数理解析研究所講究録
第 551 巻 1985 年 62-86

特異点の標準型と不変式について

早大・理工・数学　高橋　正　(Tadashi Takahashi)

ＳＬ（２，$\mathbb{C}$）の有限部分群 Γ を１つ選ぶと、Γ は $\mathbb{C}^2$ に作用する。この作用によって得られる $\mathbb{C}^2$ の商多様体　$M=\mathbb{C}^2/\Gamma$　は、原点でのみ特異点を持つ代数多様体となる。　Γ－不変な多項式の環は３つの生成元を持ち、その生成元たちの間の関係式はＣ^3 における曲面（商多様体　M）の定義方定式となる。　この曲面の原点に現れる特異点が有理二重点である。　具体的な関係は、F.Klein の頃から知られている。

一方、凸多面体において、プラトンの正多面体に近い条件を持つものとして、準正多面体がある。　この準正多面体を自分自身に重ねる変換群は、プラトンの正多面体のそれに一致する。　従って、$\mathbb{C}^2$ を準正多面体の変換群で割ったものは、原点に有理二重点を持つ超曲面になる。　それはどのようにして得られ、また正多面体の場合に現れた美しい対称性と双対性は、どのように現れるのだろうか。　このことを数式処理を用いて考えてみよう。

§１．準備

１．１　有理二重点

まず、特異点の定義から始めよう。

定義（１．１．１）

$D\subset\mathbb{C}^n$ を領域、$A\subset D$　を解析的集合とするとき、点 a ϵ Aが通常点であるとは、aの近傍　$U\cap D$　と、U　上の正則関数　f_1，・・・・，f_{n-k} が存在して、次が成り立つことである。

（１）　$A\cap U=\{z\,\epsilon\,U:\ f_1(z)=\cdots\cdots=f_{n-k}(z)\}=0$

（２）　$\mathrm{rank}\,(\partial f_i/\partial z_j(a))=n-k$

$(i=1,\cdots,n-k,\quad j=1,\cdots,n)$

このとき、点ａが特異点であるとは、ａが通常点でないことである。

例（1．1．2）

$f_1(z_1, z_2, z_3) = z_3^2 - z_1 z_2 \qquad A_1 = \{ z \in \mathbb{C}^3 : f_1(z) = 0 \}$

とおくと、このとき

$(\partial f_1 / \partial z_1, \partial f_1 / \partial z_2, \partial f_1 / \partial z_3) = (-z_2, -z_1, 2z_3)$

ゆえに、0＝（0，0，0）のみが特異点である。

（〔9〕を参照　）

定義（1．1．3）　（〔1〕を参照　）

Xを多様体とし、$x \in X$をその特異点とすると、多様体X上のリー群Gの作用におけるxの modality mとは、xの十分小さな近傍が、有限個のmパラメータ族たちの軌道によって覆われる最小数である。

このときxが単純であるとは、m＝0のことである。

Arnold〔2〕により、m＝0の特異点は、次の5種類の定義方定式で定められる超曲面の原点に現れる。

$A_k: \quad x^{k+1} + y^2 + z^2 + Q = 0 \qquad (k \geq 1)$

$D_k: \quad x^2 y + y^{k+1} + z^2 + Q = 0 \qquad (k \geq 4)$

$E_6: \quad x^3 + y^4 + z^2 + Q = 0$

$E_7: \quad x^3 + x y^3 + z^2 + Q = 0$

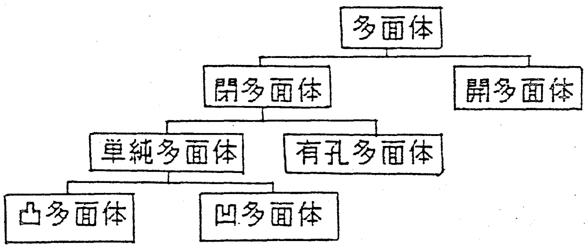
$E_8: \quad x^3 + y^5 + z^2 + Q = 0$

ここで、Qは2次形式である。従って3変数のときはQはいらない。

この単純特異点のことを有理二重点という。　単純特異点が有理二重点と呼ばれる理由及び、特異点の詳しい定義、例などについては、〔8〕と〔9〕を参照されたい。

1．2　準正多面体

多面体は次のように分類される。　（〔6〕を参照　）



このそれぞれの定義は省略するので〔6〕を参照されたい。

そしてさらに凸多面体は、次の９種類に分類される。

1．凸ｎ面体　　2．４面体
3．角錐と角柱　　4．類似角柱
5．正多面体　　6．準正多面体
7．デルタ多面体　　8．ゾーン多面体
9．ジオデシック多面体

これも５，６以外の定義は省略するので、〔6〕を参照されたい。

定義（1．2．1）

合同な凸正ｎ角形が各頂点のまわりにｍ枚ずつ集まっている凸多面体を正多面体という。

２種類以上の凸正ｎ角形が、各頂点のまわりに等しい多面角を作って集まっている凸多面体を準正多面体という。

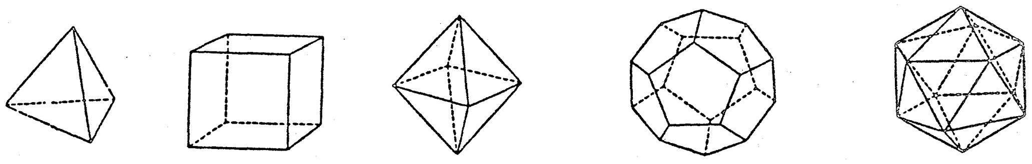


図１．プラトンの正多面体

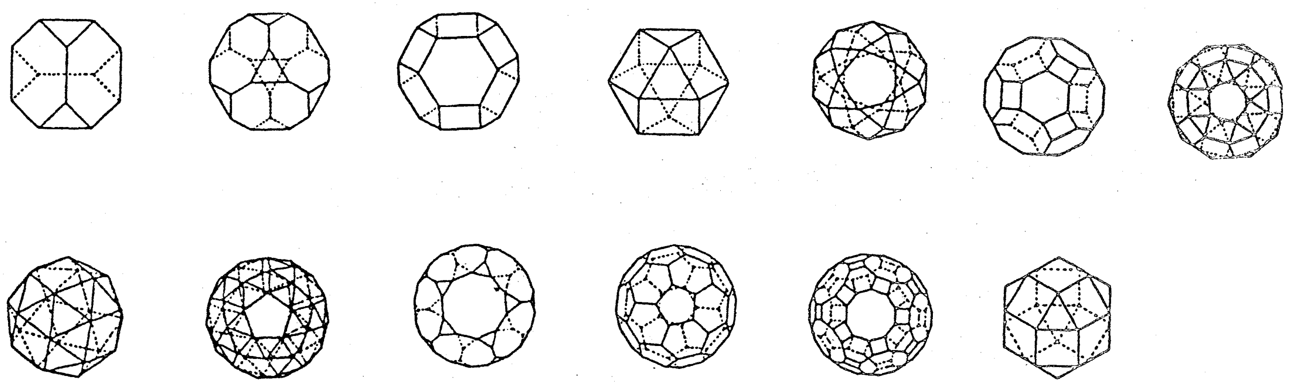


図2．準正多面体

これらの多面体の性質については、〔4〕および〔3〕に詳しく解説されている。

1．3　　正多面体群と双正多面体群

正多面体を３次元ユークリッド空間内に置いて、それぞれの運動による合同変換群を考える。

定理（1．3．1）　　（〔4〕の３章を参照　）

正４面体の合同変換群は、４次交代群であり、

正６面体と正８面体の合同変換群は、４次対称群であり、

正１２面体と正２０面体の合同変換群は、５次交代群である。

正６面体と正８面体、正１２面体と正２０面体は、面と頂点の関係がいわゆる共役であることから、合同変換群は合じになっている。

３次元ユークリッド空間内で、原点を定めそれを固定する運動全体のなす群を３次元回転群といい、ＳＯ（３）と書く。　正則な実３次行列のなす群ＧＬ（３，Ｒ）の部分群として、

