。

定理10. p群πに商群が巡回群となる可換正規部分群が存在すれば，任意のp環Rに対して，$SK_1(R\pi)=0$である。特に，dihedral, quaternionic, semidihedral 2群πに対して，$SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)=0$．よって，定理8から次が得られる(一般のdihedral群$D(2n)$に対して，$SK_1(\mathbb{Z}D(2n))=0$がMagurn[7]によって示されている)。

系　$SK_1(\mathbb{Z}D(2^n))=SK_1(\mathbb{Z}Q(2^n))=SK_1(\mathbb{Z}S(2^n))=0$．

ここでは，$\log : Wh(R\pi)\to \bar{I}\otimes\mathbb{Q}$を用いて，$SK_1(R\pi)$の一般的な表示を求めることについて説明しよう。不分岐なp環Rに対して，φをRのFrobenius置換：$\varphi(\lambda)\equiv\lambda^p \pmod p$，$\Phi : \bar{I}\to\bar{I}$を$\Phi(\overline{\sum\lambda_i g_i})=\sum\varphi(\lambda_i)g_i^p$と定め，$\log$を

$$\Gamma(u)=\log(u)-\frac{1}{p}\Phi(\log(u))\qquad(u\in Wh(R\pi))$$

と修正すると，$Im(\Gamma)\subseteq\bar{I}$となる。また，$R$の$\hat{\mathbb{Z}}_p$に関するtraceを用いて，写像$\omega : \bar{I}\to\pi^{ab}$を

$$\omega(\overline{\sum\lambda_i g_i})=\prod g_i^{Tr(\lambda_i)} \bmod [\pi,\pi]$$

と定めると，次の完全列が得られる。

補題11.　$0\to SK_1(R\pi)\to Wh(R\pi)\xrightarrow{\Gamma}\bar{I}\xrightarrow{\omega}\pi^{ab}\to 0$

さて，p群の拡大

$$1\to\rho\to\tilde{\pi}\xrightarrow{\alpha}\pi\to 1$$

に対して，$\mathrm{Coker}[SK_1(R\tilde{\pi})\to SK_1(R\pi)]$は次のように記述さ

れる。Rp, $R\hat{\pi}$, $R\pi$ に対する補題11の完全列のなす可換図に snake lemma を適用して，surjection

$$\Delta : \ker[p^{ab} \to \hat{\pi}^{ab}] \longrightarrow \mathrm{Coker}[SK_1(R\hat{\pi}) \to SK_1(R\pi)]$$

が得られる。$p_0 = p \cap [\hat{\pi}, \hat{\pi}]$, $p_1 = \langle z \in p \mid z は \hat{\pi} の交換子 \rangle$ とおくと，$p_0 \to \ker[p^{ab} \to \hat{\pi}^{ab}]$ に Δ を合成した写像は surjective で，p_1 がその kernel をなす。すなわち，同型

$$\kappa_\alpha : p_0/p_1 \cong \mathrm{Coker}[SK_1(R\hat{\pi}) \to SK_1(R\pi)]$$

が存在する。一方，$H_2^{ab}(\pi)$ を π の可換部分群 π' の $H_2(\pi')$ 全体で生成された $H_2(\pi)$ の部分群とすると，$H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$ は，π の拡大に対する p_0/p_1 の普遍表示を与える（Stambach [15]）から，surjection $\delta_\alpha : H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \to \mathrm{Coker}[SK_1(R\hat{\pi}) \to SK_1(R\pi)]$ が存在する。特に π の拡大で，p_0/p_1 が普遍表示をもつものが作れる（[15]）。よって，そのような拡大に対する同型

$$\delta_\alpha : H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \cong \mathrm{Coker}[SK_1(R\hat{\pi}) \to SK_1(R\pi)]$$

を通して，surjection $\theta_{R\pi} : SK_1(R\pi) \to H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$ が得られるが，これは拡大の選び方に依らないことが分る。

この $\theta_{R\pi}$ に関しては，さらに

(1) $\theta_{R\hat{\pi}}$ が同型になる surjection $\hat{\pi} \to \pi$ があれば，$\theta_{R\pi}$ も同型，

(2) $SK_1(Rp) = 0$ となる π の指数 p の正規部分群 p があれば，$\theta_{R\pi}$ は同型

となることが示される。これらの性質から，任意の p 群 π に

対して $\theta_{R\pi}$ が同型になることが、帰納法で証明できる。

定理12. 任意の p 群 π と不分岐 p 環 R に対して

$$\theta_{R\pi} : SK_1(R\pi) \cong H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$$

