数理解析研究所講究録
第 549 巻 1985 年 159-168

Multiplicative Galois module structure

東大・教養 片岡俊孝 (Toshitaka Kataoka)

§0. 序。

この小文では、T. Chinburg による代数体の一般化された単数群の Galois module structure をあらわす不変量の定義と性質を、かんたんにまとめてみたい。とくに Chinburg は、Artin root number, L 函数の $s=0$ での Taylor 展開での最初の 0 ではない項の係数等との結びつきにかんする予想を提出している。

まず、群環の class group ついて復習しよう。G を有限群とし、$K_0(\mathbb{Z}G)$ を群環 $\mathbb{Z}G$ の K 群とする。$\mathbb{Z}G$ の class group $Cl(\mathbb{Z}G)$ を、

$$Cl(\mathbb{Z}G) = \mathrm{Ker}\,(K_0(\mathbb{Z}G) \xrightarrow[\mathrm{rank}]{} \mathbb{Z})$$

で定める。また、$\mathbb{Z}G$ をふくむ $\mathbb{Q}G$ のひとつの maximal order を $\mathfrak{M}$ とすると、canonical inclusion $\mathbb{Z}G \hookrightarrow \mathfrak{M}$ より定まる

$$D(\mathbb{Z}G) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(Cl(\mathbb{Z}G) \to Cl(\mathfrak{M}))$$

は，α_ℓのとり方によらない。Fröhlichによるclass groupのidelicな記述がある：

$$Cl(\mathbb{Z}G) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, J(E))/\mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, E^\times)\,\mathrm{Det}\,U(\mathbb{Z}G).$$

ここに，

R_G：Gの一般指標全体のなす環，

E：$\mathbb{Q}$上有限次Galoisである十分大きな体，($\subset \mathbb{C}$)

$\Lambda = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$,

$J(E)$：Eのidele群，

$U(\mathbb{Z}G)$：$\mathbb{Z}G$の unit idele群，すなわち $\prod_{p:\text{素数}}(\mathbb{Z}_pG)^\times \times (\mathbb{R}G)^\times$.

Detの定義については，Fröhlich [3] をみよ。

上記の同型の定める自然なhomomorphism $\mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, J(E)) \longrightarrow Cl(\mathbb{Z}G)$ を g，また，自然なprojection $Cl(\mathbb{Z}G) \to Cl(\mathbb{Z}G)/D(\mathbb{Z}G)$ を t であらわす。

§1．不変量Ω_m。

N/K を有限次代数体のGalois拡大，$G = \mathrm{Gal}(N/K)$ とする。Sを，Nの素点の有限集合であって，すべての無限素点をふくみGの作用でstableであるものとする。$U = U(S)$ を N のS-units全体のなす群とする。YをSで生成される自由$\mathbb{Z}$加群，$X = X(S) = \mathrm{Ker}\left(\begin{array}{ccc} Y & \to & \mathbb{Z} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \sum_{s\in S} a_s s & \mapsto & \sum_{s\in S} a_s \end{array}\right)$ と定める。

上のような $(N/k, S)$ が次の(i), (ii)をみたすとき, tameであるという。

(i) Sは、N/kで分岐するすべての素点をふくむ。

(ii) 任意のN/Kの中間体Fに対して, Sの下にあるFの有限素点に対応するFのideal類全体は, Fのideal類群を生成する。

Lemma (Tate). $(N/k, S)$はtameであるとする。このとき有限生成かつcohomologically trivialな$\mathbb{Z}G$加群A, Bとexact sequence:

$$(*) \qquad 0 \to U \to A \to B \to X \to 0$$

が存在して、このexact sequence $(*)$は, $\mathrm{Ext}^2_G(X, U)$のcanonical classにぞくする。

canonical classの定義については, Tate [5] あるいは Chinburg [1] をみよ。

有限生成projective $\mathbb{Z}G$加群Pに対応する$K_0(\mathbb{Z}G)$の元を(P)であらわすことにしよう。Mを有限生成かつcohomologically trivialな$\mathbb{Z}G$加群とする。このとき,

$0 \leftarrow M \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow 0$, P_0, P_1はprojective $\mathbb{Z}G$加群,

とあらわせ, $(P_0) - (P_1) \in K_0(\mathbb{Z}G)$はresolutionのとり方によらない。これを$(M)$であらわす。

以上の準備のもとで，Chinburgの結果を述べよう。

<u>Theorem 1 (Chinburg)</u>　$(N/k, S)$ は tame であるとする。上の Lemma の (＊) をみたす A，B に対して，$(A)-(B)\in K_0(\mathbb{Z}G)$ は，$Cl(\mathbb{Z}G)$ にぞくし，この元は，A，B のとり方にも，S のとり方にもよらない。

上の定理で本質的なところは，"S のとり方によらない"という部分。　このような $Cl(\mathbb{Z}G)$ の元を $\Omega_m(N/k)=\Omega_m$ とあらわすことにする。