$$SO(3)=\{A\in GL(3,R)\mid {}^tAA=E_3,\ \det A=1\}$$

と表される。

定理（1．3．1）における３つの群は、ＳＯ（３）の有限部分群になっている。

このＳＯ（３）の有限部分群は、５種類しかないことが次の定理により知られている。

定理（1．3．2）　（〔5〕を参照 ）

　ＳＯ（３）の有限部分群は必ず次のいずれかに同型である。

C_n ：位数ｎの巡回群，

D_n ：位数２ｎの正２面体群，

T ：正４面体群，

O ：正８面体群，

I ：正２０面体群

　この定理の証明は、〔4〕及び〔7〕を参照されたい。　このC_n ∼ I までを総称して正多面体群という。

π ：ＳＵ（２）→ ＳＯ（３）で、π の核

$\ker \pi = \{g \in SU(2) \mid \pi(g) = E_3\} = \{\pm E_2\}$

なるものがある。

ここで　$SU(2) = \{A$：複素２次正方行列 $\mid {}^t\bar{A}A = E$, $\det A = 1\}$

である。

たとえば、ＳＵ（２）の元は、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \qquad (\ |a|^2 + |b|^2 = 1\ )$$

と書けるから、

$$\pi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2\,\mathrm{Im}\,(ab) & -2\,\mathrm{Re}\,(ab) \\ 2\,\mathrm{Im}\,(a\bar{b}) & \mathrm{Re}\,(a^2 + b^2) & \mathrm{Im}\,(a^2 + b^2) \\ 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{a}b) & \mathrm{Im}\,(b^2 - a^2) & \mathrm{Re}\,(a^2 - b^2) \end{pmatrix}$$

と定義すると、

π は上のような性質を持つ準同型となる。　この π をスピン準同型という。

これによってＳＯ（３）での定理に類似した定理が、ＳＵ（２）においても成り立つ。

定理（1．3．3）　　（〔5〕を参照　）

ＳＵ（2）の自明でない有限部分群は、次のいずれかに共役である。

$\tilde{C}_n$ ：ｎ＋１次の巡回群,

$\tilde{D}_n$ ：双正２面体群　$\cong \pi(D_n)$

$\tilde{T}$ ：双正４面体群　$\cong \pi(T)$

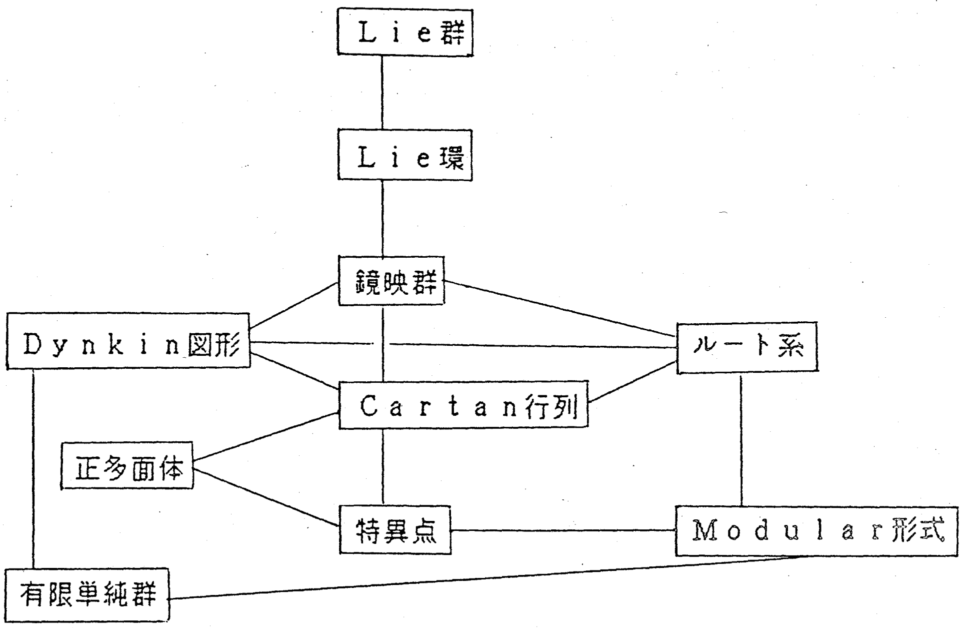
$\tilde{O}$ ：双正８面体群　$\cong \pi(O)$

$\tilde{I}$ ：双正２０面体群 $\cong \pi(I)$

これらを総称して、双正多面体群という。

§2．特異点の標準型と双正多面体群の不変式

特異点の研究は、次の図式のような多くの分野と関連を持っている。



この中で、正多面体と特異点の関係は古くから知られていた。　F.klein 〔5〕により双正多面体群の不変式と特異点の標準型との具体的対応が与えられた。

2．1　双正多面体群の不変式

$\tilde{G}$をSU（2）の有限部分群とすると、Gは行列群として、自然に$\mathbb{C}^2$ に作用する。したがって、それを経由して、$\mathbb{C}^2$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ にも作用する。
そこで、$\tilde{G}$－不変な多項式（絶対不変式）を考えることができる。
そのとき、$\tilde{G}$－不変な多項式の全体 $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\tilde{G}}$ は、$\mathbb{C}[z_1, z_2]$ の部分環をなしている。 定理（1．3．3）により、$\tilde{G}$ は $\tilde{C}_n, \tilde{D}, \tilde{T}, \tilde{O}, \tilde{I}$ のいずれかと同型となる。 正多面体の幾何的構造から $\tilde{G}$－不変式を構成する。 そして、$\mathbb{C}^2$ 上の多項式 $f(u, v)$ に対し、

$$(g \circ f)(u, v) = f(du - bv,\ av - cu)$$

ここで、 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 　$g \in \tilde{G}$

という変換を考える。 このような変換で変わらない多項式のことを$\tilde{G}$－不変式という。

各々の双正多面体群の不変式の構成については、〔5〕に詳しく述べられているので、ここでは一例として、双20面体群 $\tilde{I}$ の不変式の構成を示す。

例（2．1．1）　（〔5〕を参照 ）

図3のようにして、複素座標を正20面体の各頂点に与えると、

$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$とおくとき、

12個の頂点は複素平面上において、

$z = 0,\ \infty,\ \varepsilon^k(\varepsilon + \varepsilon^4),\quad \varepsilon^k(\varepsilon^2 + \varepsilon^3)$