この定理は $SK_1(R\pi)$ の構造が、不分岐 p 環 R に無関係に決まることを示している。実際、一般に p 環の完全分岐な拡大 $R \subseteq R'$ に対しては、自然な写像 $SK_1(R\pi) \to SK_1(R'\pi)$ が同型となり、不分岐な拡大 $R \subseteq R'$ に対しては、$tr : SK_1(R'\pi) \to SK_1(R\pi)$ が同型で、次の図が可換になることが示される。

$$\begin{array}{ccc} SK_1(R'\pi) & \xrightarrow{\theta_{R'\pi}} & \\ \downarrow tr & & H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi) \\ SK_1(R\pi) & \xrightarrow{\theta_{R\pi}} & \end{array}$$

上定理より、homology 群を調べて、次の諸結果が得られる。

系. π が次のいずれかの p 群のとき、$SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p\pi) = 0$.

(1) $|\pi/Z(\pi)| \leq p^3$ (2) π は商群が可換となる中心的巡回部分群をもつ (3) $|\pi| \leq 32$ ($p=2$)

($SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p\pi) \neq 0$ となる位数 p^5 (p : odd) の群 π、また $SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi) \neq 0$ となる位数64の群の例が存在する。)

系. p 群に対して

(1) $SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_1 \times \pi_2]) \cong SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p\pi_1) \oplus SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p\pi_2)$

(2) $SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi \wr \mathbb{Z}_p]) \cong SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p\pi)$

§4. 誘導定理

有限群πとp環Rの$SK_1(R\pi)$に対しても，Brauerの誘導定理（§2、定理6 参照）が成り立つ。それを示すには，Cl_1の場合と同様にWittの誘導定理から，πがp-R-elementaryの場合に帰着される。すなわち，p群πからp環の不分岐拡大$R \subseteq S$のGalois群への準同型$t: \pi \to Gal(S/R)$が与えられたとき，$SK_1(S\rho) \to SK_1(S[\pi]^t)$（$\rho$は$t$のkernel）がsurjectiveであることを示せばよい。

まず，$S[\pi]^t$のK_1-群について，次が成り立つ。

<u>補題13.</u> ρに含まれるπの正規部分群σに対して

$$\ker[K_1(S\rho) \to K_1(S[\rho/\sigma])] \to \ker[K_1(S[\pi]^t) \to K_1(S[\pi/\sigma]^t)] : \text{surjective}$$

これは，$\sigma = \langle z \rangle$, $z^p = 1$の場合の$K_1(S\rho, (1-z)) \to K_1(S[\pi]^t, (1-z))$のsurjectivityに帰着させて証明される。その際，p環S上のorder Aとそのideal $\mathfrak{a}$に対するWallの一般的な結果：$K_1(A, \mathfrak{a}) = \varprojlim K_1(A/\mathfrak{a}^{n+1}, \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1})$（[17]）が使われる。

上の補題で，特に$\sigma = \rho$とおくと，$S[\pi/\rho]^t$がR上の全行列環になることと，不分岐拡大$R \subseteq S$のnorm写像$S^* \to R^*$がsurjectiveであることから，$K_1(S\rho) \to K_1(S[\pi]^t)$のsurjectivityが得られる。$\pi$の$K_1(S\rho)$への自然な作用に関するcohomology群を考察して，このsurjectivityはさらに詳しく

$$H_0(\pi, K_1(S\rho)) \cong K_1(S[\pi]^t),\quad H_0(\pi, K_1'(S\rho)) \cong K_1'(S[\pi]^t)$$

と表わされ，かつ $K_1'(Sp) \cong K_1(Sp)/SK_1(Sp)$ が cohomologically trivial であることが示される。よって，次が成り立つ。

補題14　$H_0(\pi, SK_1(Sp)) \cong SK_1(S[\pi]^t)$

特に，$SK_1(Sp) \to SK_1(S[\pi]^t)$ は surjective.

