数理解析研究所講究録
第549巻 1985年 182-187

クンマー拡大のGalois module structure

愛媛大理　宮本雅彦（Masahiko Miyamoto）

L/Kを代数体の有限次Galois拡大とし，GをそれのGalois群 $Gal(L/K)$とする。このとき Lの整数環$\mathcal{O}_L$は自然に $\mathfrak{o}G$－加群としての構造を持つ。ここで$\mathfrak{o}$はKの整数環を表すとする。当然，自然な問題として，

"$\mathcal{O}_L$の $\mathfrak{o}G$－加群としての構造を決定せよ"

が起ってくるのですが，現在ほとんどわかっていません。$\mathbb{Z}G$－加群としての構造では，Fröhlich予想がTaylorによって証明され，Gのsymplectic characterのArtin root numbers $W(\chi)$と密接な関係があることがわかっています。

$\mathfrak{o}G$－加群の話しにもどると，ネーターの結果(?)により，$\mathcal{O}_L$が$\mathfrak{o}G$－加群としてlocally freeであることと，L/Kがtame拡大であることとが同値となります。この場合，各tame拡大L/Kはlocally free $\mathfrak{o}G$－加群より成る類群$Cl(\mathfrak{o}G)$の中の元$[\mathcal{O}_L]$を与えるわけですが，ここで視点をかえ，体Kと群Gを固定して考え，Galois群 $Gal(L/K)$が，

GであるようなKの tame 拡大体Lを動かしたとき，$[\mathcal{O}_L]$の集合 $R(\mathfrak{o}G)$は $Cl(\mathfrak{o}G)$ のどんな部分集合になるかを調べてみます。

まず，elementary abelian p-group に対しては，すでに求められています。（L.R.McCullon）

「定理」　Gを elementary abelian p-group とする。
Gを有限体F_qの加法群と見て，CをF_qの乗法群とする。自然に CはGの自己同型群となる。このとき，$\mathbb{Z}C$ の中に（Stickelberger-type と呼ばれる）イデアル $\mathcal{J}$ があって $R(\mathfrak{o}G) = Cl'(\mathfrak{o}G)^{\mathcal{J}}$ となる．ここで $Cl'(\mathfrak{o}G) = \mathrm{Ker}(Cl(\mathfrak{o}G) \to Cl(\mathfrak{o}))$。

特に上の結果は $R(\mathfrak{o}G)$が部分群となっていることを示しています。アーベル群に対してはこれが成り立ちます。これの証明も含めて，以下では <u>Gを位数p^2の巡回群とし，L/Kをクンマー拡大と</u>して話しを進めます。

L/Kを Galois群 Gをもつ Galois拡大とする。$L \ni v$に対して resolvend $\hat{v} = \sum_{g \in G} v^g g^{-1} \in LG$ を考えると，この写像は 左 KG－同型です。ゆえに$\mathcal{O}_L$の$\mathfrak{o}G$加群の構造は LGの中の $\mathfrak{o}G$-加群 $\hat{\mathcal{O}}_L$と一致します。

ΩをKの代数体とすると，ΩGの中の元xが resolvend であるためには 任意のK-同型αに対して $x^{\alpha} = f(\alpha)x$ となるGの元$f(\alpha)$が存在することです。（ここではfが全射であることを考えないでおく）。 このとき容易に，

（1） x, yが resolvend なら，xyも resolvend。

$\mathfrak{O}_L = \mathfrak{M}\vartheta$ （左からの作用と表して）と書けるので，$\hat{\mathfrak{O}}_L = \mathfrak{M}\hat{\vartheta}$， $\mathfrak{M}$は locally free なので，$\hat{\mathfrak{O}}_L^{p^2} = \mathfrak{M}^{p^2}\hat{\vartheta}^{p^2}$ となる。 $\hat{\vartheta}^{\alpha} = f(\alpha)\hat{\vartheta}$ なので とくに，$(\hat{\vartheta}^{p^2})^{\alpha} = (\hat{\vartheta})^{p^2}$，即ち，K-同型で不変，ゆえに，$\hat{\vartheta}^{p^2} \in KG$。 このとき，

（2） $\hat{\mathfrak{O}}_L^{p^2}$ は $\mathfrak{O}G$ の integral ideal で p^2-th power free である。

（3） $\mathfrak{M}^{-p^2}$ は $w = \hat{\vartheta}^{p^2}$ のKG内での ideal 分解での p^2-th power part として特徴付けられる。

次に，Gの各 character χ に対して，$\hat{\vartheta}_{\chi}$ で $\hat{\vartheta}$ のΩGのχ-成分を一般に表すとする。 このとき $\hat{\vartheta}_{\chi}^{g} = \chi(g)\hat{\vartheta}_{\chi}$ となる。 Gは cyclic なので，今χをGの faithful character とすると，他の character はχ^{i}の形となる。このとき，$\hat{\vartheta}_{\chi^i}\hat{\vartheta}_{\chi}^{-i}$ はG-不変，ゆえに，$\hat{\vartheta}_{\chi^i}\hat{\vartheta}_{\chi}^{-i} \in K$となる。今 LGの元uを $u_{\chi^i} = \vartheta_{\chi}^{i}$ として定義すると，$\hat{\vartheta}u^{-1} \in KG$。 ゆえに $u^{p^2} = (u\hat{\vartheta}^{-1})^{p^2}\cdot\mathfrak{M}^{-p^2}\hat{\mathfrak{O}}_L^{p^2} = (\hat{\vartheta}u^{-1}\mathfrak{M})^{-p^2}\hat{\mathfrak{O}}_L^{p^2}$ となる。