$k = 0, 1, 2, 3, 4$

と表される。

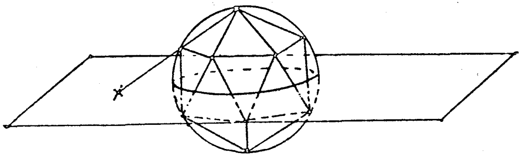


図3．正20面体の立体射影

いま、頂点を解にもつ複素平面上の12次式を f とすると、
f は斉次座標で、

$$f = z_1 z_2 \cdot \prod_{k=0}^{4}(z_1 - \varepsilon^k(\varepsilon + \varepsilon^4) \cdot z_2) \cdot \prod_{l=0}^{4}(z_1 - \varepsilon^l(\varepsilon^2 + \varepsilon^3) \cdot z_2)$$
$$= z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})$$

となる。

f の Hessian を求めると、

$$\begin{vmatrix} \partial^2 f / \partial z_1^2 & \partial^2 f / \partial z_1 \partial z_2 \\ \partial^2 f / \partial z_1 \partial z_2 & \partial^2 f / \partial z_2^2 \end{vmatrix}$$

$$=121\cdot(-z_1^{20}-z_2^{20}+228z_1^{15}z_2^5-228z_1^5z_2^{15}-494z_1^{10}z_2^{10})$$

となる。

ここで、

$$H=-(z_1^{20}+z_2^{20})+228(z_1^{15}z_2^5-z_1^5z_2^{15})-494z_1^{10}z_2^{10}$$

とおくと、　は正20面体の20個の面の重心を解にもつ、複素平面上の20次式である。

そしてさらに f と H の Jacobian を計算すると、

$$\begin{vmatrix} \partial f / \partial z_1 & \partial f / \partial z_2 \\ \partial H / \partial z_1 & \partial H / \partial z_2 \end{vmatrix}$$

$$=20\{(z_1^{30}+z_2^{30})+522(z_1^{25}z_2^5-z_1^5z_2^{25})$$
$$-10005(z_1^{20}z_2^{10}+z_1^{10}z_2^{20})$$

となる。

ここで、

$$T=(z_1^{30}+z_2^{30})+522(z_1^{25}z_2^5-z_1^5z_2^{25})-10005(z_1^{20}z_2^{10}+z_1^{10}z_2^{20})$$

とおくと、

T は、正20面体の30個の辺の中点を解にもつ、複素平面上の30次式である。

以上の計算において、Hessian が面の重心を与え、Jacobian が辺の中点を与えることは、容易にチェックできる。

3次元ユークリッド空間における立体は、頂点、面の重心、辺の中点によって生成される。 よって、幾何的理由により、f, H, T は、$\tilde{I}$ において絶対不変式であり、なおかつ $\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\tilde{I}}$ の生成元である。 (厳密な証明は、〔5〕, 〔7〕を参照)

このとき、基本関係式は次のようになる。

$$T^2 + H^3 - 1728 f^5 = 0$$

この例を数式処理を用いて計算すると、参考資料１のようになる。（参考文献の後ろ）

2．2　特異点の標準型との関係

$\mathbb{C}[z_1, z_2]^{\tilde{G}}$ の生成元たちの基本関係式を標準化すると、それらは単純特異点（有理二重点）の定義式になる。

先の例（2．1．1）に対して、それを行うと次のようになる。

$x := H$

$y := \sqrt[5]{1728} \cdot e^{\pi i/5} \cdot f$

$z := T$

とおくと、基本関係式は

$$x^3 + y^5 + z^2 = 0$$

となる。 これは E_8 型 有理二重点の定義式である。

他の双正多面体群の場合も同様の結果が得られ、いずれも基本関係式を標準化すると、有理二重点の定義式になる。 それぞれの双正多面体群と対応する有理二重点は、次のようになる。

$\tilde{C}_n$ ：n＋１次の巡回群　・・・・・　A_n 型　有理二重点

$\tilde{D}_n$ ：双正２面体群　・・・・・　D_n 型　有理二重点

$\tilde{T}$ ：双正４面体群　・・・・・　E_6 型　有理二重点

$\tilde{O}$ ：双正８面体群　・・・・・　E_7 型　有理二重点

$\tilde{I}$ ：双正２０面体群　・・・・・　E_8 型　有理二重点

§3　準正多面体と不変式

正多面体群から双正多面体群を構成し、その双正多面体群の作用による不変式を計算した方法を、準正多面体に対して考えてみる。

3．1　準正多面体の性質

定義（1．2．1）で定義される準正多面体としては、その変換群が正８面体群になるもっとも規則的なものが１３種類（図2）と、正多角柱、正多角反柱という無限系列、それにミラーの多面体と呼ばれる特別なものがある。　それらはすべて正多面体から導かれる。　そして、すべての頂点が１つの球に内接し、その球の中心が準正多面体の体心となる。　また、すべての稜に接する中接球を持ち、すべての側面に接する内接球はないが、いくつかずつの側面に接する複数個の同心球がある。（〔6〕を参照　）

3．2　準正多面体の双対多面体

準正多面体は球に外接しないので、その双対多面体は各面の中心を結んで構成することはできない。　そこで準正多面体の双対多面体は、次のようにして構成する。

構成法

準正多面体の各頂点において、その外接球に引いた接平面を作り、これらのなす多面体をとる。　（〔4〕を参照　）

このようにして、双対多面体を構成すると、それぞれの準正多面体に正多面体のときと同様に、双対な性質を持つ多面体を定めることができる。　しかし準正多面体のときは、双対多面体の双対がもとの多面体になるとはかぎらない。

3．3　準正多面体による不変式

準正多面体の変換群は正多面体のそれに一致する。　したがって、それから導かれる双多面体群も双正多面体群に一致し、その不変式たちの基本関係式は、標準化することによって、原点において有理二重点を持つ超曲面の定義式になるはずである。

しかし、準正多面体及び双対多面体の性質が正多面体のときと異なるため、準正多面体の変換群による不変式を得るためにはそれらの点に留意しなければならない。

ここではその構成法と特徴を示すために、切頭立方体（ truncated cube ）（図4．以下ＴＣと略す）について考えよう。

まず、正多面体のときと同様にして、ＴＣの双対多面体を単位球に内接させ、（０，０，１）からの立体射影によってＴＣの各頂点を複素平面上に対応させ、それらの点たちを解に持つ多項式を考える。　図4　からわかるように、その頂点はは、２つの立方体の複合体（立方体と正８面体）とみることができる。その立方体の頂点たちを解に持つ多項式を f　とし、
正８面体の頂点たちを解に持つ多項式を h　とすると、

