数理解析研究所講究録
第549巻 1985年 95-104

Equivariant Simple Homotopy Theory と Burnside ring について

信州大(理) 松田智充 (Toshimitsu Matsuda)

§1 序

同変単純ホモトピー論は[1],[2],[9],[10],[14]等において研究されている。特にコンパクト リー群 G と有限 G CW複体 X 上の同変 Whitehead 群 $Wh_G(X)$ と G-ホモトピー同値写像 $f:Y\to X$ の同変 Whitehead torsion $\tau_G(f)\in Wh_G(X)$ を調べる事がその主な研究の1つでもある。$f:Y\to X$ が単純 G ホモトピー同値写像となる為の必十条件は $\tau_G(f)=0$ ([16] Theorem 3.6′) である。$Wh_G(X)$ は代数的 Whitehead 群に帰着される([1],[2],[9],[14])。特に G が有限群, X が G-1連結 (任意の部分群 H に対して X^H が単連結) ならば同型写像 $\psi: Wh_G(X)\xrightarrow{\cong}\bigoplus_{(H)\in C(G)} Wh(N(H)/H)$ が存在する。ここで $C(G)$ は G のすべての部分群の共役類よりなる集合, $N(H)$ は H の正規化群 $Wh(\ )$ は代数的 Whitehead 群である。更にこの時 $E_G(X)$ を X の自己 G ホモトピー同値写像の

Gホモトピー類よりなる写像の合成を積とする群とすると，Whitehead torsion は準同型写像 $\tau_G : E_G(X) \longrightarrow Wh_G(X)$ $(\tau_G([f]) = \tau_G(f))$ を定める（注．一般の X については準同型写像にならない）。さて，V を十分大きな G の複素表現とすると V の単位球面 $S(V)$ は G-1 連結であり同型写像 $\varphi : E_G(S(V)) \cong A(G)^*$ が存在する（$A(G)^*$ は Burnside 環 $A(G)$ の単位群）。従って準同型写像 $\tau_G^{alg} : A(G)^* \longrightarrow \bigoplus_{(H) \in C(G)} Wh(N(H)/H)$ $(\tau_G^{alg} = \psi \tau_G \varphi^{-1})$ が定められる。§2では，いくつかの定理の紹介を，§3では $A(G)^*$ と関係する同変単純ホモトピー論の一部分について，特に $\tau_G^{alg} = 0$（従って任意の Gホモトピー同値写像 $f : S(V) \longrightarrow S(V)$ は単純Gホモトピー同値写像となる）となる場合の考察と，$\tau_G^{alg} \neq 0$ となる必要条件の考察をする。

§2. 同変 Whitehead 群と Whitehead torsion

<u>定義(2.1)</u> 有限 G-CW 複体の包含写像 $i : X \hookrightarrow Y$ が elementary G-expansion であるとは，次の(i)(ii)を満す時である。

(i) $Y = X \cup e^{n-1} \cup e^n$ （e^{n-1}, e^n は Y の $n-1$, n 次元 G−開胞体）

(ii) 部分群 H と，次の(1)−(3)を満す G-map $\sigma : G/H \times I^n \longrightarrow Y$ が存在する（ここで I^n は n 次元 cube で I^n には自明な G 作用を

与えておく)。 (1) $\sigma(G/H \times J^{n-1}) \subset X^{n-1} = X$ の $n-1$ skelton
(2) $\sigma|_{G/H\times I^{n-1}}$ は $\overline{e^{n-1}}$ の characteristic G-map.
(3) σ は $\overline{e^n}$ の characteristic G-map (ここで $I^{n-1} = I^{n-1} \times 0$, $J^{n-1} = \dot{I}^n - \mathring{I}^{n-1}$)

$i: X \hookrightarrow Y$ が elementary G-expansion の時 Storong deformation retract $D_t: I^n \to J^{n-1}$ は, storong G-deformation retract $\tilde{D}_t: Y \to X$ を誘導する。従って i は G-homotopy 同値写像である。またこの時すべての G-retraction $: Y \to X$ は G-ホモトピックで $i: X \hookrightarrow Y$ の G-ホモトピー逆写像である。そこで1つの G-cellular retraction $r: Y \to X$ を elementary G-contraction という。elementary G-expansion と elementary G-contraction をあわせて elementary G-deformation という。