定理15.　$SK_1(R\pi)$ に対して，Brauer の誘導定理が成り立つ。

特に p-elementary な群 $\mathbb{Z}_n \times \pi$ （π : p群，$p \nmid n$）に対して

$R\mathbb{Z}_n = \sum R_i$ （R_i : p環）とおくと，

$$SK_1(R[\mathbb{Z}_n \times \pi]) \cong \sum SK_1(R_i\pi)$$

この誘導定理より，前節の係数環の拡大に関す結果は，一般の有限群の場合に拡張することができる。

定理16.　有限群πに対して，$R \subseteq R'$ が p環の完全分岐拡大ならば，自然な写像 $SK_1(R\pi) \to SK_1(R'\pi)$ は同型であり，不分岐拡大ならば，$tr : SK_1(R'\pi) \to SK_1(R\pi)$ が同型を与える。

また，上の誘導定理と cl_1 に関する Brauer の誘導定理から，直ちに n環についての誘導定理が得られる。

定理17.　任意の有限群πと n環Rの $SK_1(R\pi)$ に対して，Brauer の誘導定理が成り立つ。

特に次の各群の elementary な部分群は，巡回群，$D(2^n)$, $Q(2^n)$ or $(\mathbb{Z}_2)^k$ の形であるから，定理10の系より，次が成り立つ。

系　$\pi \cong PSL(2,p)$, $SL(2,p)$ （p : 素数），$SL(2,2^n)$ or $Q(4n)$ ならば，

$SK_1(\mathbb{Z}\pi) = 0$ である。

誘導定理は，一般に Green 関手上の Green 加群の理論として位置づけられる（Dress [5]）。特に $SK_1(R\pi)$ は，Green関手 $G_0(R\pi)$（$R\pi$ の Grothendieck 環）上の Green 加群である。この観点から，R が p 進環の場合，$SK_1(R\pi)$ に関する Witt の誘導定理を以下に述べる形に書き直すことが出来る。

まず，R を標数 0 の Dedekind 整域とし，F を商体とする。F 上の半単純多元環の R-order の圏から可換群の圏への covariant な関手 X で，次の条件を満たすものを考える。

(1) 有限群 π に対して，$X(R\pi)$ は Green 加群で，ある素数 p に対して Witt の誘導定理が成り立つものとする。

(2) p-F-elementary な群 $\pi = \mathbb{Z}_n \rtimes \rho$ (ρ: p群, $p \nmid n$) に対して，$F\mathbb{Z}_n = \sum F_i$，$R_i = F_i$ における $\mathbb{Z}$ の整閉包とすると，
$X(R\pi) \cong \sum X(R_i[\rho]^t)$ が成り立つ。

(3) 任意の p群 ρ，p と素な同一の素因子をもつ任意の自然数 $m|n$ および任意の準同型 $t: \rho \to Gal(F(\zeta_n)/F)$
$\cong Gal(F(\zeta_m)/F)$ (ζ_n は 1 の原始 n 乗根) に対して，合成写像 $X(R[\zeta_m][\rho]^t) \longrightarrow X(R[\zeta_n][\rho]^t) \xrightarrow{tr} X(R[\zeta_m][\rho]^t)$ は n/m 倍写像に一致する。

このとき，$\{g_1, \cdots, g_k\}$ を π の p'元の F-共役類の代表系とし，$N_\pi^F(g_i) = \{x \in \pi \mid x g_i x^{-1} = g_i, \sigma \in Gal(F(\zeta_{|g_i|})/F)\}$ とおくと，Witt の誘導定理は，次の形に表わせる。

$$X(R\pi) \cong \sum_{i=1}^{k} \varinjlim \{ X(R[\zeta_{|g_i|}][\rho]^t) \mid \rho \text{ は } \rho \subseteq N_\pi^F(g_i) \text{ なる } p \text{ 群} \}$$

ここで，$\varinjlim$ は inclusion と $N_\pi^F(g_i)$ の元による共役写像に関する直極限である。条件(1)より，$X(R\pi) = \varinjlim \{ X(R\pi') \mid \pi' \leq \pi$ は p-F-elementary$\}$ と表わされるから，上の同型を得るには，(2)の分解を $\varinjlim$ を保つように並べ直せばよい。それは条件(3)を用いてなされる。

特に，R を不分岐 p 環とし，R-order A に対し $X(A)$ として $SK_1(A)$ を考えると，条件(1),(2)は成り立っている。また，twist t の kernel を ρ' とすると，$SK_1(R[\zeta_n][\rho']) \to SK_1(R[\zeta_n][\rho]^t)$ は surjective（補題14）で，$SK_1(R[\zeta_n][\rho'])$ については(3)が成り立つので，$SK_1(R[\zeta_n][\rho]^t)$ についても条件(3)が満たされる。したがって，$SK_1(R\pi)$ に対する Witt の誘導定理は次のように表わされる。

(☆) $$SK_1(R\pi) \cong \sum_{i=1}^{k} \varinjlim \{ SK_1(R[\zeta_{|g_i|}][\rho]^t \mid \rho \subseteq N_\pi^F(g_i) \text{ は } p \text{ 群} \}$$