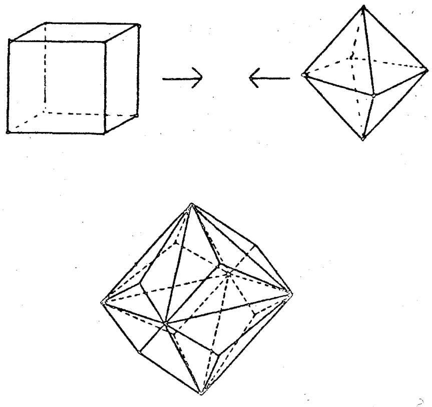


図4．切頭立方体の双対多面体

$$f = z_1^8 - 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8$$
$$h = z_1 z_2 (z_1^4 + z_2^4)$$

となる。

次ぎに、上の双対多面体（切頭立方体　図5）について も、同様の操作を施す。

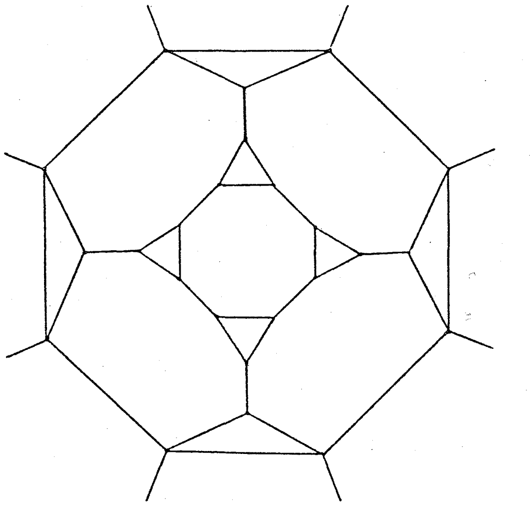


図6．切頭立方体の複素平面上の立体射影図

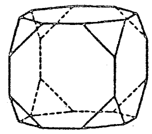


図5．切頭立方体

この頂点たちを解に持つ多項式を Q とすると、Q は次のようになる。

$$Q = z_1^{24} + (64\sqrt{2} - 94) z_1^{20} z_2^4 + (256\sqrt{2} + 383) z_1^{16} z_2^8 + (384\sqrt{2} - 3140) z_1^{12} z_2^{12} + (256\sqrt{2} + 383) z_1^8 z_2^{16} + (64\sqrt{2} - 94) z_1^4 z_2^{20} + z_2^{24}$$

そして、もう一つ、ＴＣの双対多面体の各辺の原点からの内分点を立体射影し、それらの点たちを解に持つ多項式をＲ，Ｓとすると、その多項式は、次のようになる。
（2つとるのは、ｆ，ｈのとき同様2つの正多面体の複合体と考えられるからである。）

$$R = z_1^{12} + 33 z_1^8 z_2^4 - 33 z_1^4 z_2^8 - z_2^{12}$$

$$S = z_1^{24} - (2014800\sqrt{3} + 4598574)/28561 \cdot z_1^{20} z_2^4 - (8059200\sqrt{3} - 3283503)/28561 \circ z_1^{16} z_2^8 - (12088800\sqrt{3} + 101164580)/28561 \circ z_1^{12} z_2^{12} - (8059200\sqrt{3} - 3283503)/28561 \cdot z_1^8 z_2^{16} - (2014800\sqrt{3} + 4598574)/28561 \circ z_1^4 z_2^{20} + z_2^{24}$$

ここで、正多面体のときは、各辺の中点をとったのに対し、この場合は内分点をとるのは、準正多面体とその双対多面体の構成法に由来する。

いま、計算によって次の関係式たちを得る。

$$R^2 = f^3 + 108h^4$$

$$Q = f^3 + c_1 h^4 \qquad (c_1 = 4(16\sqrt{2} - 13))$$

$$S = f^3 - c_2 h^4 \qquad (c_2 = 12(167900\sqrt{3} + 283251)/28561)$$

そして、$f(f^3, h^4)$ を次のように定める。

$$f(f^3, h^4) := ((S \cdot R)^2 - Q^3)/h^4$$

このとき、$f(f^3, h^4)$ は、f^3 と h^4 を変数とする関数である。

ここで、$T := (f(f^3, h^4))^{1/4}$ とおくと、

$$(S \cdot R)^2 = Q^3 + (h \cdot T)^4$$

となる。

$\tilde{O}$ は、$\tilde{T}$ の元に

$$g = \begin{pmatrix} (1+i)/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & (1+i)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

を左から掛けた24個が加わるから、g での変換を考えれば $\tilde{O}$ の不変式がわかる。

$g\cdot(S\cdot R)=-(S\cdot R)$,　$g\cdot Q=Q$,　$g\cdot(h\cdot T)=-(h\cdot T)$

となるから、

$S\cdot R\cdot h\cdot T$,　Q ,　$(h\cdot T)^2$ が、この多項式環の生成元である。

したがって、上の関係式の両辺に $(h\cdot T)^2$ を掛け、

$$(S\cdot R\cdot h\cdot T)^2 = Q^3\cdot(h\cdot T)^2 + (h\cdot T)^6$$

$X := Q$

$Y := (h\cdot T)^2$

$Z := S\cdot R\cdot h\cdot T$

とおくと、

不変式たちの間の基本関係式として、

$$z^2 = x^3 y + y^3$$

をえる。

これは、E_7 型 有理二重点の定義式である。

この計算を、数式処理を用いて、行ったもを参考資料2（参考文献の後ろ）に示す。

参考文献

〔1〕 Arnold, V.I. : Critical points of smooth functions and their normal forms. Russian Math. Surveys (1975) 1-75 .

〔2〕 Arnold, V.I. : Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A ,D ,E ,and Lagrangian singularities. Functional Anal. Appl. 6 (1973) 254-272 .

〔3〕 Coxeter, H.M.S : Regular Polytopes. Dover, (1973) .

〔4〕 一松 信 著：正多面体を解く. 東海大学出版, (1983) .

〔5〕 Klein, F. : Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equation of the Fifty Degree, Dover (1956) (Original : Teubner, Leipzig, 1884) .

〔6〕 前川 道郎, 宮崎 興二 著：図形と投象 , 朝倉書店.

〔7〕 岩堀 長慶 著：合同変換群の話 , 現代数学社.

〔8〕 樋口 禎一, 吉永 悦男, 渡辺 公夫 著：多変数複素解析学入門 . 森北出版, (1980) .

〔9〕 樋口 禎一, 瀧島 都夫, 泉池 敬司, 渡辺 公夫 著：多変数複素解析 . 倍風館, (1984) .