(V, X), (W, X) を有限 G-CW pair とする。G-map $k: (V, X) \to (W, X)$ $(k|_X = 1_X)$ が formal G-deformation rel X であるとは, 有限 G-CW pair (V_i, X) $(i = 1 \cdots p$, $V_0 = V$, $V_p = W)$ と elementary G-deformation $k_i: V_{i-1} \to V_i$ $(k_i|_X = 1_X)$ が存在して $k = k_p \circ \cdots \circ k_1$ となっていることとする。Formal G-deformation $k: (V, X) \to (W, X)$ rel X が存在するとき, 記号で $V \overset{\frown}{\underset{G}{\searrow}} W$ rel X と書く。G-map $f: (V, X) \to (W, X)$ $(f|_X = 1_X)$ に対して, $f \underset{G}{\simeq} k$ rel X なる $k: (V, X) \overset{\frown}{\underset{G}{\searrow}} (W, X)$

が存在する時，fは単純Gホモトピー同値写像 rel X であるという。

<u>定義(2.2)</u>．$\mathcal{H}_G(X)=\{(V,X)\mid (V,X)$は有限$G$-CW複体のpairで$X$は$V$の strong G-deformation retract$\}$とおく。$\mathcal{H}_G(X)$において同値関係$\underset{s}{\sim}$を　$(V,X)\underset{s}{\sim}(W,X)\Leftrightarrow V\underset{G}{\diagup\!\!\searrow}W$ rel Xで定め，$\mathcal{H}_G(X)/\underset{s}{\sim}=Wh_G(X)$と書く。$(V,X)\in\mathcal{H}_G(X)$を含む類を$[V,X]$と書くと，$Wh_G(X)$において和が$[V,X]+[W,X]=[V\underset{X}{\cup}W,X]$で定義される。実は$Wh_G(X)$はアーベル群になる。そこで$Wh_G(X)$を有限$G$-CW複体$X$上の同変 Whitehead 群という。

Cellular G-map $f:X\longrightarrow Y$は準同型写像　$f_*:Wh_G(X)\longrightarrow Wh_G(Y)$　$(f_*([V,X])=[V\underset{f}{\cup}Y,Y])$を誘導する。$f:X\to Y$が Cellular Gホモトピー同値写像なら$(M_f,X)\in\mathcal{H}_G(X)$であり$f_*([M_f,X])\in Wh_G(Y)$。そこで$f_*([M_f,X])=\tau_G(f)$と書いて$f$の同変 Whitehead torsion という。Gホモトピー同値写像$f:X\longrightarrow Y$に対しては　$\tau_G(f)=\tau_G(\tilde{f})$　($\tilde{f}$はfの cellular G-approximation)で定義する。

<u>定理(2.3)</u>([14])　Gホモトピー同値写像$f:X\to Y$に対してfが単純Gホモトピー同値写像となる必十条件は$\tau_G(f)=0$である。

<u>定理(2.4)</u>([1])　Gが有限群の時，コンパクト smooth G-manifold Mの単純Gホモトピータイプは，その smooth G-

traiangulation のえらび方によらない。

系 (2.5) Gを有限群, M, M'をコンパクト smooth G-manifold $f: M \to M'$ を G-diffeomorphism とすると $\tau_G(f)=0$。

定理(2.6) ([1],[2],[7],[14]) Gをコンパクトリー群, Xを有限G-CW複体, $C(G)$を閉部分群の共役類よりなる集合, X_α^HをX^Hのある連結成分とし, $X^H=\coprod_{\alpha\in A_H} WH\cdot X_\alpha^H$ をX^HのWH-成分への分解とする ($WH=N(H)/H$)。$\tilde{X}_\alpha^H$をX_α^Hの universal covering とし, $\tilde{\Gamma}_\alpha$を$\tilde{X}_\alpha^H$が$\tilde{\Gamma}_\alpha$-CW複体とし, $1\to\pi_1(X_\alpha^H)\to\tilde{\Gamma}_\alpha \to (WH)_\alpha\to 1$ を完全列とする群とする ($(WH)_\alpha=\{w\in WH \mid w\cdot X_\alpha^H=X_\alpha^H\}$)
この時

$$Wh_G(X)\cong\bigoplus_{(H)\in C(G)}\bigoplus_{\alpha\in A_H} Wh(\tilde{\Gamma}_\alpha/(\tilde{\Gamma}_\alpha)_0)$$

($(\tilde{\Gamma}_\alpha)_0$は, $\tilde{\Gamma}_\alpha$の e-成分) を得る。特にGが有限群で, XがG-1連結ならば $Wh_G(X)\cong\bigoplus_{(H)\in C(G)} Wh(WH)$ となる。又 Xが連結ならば $Wh(X)=Wh_{\{e\}}(X)\cong Wh(\pi_1(X))$ となる。