また，subextension の Ω_m は，$\Omega_m(N/k)$ であらわせることも示されている。

<u>Theorem 2 (Chinburg)</u>　H を G の部分群とする。　このとき，

(i) $res_{G\to H}\,\Omega_m(N/k)=\Omega_m(N/N^H)$，

(ii) H が normal なら，

$$norm_{G\to G/H}\,\Omega_m(N/k)=\Omega_m(N^H/k)。$$

$res_{G\to H}$，$norm_{G\to G/H}$ については，Fröhlich [3] をみよ。

§2. <u>Ω_m と Artin root number.</u>

$\chi\in R_G$ に対して，$W(\chi)=W(N/k,\chi)$ を Artin root number

とする。（定義等については Fröhlich [3] を見よ）。

$\chi \in R_G$ に対して、

$$W'(\chi) = \begin{cases} W(\chi) & \chi \text{ が symplectic のとき,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

symplectic な character については、Martinet [4] あるいは、Fröhlich [3] をみよ。とくに、symplectic な χ は real-valued であるから、$W(\chi) = \pm 1$ であることに注意せよ。

E は $\mathbb{C}$ の部分体であるとし、p_∞ を自然なうめこみ $E \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対応する E の無限素点とする。$\alpha \in \Lambda$ に対し、

p_∞^α を $|\alpha x|_{p_\infty^\alpha} = |x|_{p_\infty}$, $x \in E$, で定める。

$\mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, J(E))$ の元 $\underline{W}'(N/k)$ を次のように定める；

$$\underline{W}'(N/K)(\chi) \text{ の } v\text{-component} = \begin{cases} W'(N/k, \chi^{\alpha^{-1}}) & v = p_\infty^\alpha, \alpha \in \Lambda, \\ 1 & v \text{ が有限素点のとき.} \end{cases}$$

ここに、$\chi \in R_G$、v は N の素点である。

さて、$\Omega_m(N/k) \pmod{D(\mathbb{Z}G)}$ の Artin root number による記述にかんする予想をのべよう。

<u>Conjecture 1</u>. $t(\Omega_m(N/k)) = t(\mathfrak{g}(\underline{W}'(N/k)))$

N/k が at most tamely ramified のときは、N の整数環 $\mathcal{O}_N$ は、$\mathbb{Z}G$-projective である。$\Omega_a = (\mathcal{O}_N) - [K:\mathbb{Q}](\mathbb{Z}G) \in Cl(\mathbb{Z}G$

とおく。　このとき，M.J.Taylor によって 等式

$$\Omega_a(N/K) = q(\underline{W}'(N/K))$$

が示されている。

予想1に対する部分的結果については，次の§の最後の部分を見よ。

§ 3. Ω_m と L-series at $s=0$.

まず，Artin の L-函数の $s=0$ における特殊値に対する予想をかんたんに復習してみよう。(Tate[5])　$(N/k, S)$ は tame であるとする。

V を G の複素有限次元表現とし，χ_V（あるいは単に χ）をその指標としよう。$\varphi : X(S) \to U(S)$ を injective G-homomorphism とする。このとき，φ の Cokernel は，有限である。V, φ より定まる regulator を $R(V,\varphi)$ とかく。$L_S(V, s)$ を表現 V の L-函数より，S の下にある K の有限素点に対応する Euler 因子をとりのぞいたものとする。$C_{V,S}$ で $L_S(V, s)$ の $s=0$ での Taylor 展開で 0 ではない最も次数の低い項の係数をあらわす。　$A(V,\varphi) = R(V,\varphi)/C_{V,S}$ とおく。

Conjecture 2. 任意の $\alpha \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ に対して，$A(V^\alpha, \varphi) = A(V,\varphi)^\alpha$ が成立する。

予想2が正しければ，$A(V,\varphi)$は代数的数となる。

$A(V,\varphi)$によって生成されるイデアルについての予想がある。

$\mathcal{O}_E=\mathcal{O}$を$E$の整数環とする。$G$-加群$M$, Cに対して，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, C\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O})$を$C_M$と略記する。また，$C^G$, C_GでそれぞれGが自明に作用する最大の部分加群，商加群をあらわす。$\mathcal{O}$-加群Cが有限生成かつtorsionであるとき，その order ideal を$\sigma(C)$とかく。

Mを$\mathcal{O}G$-latticeであって，$M\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C}$が，$V$のdualと同型であるとする。有限生成$G$-加群のhomomorphism $f: C\to D$のKernel, Cokernelは，ともに有限であるとする。$\mathcal{O}$イデアル

$$\sigma(\mathrm{Coker}\, n_M\circ f_M)\,/\,\sigma(\mathrm{Ker}\, n_M\circ f_M)$$

を$g_M(f)$とあらわす。ただし，

$$f_M\circ n_M;\ (C_M)_G \xrightarrow{f_M} (D_M)_G \xrightarrow{n_M} (D_M)^G$$
$$x \ (\mathrm{mod}\ \textstyle\sum_{\sigma\in G}(\sigma-1)D_M) \longmapsto \textstyle\sum_{\sigma\in G}\sigma x$$

$g_M(f)$は$\mathcal{O}G$-lattice Mのとり方によらない。

<u>Conjecture 3</u>. $(N/k, S)$がtameならば，$A(V,\varphi)\mathcal{O}=g_M(\varphi)$.