参考資料 1

Program list

```
LET A**5=1;
A**4:=-(A**3+A**2+A+1);
J0:=Z1-(A+A**4)*Z2;
J1:=Z1-A*(A+A**4)*Z2;
J2:=Z1-A**2*(A+A**4)*Z2;
J3:=Z1-A**3*(A+A**4)*Z2;
J4:=Z1-A**4*(A+A**4)*Z2;
K0:=Z1-(A**2+A**3)*Z2;
K1:=Z1-A*(A**2+A**3)*Z2;
K2:=Z1-A**2*(A**2+A**3)*Z2;
K3:=Z1-A**3*(A**2+A**3)*Z2;
K4:=Z1-A**4*(A**2+A**3)*Z2;
F:=Z1*Z2*J0*J1*J2*J3*J4*K0*K1*K2*K3*K4;
CLEAR J0,J1,J2,J3,J4,K0,K1,K2,K3,K4;
MATRIX M1(2,2),M2(2,2);
A11:=DF(F,Z1,2);
A12:=DF(F,Z1,Z2);
A21:=DF(F,Z2,Z1);
A22:=DF(F,Z2,2);
M1:=MAT((A11,A12),(A21,A22));
DET(M1);
CLEAR A11,A12,A21,A22;
H:=(DET(M1))/(121);
CLEAR M1;
A11:=DF(F,Z1);
A12:=DF(F,Z2);
A21:=DF(H,Z1);
A22:=DF(H,Z2);
M2:=MAT((A11,A12),(A21,A22));
DET(M2);
CLEAR A11,A12,A21,A22;
J:=(DET(M2))/(20);
J**2+H**3-1728*F**5;
X:=J;
Y:=H;
Z:=(-1728)**(1/5)*F;
X**2+Y**3+Z**5;
END;
```

JOB

```
LET A**5=1;

A**4:=-(A**3+A**2+A+1);

 4          3    2
A   :=  - (A  + A   + A + 1)

J0:=Z1-(A+A**4)*Z2;

      3       2
J0 := A *Z2 + A *Z2 + Z1 + Z2

J1:=Z1-A*(A+A**4)*Z2;

           2
J1 :=  - A *Z2 + Z1 - Z2

J2:=Z1-A**2*(A+A**4)*Z2;

           3
J2 :=  - A *Z2 - A*Z2 + Z1

J3:=Z1-A**3*(A+A**4)*Z2;

      3
J3 := A *Z2 + A*Z2 + Z1 + Z2

J4:=Z1-A**4*(A+A**4)*Z2;

           3
J4 :=  - A *Z2 + Z1 - Z2
```

```
K0:=Z1-(A**2+A**3)*Z2;

              3       2
K0  :=   - A *Z2 - A *Z2 + Z1

K1:=Z1-A*(A**2+A**3)*Z2;

         2
K1  := A *Z2 + A*Z2 + Z1 + Z2

K2:=Z1-A**2*(A**2+A**3)*Z2;

         3       2
K2  := A *Z2 + A *Z2 + A*Z2 + Z1

K3:=Z1-A**3*(A**2+A**3)*Z2;

K3  :=   - A*Z2 + Z1 - Z2

K4:=Z1-A**4*(A**2+A**3)*Z2;


            2
K4  :=   - A *Z2 - A*Z2 + Z1

F:=Z1*Z2*J0*J1*J2*J3*J4*K0*K1*K2*K3*K4;

                 10        5   5      10
F := Z1*Z2*(Z1     + 11*Z1 *Z2  - Z2   )

CLEAR J0,J1,J2,J3,J4,K0,K1,K2,K3,K4;

MATRIX M1(2,2),M2(2,2);

A11:=DF(F,Z1,2);

               4       5       5
A11  := 110*Z1 *Z2*(Z1  + 3*Z2 )

A12:=DF(F,Z1,Z2);

               10        5   5      10
A12  := 11*(Z1    + 36*Z1 *Z2  - Z2   )

A21:=DF(F,Z2,Z1);

               10        5   5      10
A21  := 11*(Z1    + 36*Z1 *Z2  - Z2   )

A22:=DF(F,Z2,2);

                  4      5       5
A22  := 110*Z1*Z2 *(3*Z1  - Z2 )

M1:=MAT((A11,A12),(A21,A22));

                   4       5       5
M1(1,1)  := 110*Z1 *Z2*(Z1  + 3*Z2 )

                   10        5   5      10
M1(1,2)  := 11*(Z1    + 36*Z1 *Z2  - Z2   )

                   10        5   5      10
M1(2,1)  := 11*(Z1    + 36*Z1 *Z2  - Z2   )

                      4      5       5
M1(2,2)  := 110*Z1*Z2 *(3*Z1  - Z2 )

DET(M1);

          20          15   5          10   10          5   15       20
121*( - Z1   + 228*Z1  *Z2  - 494*Z1  *Z2    - 228*Z1 *Z2    - Z2   )

CLEAR A11,A12,A21,A22;

H:=(DET(M1))/(121);

          20          15   5          10   10          5   15       20
H :=   - Z1   + 228*Z1  *Z2  - 494*Z1  *Z2    - 228*Z1 *Z2    - Z2
```

```
CLEAR M1;

A11:=DF(F,Z1);

                   10         5   5      10
A11 := Z2*(11*Z1     + 66*Z1 *Z2  - Z2  )

A12:=DF(F,Z2);

               10         5   5          10
A12 := Z1*(Z1     + 66*Z1 *Z2  - 11*Z2  )

A21:=DF(H,Z1);

               4        15           10   5           5   10          15
A21 := 20*Z1 *( - Z1    + 171*Z1   *Z2  - 247*Z1 *Z2    - 57*Z2   )

A22:=DF(H,Z2);

               4        15           10   5           5   10      15
A22 := 20*Z2 *(57*Z1    - 247*Z1   *Z2  - 171*Z1 *Z2    - Z2   )

M2:=MAT((A11,A12),(A21,A22));

                      10         5   5      10
M2(1,1) := Z2*(11*Z1     + 66*Z1 *Z2  - Z2  )

                  10         5   5          10
M2(1,2) := Z1*(Z1     + 66*Z1 *Z2  - 11*Z2  )

                  4        15           10   5           5   10          15
M2(2,1) := 20*Z1 *( - Z1    + 171*Z1   *Z2  - 247*Z1 *Z2    - 57*Z2   )

                  4        15           10   5           5   10      15
M2(2,2) := 20*Z2 *(57*Z1    - 247*Z1   *Z2  - 171*Z1 *Z2    - Z2   )

DET(M2);

      30          25   5             20   10             10   20             5   25      30
20*(Z1    + 522*Z1   *Z2   - 10005*Z1   *Z2    - 10005*Z1   *Z2    - 522*Z1 *Z2    + Z2   )

CLEAR A11,A12,A21,A22;

J:=(DET(M2))/(20);

        30          25   5             20   10             10   20             5   25      30
J := Z1    + 522*Z1   *Z2   - 10005*Z1   *Z2    - 10005*Z1   *Z2    - 522*Z1 *Z2    + Z2

J**2+H**3-1728*F**5;

0

X:=J;

        30          25   5             20   10             10   20             5   25      30
X := Z1    + 522*Z1   *Z2   - 10005*Z1   *Z2    - 10005*Z1   *Z2    - 522*Z1 *Z2    + Z2

Y:=H;

          20          15   5           10   10           5   15      20
Y :=  - Z1    + 228*Z1   *Z2   - 494*Z1   *Z2    - 228*Z1 *Z2    - Z2

Z:=(-1728)**(1/5)*F;

              (1/5)              10         5   5      10
Z := ( - 1728)      *Z1*Z2*(Z1     + 11*Z1 *Z2   - Z2   )

X**2+Y**3+Z**5;

0

END;
```