§3. 準同型写像 $\tau_G^{alg}: A(G)^*\longrightarrow\bigoplus_{(H)\in C(G)} Wh(WH)$ について

定義(3.1) 以後Gは有限群とする。$\mathcal{S}(G)$を有限G集合のG同型類よりなる集合とする。$\mathcal{S}(G)$はG集合の disjoint 和と Cartesian 積により半環となる。そこで $A(G)$を$\mathcal{S}(G)$の Grothendieck 環とし, Gの Burnside 環と呼ぶ。$A(G)^*$をその

単位群とする。有限G集合Fに対して、写像 $\alpha_F: C(G)\to\mathbb{Z}$ を $\alpha_F((H)) = |F^H|$ で定める事によってBurnside環 $A(G)$ は $Map(C(G),\mathbb{Z})$ の部分環と見なせる。Gの実表現環を $RO(G)$ とする。この時加法群としての $RO(G)$ から $A(G)^*$ への準同型写像 $\omega_G: RO(G)\to A(G)^*$ を $\omega_G(V)((H)) = (-1)^{\dim V^H}$ で定義する。ここで、$\omega_G(V)\in Map(C(G),\mathbb{Z}/2)\subset Map(C(G),\mathbb{Z})$ であるが、$\omega_G(V)\in A(G)^*$ なる事が証されている([5] Proposition 5.5.9)。

<u>定理(3.2)</u>. ([6] Theorem 7.2) Vを十分大きいGの複素表現とする。この時 $\varphi: E_G(S(V))\to A(G)^*$ ($\varphi([f])((H)) = \deg f^H : S(V)^H\to S(V)^H$) は同型写像である。

<u>定理(3.3)</u>(定理(2.4)の系). Vを十分大きいGの複素表現, $f:S(V)\to S(V)$ をGホモトピー同値写像とする。この時もし $\varphi([f])\in \mathrm{image}\,\omega_G$ ならば $[f]$ は G-diffeomorphism で代表される。従って $\tau_G(f)=0$ ($\varphi(f)\in\mathrm{image}\,\omega_G$ の時)

<u>問題I.</u> $\tau_G^{alg}: A(G)^*\to \bigoplus_{(H)\in C(G)} Wh(WH)$ ($\tau_G: E_G(S(V))\to Wh_G(S(V))$) が零写像となるのはどの様な時か.

<u>問題II.</u> $\tau_G^{alg}\neq 0$ ($\tau_G\neq 0$) となるのはどの様な時か.

問題I. についてはいくつかの結果がある。

<u>(3.4)</u> $\omega_G: RO(G)\to A(G)^*$ が全射ならば $\tau_G^{alg}=0$ (by (3.3))

<u>(3.5)</u> ([8] Theorem A) ω_G が全射となる必十条件は、中心の位数が2以下のすべての商群 $G'=G/H$ に対して $\omega_{G'}$ が

全射となる事である。

<u>(3.6)</u> ([8] Theorem B) $1 \to H \to G \to K \to 1$ を有限群の完全列とする。K は $A(H)^*$ に自然に作用する。$|K|=odd$ で $\sqcup_H$ が全射ならば $\sqcup_G$ は全射である。更に完全列が split するならば $A(G)^* \cong (A(H)^*)^K$ である。

<u>(3.7)</u> $\sqcup_G$ が全射となる群 G の例

アーベル群, D_n: dihedral 群 ([7]), $|G|=odd$ ([5])

$D_{n_1} \times D_{n_2} \times \cdots \times D_{n_r}$ ($n_1, \cdots, n_r$ は互いに素) ([8])

問題 II については何もわかっていない。$\tau_G^{alg} \neq 0$ になる為の必要条件は

(i) $\sqcup_G$ が全射でない事.

(ii) $A(G)^*$ は elementary 2-群より, ある部分群 H に対して $Wh(WH)$ の 2-torsion $\neq 0$ なる事.