そこで，twist の kernel を $\rho' = \rho \cap Z_\pi(g_i)$ （Z：中心化群）とすると，$SK_1(R[\zeta_{|g_i|}][\rho]^t) \cong H_0(\rho, SK_1(R[\zeta_{|g_i|}][\rho']))$ （補題14）で また $SK(R[\zeta_{|g_i|}][\rho']) \cong H_2(\rho')/H_2^{ab}(\rho')$ （定理12）であるから，(☆)の同型の右辺は

$$\sum_{i=1}^{k} \varinjlim \{ H_0(\rho, H_2(\rho')/H_2^{ab}(\rho')) \mid \rho \subseteq N_\pi^F(g_i) \text{ は } p \text{ 群で } \rho' = \rho \cap Z_\pi(g_i) \}$$

と表わされるが，ここで $H_2(\pi)/H_2^{ab}(\pi)$ も Green 加群であり，p 部分群に関する誘導定理が成り立つことから，結局次の同型が得られる。

<u>定理18</u>　Rは不分岐p環で，Fはその商体とする。$\{g_1, \cdots, g_k\}$を有限群πのp'元のF共役類の代表系とし，$N_i = N_\pi^F(g_i)$，$Z_i = Z_\pi(g_i)$とおくと，次の同型が成り立つ。

$$SK_1(R\pi) \cong \sum_{i=0}^{k} H_0(N_i,\ H_2(Z_i)/H_2^{ab}(Z_i))$$

特に，対称群S_n，交代群A_nにおいては，中心化群の構造はよく知られており，任意のpに対して，$H_2(Z_i)/H_2^{ab}(Z_i) = 0$となることが確められる。よって，上定理より

<u>系</u>　任意のpに対して，$SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p S_n) = SK_1(\hat{\mathbb{Z}}_p A_n) = 0$

一方，$Cl_1(\mathbb{Z}S_n) = 0$（定理5）であるから，この系より

<u>系</u>　$SK_1(\mathbb{Z}S_n) = 0$

となる。

前節の補題14および本節の局所的議論は大部分が$SK_1(\mathbb{Z}\pi)$に拡張できるが，それについては原論文を参照していただくことにして，$SK_1(\mathbb{Z}A_n)$に関する結果のみに付言しておこう。

$$SK_1(\mathbb{Z}A_n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_3, & n = \sum_{i=1}^{r} 3^{m_i} \geq 27,\ m_1 > m_2 > \cdots > m_r \geq 0,\ \sum m_i = \text{odd} \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases}$$

References

1. Bak,A ;K-theory of forms,Ann.Math.Studies,No.98,1981
2. Bass,H ;Algebraic K-theory,Benjamin,1968
3. Bass,H-Milnor,J-Serre,J.P. ;Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n(n\geq 3)$ and $Sp_{2n}(n\geq 2)$, I.H.E.S.,vol.33, 59-137, 1967
4. Dennis,R.K-Stein,M ;K_2 of discrete valuation rings, Advances in Math.,vol.18,182-238,1975
5. Dress,A ;Induction and structure theorems for orthogonal representations of finite groups, Ann.Math., vol.102, 291-325, 1975
6. Keating,M ;Values of tame symbols on division algebras, J.London Math.Soc.,vol.14,25-30,1976
7. Magurn,B ;SK_1 of dihedral groups,J.Algebra,vol.51, 399-415, 1978
8. Matumoto,H ;Sur les sougroupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés,Ann.Ecole Norm.Sup.,vol.2,1-62,1969
9. Milnor,J ;Introduction to algebraic K-theory, Ann.Math. Studies,vol.72, 1971
10. Oliver,R ;SK_1 for finite group rings I,Invent.Math.,vol.57, 183-204, 1980
11. ____ ; ______II,Math.Scand.,vol.47, 195-231, 1980
12. ____ ; ______III,L.N.Springer,vol.854,299-337,1981
13. ____ ; ______IV, Proc.London Math.Soc.,vol.46,1-37,1983
14. Rehman,U-Stuhler,U ;On K_2 of finite dimensional division algebras over arithmetic fields, Invent.Math.,vol.50, 75-90, 1978

15. Stambach,U ;Homology in group theory,L.N.Springer,vol.359, 1973

16. Stein,M ;Whitehead groups of finite groups,Bull. A.M.S., vol.84, 201-212, 1978

17. Wall,C.T.C ;On classification of hermetian forms III, Complete semilocal rings,Invent.Math.,vol.19,59-71,1973

18. ________ ;Norms of units in group rings, Proc.London Math. Soc.,vol.29,593-632,1974