Program list

```
A2:=2**(1/2);
A3:=3**(1/2);
B2:=(1/A2)+(1/A2)*I;
LET B1**2=B2;
LET B3=B2**2;
V1X:=1;
V1Y:=1;
V1Z:=1;
V2X:=1;
V2Y:=1;
V2Z:=-1;
L:=3**(1/2);
V1XU:=V1X/L;
V1YU:=V1Y/L;
V1ZU:=V1Z/L;
V2XU:=V2X/L;
V2YU:=V2Y/L;
V2ZU:=V2Z/L;
CLEAR L;
CLEAR V1X,V1Y,V1Z,V2X,V2Y,V2Z;
C:=V1ZU-1;
PV1X:=V1XU*(-1)*(1/C);
PV1Y:=V1YU*(-1)*(1/C);
CLEAR V1XU,V1YU,V1ZU,C;
C:=V2ZU-1;
PV2X:=V2XU*(-1)*(1/C);
PV2Y:=V2YU*(-1)*(1/C);
CLEAR V2XU,V2YU,V2ZU,C;
L1:=((PV1X)**2+(PV1Y)**2)**(1/2);
L2:=((PV2X)**2+(PV2Y)**2)**(1/2);
CLEAR PV1X,PV1Y,PV2X,PV2Y;
S1:=L1;
S2:=S1*B3;
S3:=S2*B3;
S4:=S3*B3;
T1:=L2;
T2:=T1*B3;
T3:=T2*B3;
T4:=T3*B3;
CLEAR L1,L2;
F1:=(Z1-S1*Z2)*(Z1-S2*Z2)*(Z1-S3*Z2)*(Z1-S4*Z2);
F2:=(Z1-T1*Z2)*(Z1-T2*Z2)*(Z1-T3*Z2)*(Z1-T4*Z2);
CLEAR S1,S2,S3,S4,T1,T2,T3,T4;
P:=F1*F2;
CLEAR F1,F2;
S1:=1*B2;
S2:=I*B2;
S3:=(-1)*B2;
S4:=(-I)*B2;
F1:=(Z1-S1*Z2)*(Z1-S2*Z2)*(Z1-S3*Z2)*(Z1-S4*Z2);
CLEAR S1,S2,S3,S4;
Q:=Z1*Z2*F1;
CLEAR F1;
R:=B2+B2**7;
V2X:=1+R;
V2Y:=1;
V2Z:=1+R;
V3X:=1+R;
V3Y:=1+R;
V3Z:=1;
V5X:=1+R;
V5Y:=1;
V5Z:=-1-R;
V6X:=1+R;
V6Y:=1+R;
V6Z:=-1;
L:=(1+2*(1+R)**2)**(1/2);
CLEAR R;
V2XU:=V2X/L;
V2YU:=V2Y/L;
V2ZU:=V2Z/L;
V3XU:=V3X/L;
V3YU:=V3Y/L;
V3ZU:=V3Z/L;
V5XU:=V5X/L;
V5YU:=V5Y/L;
V5ZU:=V5Z/L;
V6XU:=V6X/L;
V6YU:=V6Y/L;
V6ZU:=V6Z/L;
CLEAR V2X,V2Y,V2Z,V3X,V3Y,V3Z,V5X,V5Y,V5Z,V6X,V6Y,V6Z;
CLEAR L;
```

```
C:=V2ZU-1;
PV2X:=V2XU*(-1)*(1/C);
PV2Y:=V2YU*(-1)*(1/C);
CLEAR C;
C:=V3ZU-1;
PV3X:=V3XU*(-1)*(1/C);
PV3Y:=V3YU*(-1)*(1/C);
CLEAR C;
C:=V5ZU-1;
PV5X:=V5XU*(-1)*(1/C);
PV5Y:=V5YU*(-1)*(1/C);
CLEAR C;
C:=V6ZU-1;
PV6X:=V6XU*(-1)*(1/C);
PV6Y:=V6YU*(-1)*(1/C);
CLEAR C;
CLEAR V2XU,V2YU,V2ZU,V3XU,V3YU,V3ZU;
CLEAR V5XU,V5YU,V5ZU,V6XU,V6YU,V6ZU;
L1:=((PV2X)**2+(PV2Y)**2)**(1/2);
L2:=((PV3X)**2+(PV3Y)**2)**(1/2);
L3:=((PV5X)**2+(PV5Y)**2)**(1/2);
L4:=((PV6X)**2+(PV6Y)**2)**(1/2);
CLEAR PV2X,PV2Y,PV3X,PV3Y,PV5X,PV5Y,PV6X,PV6Y;
S1:=L1*B1;
S2:=S1*B2;
S3:=S2*B2;
S4:=S3*B2;
S5:=S4*B2;
S6:=S5*B2;
S7:=S6*B2;
S8:=S7*B2;
T1:=L2;
T2:=T1*B3;
T3:=T2*B3;
T4:=T3*B3;
J1:=L3*B1;
J2:=J1*B2;
J3:=J2*B2;
J4:=J3*B2;
J5:=J4*B2;
J6:=J5*B2;
J7:=J6*B2;
J8:=J7*B2;
K1:=L4;
K2:=K1*B3;
K3:=K2*B3;
K4:=K3*B3;
CLEAR L1,L2,L3,L4;
F1:=(Z1-S1*Z2)*(Z1-S2*Z2)*(Z1-S3*Z2)*(Z1-S4*Z2)*(Z1-S5*Z2)*(Z1-S6*
Z2)*(Z1-S7*Z2)*(Z1-S8*Z2);
F2:=(Z1-T1*Z2)*(Z1-T2*Z2)*(Z1-T3*Z2)*(Z1-T4*Z2);
F3:=(Z1-J1*Z2)*(Z1-J2*Z2)*(Z1-J3*Z2)*(Z1-J4*Z2)*(Z1-J5*Z2)*(Z1-J6*
Z2)*(Z1-J7*Z2)*(Z1-J8*Z2);
F4:=(Z1-K1*Z2)*(Z1-K2*Z2)*(Z1-K3*Z2)*(Z1-K4*Z2);
CLEAR S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8;
CLEAR T1,T2,T3,T4,K1,K2,K3,K4;
CLEAR J1,J2,J3,J4,J5,J6,J7,J8;
F5:=F1*F2;
CLEAR F1,F2;
F6:=F3*F4;
CLEAR F3,F4;
F:=F5*F6;
CLEAR F5,F6;
C1:=835002744095575440;
C2:=1180872205318713601;
C3:=C1*A2-C2;
CLEAR C1,C2;
F7:=F*(1/(C3));
GP:=F7*C3;
CLEAR F7,C3;
V1X:=0;
V1Y:=0;
V1Z:=1;
V2X:=1;
V2Y:=0;
V2Z:=0;
V3X:=0;
V3Y:=0;
V3Z:=-1;
V4X:=0;
V4Y:=1;
V4Z:=0;
V12MX:=(V1X+V2X)/2;
V12MY:=(V1Y+V2Y)/2;
V12MZ:=(V1Z+V2Z)/2;
V23MX:=(V2X+V3X)/2;
V23MY:=(V2Y+V3Y)/2;
V23MZ:=(V2Z+V3Z)/2;
V24MX:=(V2X+V4X)/2;
V24MY:=(V2Y+V4Y)/2;
V24MZ:=(V2Z+V4Z)/2;
CLEAR V1X,V1Y,V1Z,V2X,V2Y,V2Z,V3X,V3Y,V3Z,V4X,V4Y,V4Z;
```

```
L1:=((V12MX)**2+(V12MY)**2+(V12MZ)**2)**(1/2);
L2:=((V23MX)**2+(V23MY)**2+(V23MZ)**2)**(1/2);
L3:=((V24MX)**2+(V24MY)**2+(V24MZ)**2)**(1/2);
G1:=V12MX/L1;
G2:=V12MY/L1;
G3:=V12MZ/L1;
G4:=V23MX/L2;
G5:=V23MY/L2;
G6:=V23MZ/L2;
G7:=V24MX/L3;
G8:=V24MY/L3;
G9:=V24MZ/L3;
CLEAR V12MX,V12MY,V12MZ,V23MX,V23MY,V23MZ,V24MX,V24MY,V24MZ;
CLEAR L1,L2,L3;
H1:=G1*(-1)*(1/(G3-1));
H2:=G2*(-1)*(1/(G3-1));
H3:=G4*(-1)*(1/(G6-1));