(i)については次の結果がある。

<u>(3.8)</u> ([7] Theorem 5.4) G が可解でない時 $\sqcup_G$ は全射とならない (逆は成立しない)。

(3.8)を証す時に $A(G)$ の自明でないべき等元 e (存在する) に対して $(1-2e) \notin \text{image} \sqcup_G$ を示して証明する。そこで $\tau_G^{alg}(1-2e) \neq 0$ と思うが一般に成立しない。$A(G)^*$ には $1-2e$ (e は自明でないべき等元) とか, image $\sqcup_G$ に属する元以外の元 $\alpha \in A(G)^*$ が含まれる場合がある。その様な α に対して

$\tau_G^{alg}(\alpha)\neq 0$ と思うがこれも一般に成立しない。例として5次の対称群 $\mathfrak{S}_5$ がある。

$|A(\mathfrak{S}_5)^*|=2^9$, $|\mathrm{image}\, \sqcup_{\mathfrak{S}_5}|=2^7$, $A(\mathfrak{S}_5)$ の自明でないべき等元は唯1つ(それを e とする) 従って $A(\mathfrak{S}_5)^*=\langle \mathrm{image}\, \sqcup_{\mathfrak{S}_5}, 1-2e, \alpha\rangle$ ([7] Example 5.11). 一方 $\mathfrak{S}_5$ の部分群 H に対して $N(H)/H$ は次の群のいずれかに同型である。

$\langle 1\rangle$, $\mathfrak{S}_5$, D_3, $\mathbb{Z}/4$, $\mathbb{Z}/6$, $\mathbb{Z}/2\times\mathbb{Z}/2$

しかもこれらの群に対してはその algebraic Whitehead群 $Wh(\ )$ は torsion を持たない事がしられている。従って (ii) より $\tau^{alg}_{\mathfrak{S}_5}=0$ ($\tau_{\mathfrak{S}_5}=0$) である。

(3.9) $\alpha\in Map(C(G),\mathbb{Z})$ に対して $\alpha\in A(G)$ なる必十条件は、各 $(H)\in C(G)$ に対して次の (#) を満す事である ([5] Proposition 1.3.5).

(#) $$\sum_{(K)} \left|N(H)/N(H)\cap N(K)\right|\,\left|(K/H)^*\right|\,\alpha((K))\equiv 0 \mod |NH/H|$$

($H\triangleleft K$, K/H = 巡回群, $(K/H)^*$ = K/H の生成元のあつまり
(K): K の NH における共役類)

さて, τ_G^{alg} は $\psi\tau_G\varphi^{-1}$ として定義されているが直接代数的に定義する事は筆者にとって困難である。(形式的には, すべての群 G に対して $\tau_G=0$ とならないならば定義できるはずである) (#) を用いて自然な準同型写像 $\tilde{\tau}_G^{alg}: A(G)^*\longrightarrow \bigoplus_{(H)\in C(G)} Wh(WH)$ がもし定義できれば $\tau_G^{alg}=\tilde{\tau}_G^{alg}$ と思われる。

参考文献

[1] S. Araki : Equivariant simple homotopy theory I, to appear.

[2] D. R. Anderson : Torsion invariant and Action of finite groups, Michigan Math. J., 29 (1982) 27-42.

[3] G. B Segal : Equivariant stable homotopy theory, Actes, Congress inyern. Math, Nice. 2 (1970), 59-63

[4] T. tom. Dieck : The Burnside ring and Equivariant stable Homotopy theory, Lecture notes by Michael C. Bix University of Chicago.

[5] __________ : Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Math., 766 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York (1979)

[6] R.L. Rubinsztein : On the equivariant homotopy of spheres, Institute of Math., Polish Academy of Sciences, Preprint No. 58 (1973).

[7] T. Matsuda : On the unit groups of Burnside rings, Japanese J. of Math., New Series Vol 8. No 1 (1982)

[8] T. Matsuda and T. Miyata : On the unit groups of Burnside rings of finite groups, J. Math Soc.

Japan Vol. 35 No 2 (1983).

[9] H. Hauschild: Äquivariante Whitehead torsion, Manscripta Math., 26 (1978)

[10] M. Rothenberg: Torsion invariant and finite transformation groups, Proc. of Symposia in Pure Math., Vol 32 (1978)

[11] M.R. Stein: Whitehead groups of finite groups, Bull. Amer. Math. Soci., 84. 2. (1978)

[12] R. Oliver: SK_1 for finite group Rings: I, Inv. Math., 57. 183-204 (1980)

[13] ________ : SK_1 for finite group Rings: II Math., Scand. 47 (1980) 195-231.

[14] S. Illman: Equivariant Whitehead Torsion and Actions of Compact Lie groups, to appear.

[15] ________ : Action of compact Lie groups and equivariant Whitehead torsion, to appear.

[16] ________ : Whitehead Torsion and Group Action, Ann. Acad Soi Fennicæ (1974)