ゆえに $\mathfrak{M}$ の類を考えると，u もヌ resolvend なので，
$u=\widehat{v}$ と仮定してよい。

（6, 7）を使うことになるが 次の重要な結果を求める。

（4） $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{o}G$ の ideal とする。このとき $\mathfrak{a}$ と素な $\mathfrak{o}G$ の integral ideal $\mathfrak{b}$ で p^2-th power free なものがあって，
$\widehat{\mathfrak{O}}_L=\mathfrak{b}x^{p^2}$ と書ける。ここで x は resolvend.

この結果より

（5） $R(\mathfrak{o}G)$ は $Cl(\mathfrak{o}G)$ の部分群となる。

$E=End(G)$ とおく。$E\ni e$ に対して，$g^e=g^{t(e)}$ となる整数 $t(e)$ $(0\leq t(e)<p^2)$ が定まる（$g\in G$）。このとき e を $[t(e)]$ と書く。C を E の単元，即ち G の自己同型群とする。$E\ni e$ と $\mathfrak{o}G$ の ideal $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{o}G$-加群 $\mathfrak{a}^{e^{-1}}$ を次のように定義する。

(i) $\mathfrak{a}^{e^{-1}}$ は集合として $\mathfrak{a}$ と一致.

(ii) $\mathfrak{o}G\ni x$，$\mathfrak{a}\ni m$ に対して x の作用 $x\cdot m$ を $x^e m$ として定義する。

同時に $\mathfrak{a}^{e^{-1}}$ でヌ $\mathfrak{o}G$-加群 $\mathfrak{a}^{e^{-1}}$ に対応する ideal 類の中のある元を表わすとする。これにより e^{-1} は $Cl(\mathfrak{o}G)$ の endomorphism となる。

$\theta = \sum_{e \in E^{\cdot}} t(e) e^{-1}$ とおくと，（$E^{\cdot} = E - \{0\}$）

（6）　$\langle \mathfrak{F}^{p^2} \rangle = \mathfrak{A}^{\theta}$ と書ける。ここで $\mathfrak{A}$ は $\mathfrak{A}_{\chi} = \langle \mathfrak{F}_{\chi}^{p^2} \rangle$ で他の成分はすべて o とする。

今 $\mathfrak{A} = \prod_{i=1} \mathfrak{A}_i^{i}$ と分解させる。ここで $\mathfrak{A}_i$ は互いに素でかつ square free。このとき容易に

$\mathfrak{M}_{\chi^j} = \prod_i \mathfrak{A}_i^{[j]^{-1}(ij - t(ij)) \cdot \frac{1}{p^2}}$ となる。ここで $t(ij)$ は $0 \leq t(ij) < p^2$ で $t(ij) \equiv ij$（法 p^2）とする。ゆえに

$\mathfrak{M} = \prod_j \prod_i \mathfrak{A}_i^{[j]^{-1}(ij - t(ij)) \cdot \frac{1}{p^2}}$

今 $(i, p) = 1$ なら，$\sum_j [j]^{-1}(ij - t(ij)) \frac{1}{p^2} = p^{-2}(\theta(i - [i]))$

$i = i_0 p$ なら，$\sum_j [j]^{-1}(i_0 p j - t(i_0 p j)) \frac{1}{p^2}$

$= \frac{1}{p^2}(p i_0 \theta - p\, \theta_0 [i_0]) = \frac{1}{p}(\theta i_0 - \theta_0 [i_0])$

ここで $\theta_0 = \sum_{e \in E} t_0(e) e^{-1}$　$t_0(e) \equiv t(e)$，$0 \leq t_0(e) < p$ とする。

ゆえに，$\mathcal{J} = \langle \mathbb{Z} E^{-1} \cap \frac{1}{p^2} \theta \mathbb{Z} C,\ \frac{1}{p}(\theta - \theta_0) \mathbb{Z} C \rangle$ とおくと，$[\mathfrak{M}] \in Cl_1(oG)^{\mathcal{J}}$。ここで

$Cl_1(oG) = \mathrm{Kernel}(Cl(oG) \to Cl(oG/\Sigma(G)))$。

「定理」　　$R(oG) = Cl_1(oG)^{\mathcal{J}}$

逆の包含関係は逆にたどり McCullor と同じように

して求まる。　Kは1の原始p^2乗根を含んでいるので，
ΩGの一つの単純成分で話しを進めて，uを構成したように
すると resolvend が求まる。

参照

L.R. McCulloh，　Galois module structure of elementary abelian extensions，　J. Algebra 82，(1983) 102-134.

M. Taylor，　On Fröhlich's conjecture for rings of integers of tame extensions，Invent. Math. 63 (1981)，41-79