H4:=G5*(-1)*(1/(G6-1));
H5:=G7*(-1)*(1/(G9-1));
H6:=G8*(-1)*(1/(G9-1));
CLEAR G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,G9;
L4:=(H1**2+H2**2)**(1/2);
L5:=(H3**2+H4**2)**(1/2);
L6:=(H5**2+H6**2)**(1/2);
CLEAR H1,H2,H3,H4,H5,H6;
S1:=L4*B2;
S2:=S1*B3;
S3:=S2*B3;
S4:=S3*B3;
T1:=L5*B2;
T2:=T1*B3;
T3:=T2*B3;
T4:=T3*B3;
U1:=L6*B3;
U2:=U1*B3;
U3:=U2*B3;
U4:=U3*B3;
CLEAR L4,L5,L6;
F1:=(Z1-S1*Z2)*(Z1-S2*Z2)*(Z1-S3*Z2)*(Z1-S4*Z2);
F2:=(Z1-T1*Z2)*(Z1-T2*Z2)*(Z1-T3*Z2)*(Z1-T4*Z2);
F3:=(Z1-U1*Z2)*(Z1-U2*Z2)*(Z1-U3*Z2)*(Z1-U4*Z2);
CLEAR S1,S2,S3,S4,T1,T2,T3,T4,U1,U2,U3,U4;
R:=F1*F2*F3;;
CLEAR F1,F2,F3;
P1:=1/2;
P2:=(A3+1)/2;
V14MX:=P1;
V14MY:=P1;
V14MZ:=P2;
V24MX:=P2;
V24MY:=P1;
V24MZ:=P1;
V34MX:=P1;
V34MY:=P2;
V34MZ:=P1;
V15MX:=P2;
V15MY:=P1;
V15MZ:=-P1;
V25MX:=P1;
V25MY:=P2;
V25MZ:=-P1;
V56MX:=P1;
V56MY:=P1;
V56MZ:=-P2;
L1:=((V14MX)**2+(V14MY)**2+(V14MZ)**2)**(1/2);
L2:=((V24MX)**2+(V24MY)**2+(V24MZ)**2)**(1/2);
L3:=((V34MX)**2+(V34MY)**2+(V34MZ)**2)**(1/2);
L4:=((V15MX)**2+(V15MY)**2+(V15MZ)**2)**(1/2);
L5:=((V25MX)**2+(V25MY)**2+(V25MZ)**2)**(1/2);
L6:=((V56MX)**2+(V56MY)**2+(V56MZ)**2)**(1/2);
G1XU:=V14MX/L1;
G1YU:=V14MY/L1;
G1ZU:=V14MZ/L1;
G2XU:=V24MX/L2;
G2YU:=V24MY/L2;
G2ZU:=V24MZ/L2;
G3XU:=V34MX/L3;
G3YU:=V34MY/L3;
G3ZU:=V34MZ/L3;
G4XU:=V15MX/L4;
G4YU:=V15MY/L4;
G4ZU:=V15MZ/L4;
G5XU:=V25MX/L5;
G5YU:=V25MY/L5;
G5ZU:=V25MZ/L5;
G6XU:=V56MX/L6;
G6YU:=V56MY/L6;
G6ZU:=V56MZ/L6;
CLEAR V14MX,V14MY,V14MZ,V24MX,V24MY,V24MZ,V34MX,V34MY,V34MZ;
CLEAR V15MX,V15MY,V15MZ,V25MX,V25MY,V25MZ,V56MX,V56MY,V56MZ;
CLEAR L1,L2,L3,L4,L5,L6;
```

```
PV1X:=G1XU*(-1)*(1/(G1ZU-1));
PV1Y:=G1YU*(-1)*(1/(G1ZU-1));
PV2X:=G2XU*(-1)*(1/(G2ZU-1));
PV2Y:=G2YU*(-1)*(1/(G2ZU-1));
PV3X:=G3XU*(-1)*(1/(G3ZU-1));
PV3Y:=G3YU*(-1)*(1/(G3ZU-1));
PV4X:=G4XU*(-1)*(1/(G4ZU-1));
PV4Y:=G4YU*(-1)*(1/(G4ZU-1));
PV5X:=G5XU*(-1)*(1/(G5ZU-1));
PV5Y:=G5YU*(-1)*(1/(G5ZU-1));
PV6X:=G6XU*(-1)*(1/(G6ZU-1));
PV6Y:=G6YU*(-1)*(1/(G6ZU-1));
CLEAR G1XU,G1YU,G1ZU,G2XU,G2YU,G2ZU,G3XU,G3YU,G3ZU;
CLEAR G4XU,G4YU,G4ZU,G5XU,G5YU,G5ZU,G6XU,G6YU,G6ZU;
S1:=((PV1X)+(PV1Y)*I)*B2;
S2:=S1*B3;
S3:=S2*B3;
S4:=S3*B3;
T1:=((PV2X)+(PV2Y)*I)*B2;
T2:=T1*B3;
T3:=T2*B3;
T4:=T3*B3;
U1:=((PV3X)+(PV3Y)*I)*B2;
U2:=U1*B3;
U3:=U2*B3;
U4:=U3*B3;
J1:=((PV4X)+(PV4Y)*I)*B2;
J2:=J1*B3;
J3:=J2*B3;
J4:=J3*B3;
K1:=((PV5X)+(PV5Y)*I)*B2;
K2:=K1*B3;
K3:=K2*B3;
K4:=K3*B3;
N1:=((PV6X)+(PV6Y)*I)*B2;
N2:=N1*B3;
N3:=N2*B3;
N4:=N3*B3;
CLEAR PV1X,PV1Y,PV2X,PV2Y,PV3X,PV3Y,PV4X,PV4Y,PV5X,PV5Y,PV6X,PV6Y;
CLEAR L1,L2,L3,L4,L5,L6;
F1:=(Z1-S1*Z2)*(Z1-S2*Z2)*(Z1-S3*Z2)*(Z1-S4*Z2);
F2:=(Z1-T1*Z2)*(Z1-T2*Z2)*(Z1-T3*Z2)*(Z1-T4*Z2);
F3:=(Z1-U1*Z2)*(Z1-U2*Z2)*(Z1-U3*Z2)*(Z1-U4*Z2);
F4:=(Z1-J1*Z2)*(Z1-J2*Z2)*(Z1-J3*Z2)*(Z1-J4*Z2);
F5:=(Z1-K1*Z2)*(Z1-K2*Z2)*(Z1-K3*Z2)*(Z1-K4*Z2);
F6:=(Z1-N1*Z2)*(Z1-N2*Z2)*(Z1-N3*Z2)*(Z1-N4*Z2);
CLEAR S1,S2,S3,S4,T1,T2,T3,T4,U1,U2,U3,U4;
CLEAR J1,J2,J3,J4,K1,K2,K3,K4,N1,N2,N3,N4;
F10:=F1*F2*F3;
CLEAR F1,F2,F3;
F20:=F4*F5*F6;
CLEAR F4,F5,F6;
F30:=F10*F20;
CLEAR F10,F11;
C1:=7604240;
C2:=13170961;
C3:=C1*A3-C2;
CLEAR C1,C2;
F31:=F30*(1/C3);
CLEAR F30;
S:=F31*C3;
CLEAR F31,C3;
R**2-P**3-108*Q**4;
C1:=12*((167900*A3)/28561);
C2:=12*(283251/28561);
C3:=C1+C2;
CLEAR C1,C2;
S-P**3+C3*Q**4;
CLEAR C3;
C1:=4*(16*A2-13);
GP-P**3-C1*Q**4;
CLEAR P1;
R2:=P1**3+108*Q1**4;
S1:=P1**3-C5*Q1**4;
G2:=P1**3+C6*Q1**4;
T1:=((S1**2)*R2-(G2)**3)/(Q1**4);
T2:=T1**(1/4);
(S1**2)*R2-(G2)**3-(Q1*T2)**4;
(S1**2)*R2*(Q1*T2)**2-(G2)**3*(Q1*T2)**2-(Q1*T2)**6;
X:=G2;
Y:=(Q1*T2)**2;
Z:=S1*(R2)**(1/2)*(Q1*T2);
Z**2-X**3*Y-Y**3;
END;
```