予想2, 3に関するTateの結果として，次がある。

<u>Theorem (Tate[5])</u> χ_Vが$\mathbb{Q}$-valuedならば，予想2, 3は正しい。

なお予想2,3の真偽は φ に依存しない。

予想3にあらわれた $g_M(\varphi)$ は、Ω_m と以下のようにして結びつく。

$H(G)=\{b\in \mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, Id(E))$; 任意の $\chi\in R_G$ に対して、$b(\chi)$ は、$\mathbb{Q}(\chi)$ のイデアル (i.e. $\mathcal{O}$-加群として、いくつかの $\mathbb{Q}(\chi)$ の元で生成される) $\}$

$P(G)=\{b\in H(G)$; すべての $\chi\in R_G$ に対して、次の(1)(2)が成立する

(1) $b(\chi)$ は $\mathbb{Q}(\chi)$ の単項イデアル、

(2) χ が symplectic ならば、$b(\chi)$ は、$\mathbb{Q}(\chi)$ のひとつの (totally) positive な元で生成される $\}$

ただし、$Id(E)$ は E のイデアル全体のなす群、$\chi\in R_G$ に対して、$\mathbb{Q}(\chi)$ は、$\mathbb{Q}$ に $\chi(g)$, $g\in G$ を添加して得られる体、とくに χ が symplectic なら $\mathbb{Q}(\chi)$ は実円分体である。

$H(G)$ は、自然な対応で、$\mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, J(E))/\mathrm{Hom}_\Lambda(R_G, U(E))$ と同型であることに注意すると、§0 の Fröhlich による class group の idelic な記述は、次の同型を導く。

$$Cl(\mathbb{Z}G)/D(\mathbb{Z}G)\simeq H(G)/P(G).$$

$g(\varphi)\in \mathrm{Hom}(R_G, Id(E))$ を次のように定める。G の既約指標 χ に対して、$g(\varphi)(\chi)=g_{M_\chi}(\varphi)$。ただし、$M_\chi$ は、$M_\chi\otimes_{\mathcal{O}}\mathbb{C}$ の character が $\overline{\chi}$ となるような $\mathcal{O}G$-lattice。

Proposition 1. (Chinburg)

(1) $q(\varphi) \in H(G)$,

(2) 上の同型で，$-\Omega_m(N/k) \pmod{D(\mathbb{Z}G)}$ は，$q(\varphi) \pmod{P(G)}$ に対応する。

予想 1，2，3 は，次のような関係にある。

Proposition 2. 予想 2，3 がすべての V について正しいならば，予想 1 は，正しい。

R を generalized $\mathbb{Q}$-valued character 全体のなす R_G の部分環とする。

$H_R(G) = \{ b|R \,;\, b \in H(G) \} \subset \mathrm{Hom}(R, \mathrm{Id}(E))$,

$P_R(G) = \{ b|R \,;\, b \in P(G) \}$.

予想 2，3 に対する Tate の部分的な結果より，予想 1 に対しても，次が成立する。

Proposition 3.

$H(G)/P(G)$ から $H_R(G)/P_R(G)$ への自然な準同型による $t(\Omega_m(N/k))$ と $t(q(\underline{W}'(N/k)))$ の像は一致する。

なお，Cent $\mathbb{Q}G = \bigoplus_{\alpha} L_\alpha$，$L_\alpha$は体，とすると，$H(G)/P(G)$ $H_R(G)/P_R(G)$は，それぞれ $\bigoplus_{\alpha}$（L_αのイデアル類群），$\bigoplus_{\alpha}$（$L_\alpha/\mathbb{Q}$ の genus group）とほぼ一致することに留意されたい。

文献

[1] Ted Chinburg ; On the Galois structure of algebraic integers and S-units , Inv. math., 74, 321-349, 1983

[2] Ted Chinburg ; Multiplicative Galois module structure, J. London Math. Soc. (2), 29, 23-33, 1984

[3] A. Fröhlich ; Galois module structure of algebraic integers , Springer, New York, 1983

[4] J. Martinet ; Character theory and Artin L-functions, in "Algebraic Number Fields", Proceedings of the Durham Symposium 1975, Academic Press, 1977, 1-87

[5] J. Tate ; Les Conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en s=0 , Birkhäuser, 1984