)B

⋮

*F2;

$$Z1^{8} - 14*Z1^{4}*Z2^{4} + Z2^{8}$$

⋮

1*Z2*F1;

$$: Z1*Z2*(Z1^{4} + Z2^{4})$$

⋮

C3;

$$1^{24} + 64*2^{(1/2)}*Z1^{20}*Z2^{4} - 94*Z1^{20}*Z2^{4} + 256*2^{(1/2)}*Z1^{16}*Z2^{8} + 383*Z1^{16}*Z2^{8} + 384*2^{(1/2)}*Z1^{12}*Z2^{12}$$

$$140*Z1^{12}*Z2^{12} + 256*2^{(1/2)}*Z1^{8}*Z2^{16} + 383*Z1^{8}*Z2^{16} + 64*2^{(1/2)}*Z1^{4}*Z2^{20} - 94*Z1^{4}*Z2^{20} + Z2^{24}$$

⋮

F1*F2*F3;

$$= Z1^{12} + 33*Z1^{8}*Z2^{4} - 33*Z1^{4}*Z2^{8} - Z2^{12}$$

⋮

```
S:=F31*C3;

                 24                (1/2)   20   4                20   4               (1/2)  16   8
S := (28561*Z1     - 2014800*3          *Z1   *Z2  - 4598574*Z1   *Z2  - 8059200*3        *Z1   *Z2  + 3283503*Z1

              (1/2)   12   12                   12   12                (1/2)  8   16                8  16
 - 12088800*3     *Z1   *Z2   - 101164580*Z1   *Z2   - 8059200*3        *Z1 *Z2   + 3283503*Z1 *Z2

             (1/2)  4   20                4   20                24
 - 2014800*3      *Z1 *Z2   - 4598574*Z1 *Z2   + 28561*Z2   )/28561


CLEAR F31,C3;

R**2-P**3-108*Q**4;

0

C1:=12*((167900*A3)/28561);

                    (1/2)
C1 := (2014800*3       )/28561

C2:=12*(283251/28561);

C2 := 3399012/28561

C3:=C1+C2;

                          (1/2)
C3 := (12*(167900*3           + 283251))/28561

CLEAR C1,C2;

S-P**3+C3*Q**4;

0

CLEAR C3;

C1:=4*(16*A2-13);

                (1/2)
 C1 := 4*(16*2       - 13)

 GP-P**3-C1*Q**4;

 0

R2:=P1**3+108*Q1**4;

        3        4
R2 := P1  + 108*Q1

S1:=P1**3-C5*Q1**4;

              4     3
S1 :=  - C5*Q1  + P1

G2:=P1**3+C6*Q1**4;

           4     3
G2 := C6*Q1  + P1

T1:=((S1**2)*R2-(G2)**3)/(Q1**4);

        2   3   4          2   8          6             3   4      3   8        2   3   4         6         6
T1 := C5 *P1 *Q1  + 108*C5 *Q1  - 2*C5*P1  - 216*C5*P1 *Q1  - C6 *Q1  - 3*C6 *P1 *Q1  - 3*C6*P1  + 108*P1

T2:=T1**(1/4);

         2   3   4          2   8          6             3   4      3   8        2   3   4         6         6
T2 := (C5 *P1 *Q1  + 108*C5 *Q1  - 2*C5*P1  - 216*C5*P1 *Q1  - C6 *Q1  - 3*C6 *P1 *Q1  - 3*C6*P1  + 108*P1 )

(S1**2)*R2-(G2)**3-(Q1*T2)**4;

0

(S1**2)*R2*(Q1*T2)**2-(G2)**3*(Q1*T2)**2-(Q1*T2)**6;

0
```

```
 4       3
1   + P1

)**2;

   3    4             2    8             6                3    4      3    8        2    3    4             6          6 (1/2)    2
*P1 *Q1   + 108*C5 *Q1   - 2*C5*P1   - 216*C5*P1 *Q1   - C6 *Q1   - 3*C6 *P1 *Q1   - 3*C6*P1   + 108*P1 )       *Q1

)**(1/2)*(Q1*T2);

   3    4             2    8             6                3    4      3    8        2    3    4             6          6 (1/4)     3
*P1 *Q1   + 108*C5 *Q1   - 2*C5*P1   - 216*C5*P1 *Q1   - C6 *Q1   - 3*C6 *P1 *Q1   - 3*C6*P1   + 108*P1 )       *(P1   +

      4 (1/2)          4     3
)8*Q1 )       *Q1*( - C5*Q1   + P1 )


*Y-Y**3;


ND;
```