

高次陽的ルンゲ・クッタ法の解の安定性について

山梨大工 田中正次 (Masatogu Tanaka) 山下茂 (Shigeo Yamasita)

山下忠志 (Tadao Yamasita) 三村和正 (Kazumasa Mimura)

1. まえがき <sup>1), 2), 3)</sup>

いま常微分方程式の初期値問題  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$  (1)

が与えられ,  $f(x, y)$  は十分滑らかとする。そのとき

$$k_i = hf(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} k_j) \quad a_i = b_{i0} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m c_i k_i \quad h_n = x_{n+1} - x_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

を,  $m$  段高次陽的ルンゲ・クッタ法という。ここで  $y_n, y(x)$  は, それぞれ初期値問題(1)の  $x = x_n$  における数値解及び理論解を示す。  $y_n = y(x_n)$  である場合の(2)の右辺の  $x = x_n$  に関するテイラー展開が, 解  $y(x_n + h_n)$  の  $x = x_n$  に関するテイラー展開と  $h_n^m$  の項まで正確に一致するとき, 方法(2)の次数は  $m$  次であるという。

一般に段数と到達可能な次数との間には, 表1に示すような関係があることが知られている<sup>1)</sup>。10段法が8次の精度をもち得るかどうかは未だ知られていない。

表1 陽的ルニゲ・クツタ法の段数と次数の関係

段数 $m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
到達可能な次数 $n$	1	2	3	4	4	5	6	6	7

後述するようには、段数が次数と一致する4次以下の方程式では、各次数ごとに絶対安定領域が一意に決る。しかし、段数が次数より大きい5段数以上の段数をもつ方程式では、一般に方程式毎に絶対安定領域が異なり、したがってその安定性は無限の可能性をもっている。このようなタイプの方法の安定性は、よく知られた個々の方程式については知られているが、安定性を支配するパラメータの広い変域における安定性の状態や変化についてはほとんど知られていないし、その限界についても十分な知識が得られていないことが多い。この研究は、5から10の段数をもつ陽的ルニゲ・クツタ法について、それらの方法の安定性を支配するパラメータの（あるいは実用的に有意義な方法を含む）十分な変域における安定性の変化の状態を、グラフや等高線図を使って直観的に把握することを可能にしたものである。この研究の成果として得られたグラフや等高線図の利用により、我々は上記の段数をもつ任意の方程式の安定性に関する特性値と、その方程式の安定性に関する（同次数方程式中における）相対的評価を容易に得ることが出来る。

以下2.において安定性に関する諸概念を定義し、3.におい

て打ち切り誤差とその大小判定の基準について述べる。<sup>ついで</sup>14. において 4次以下の次数をもつ陽的ルンゲ・クッタ法の安定性について触れ、5. において 5段数4次法の安定性について考察する。さ5に、6, 7, 8, 及び9. の各節において、“6段数5次法”, “7段数6次法及び8段数6次法”, “9段数7次法及び10段数7次法” 及び “10段数8次法 (存在を仮定して)” の安定性について考察する。最後に10. において研究結果を総括する。

## 2. 安定性に関する諸概念<sup>2), 3)</sup>

通常安定性のテストに使用される微分方程式

$$y' = \lambda y \quad (\lambda \text{ は複素定数}) \quad (3)$$

を、 $m$ 段数 $r$ 次陽的ルンゲ・クッタ法(2)に代入し、次数条件式を用いて整理すると、漸化式

$$y_{n+1} = p_{m,r}(h\lambda, \delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_m) y_n \quad (4)$$

が得られる。ここで  $p_{m,r}(h\lambda, \delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_m)$  は、次数 $r$ によって定義される  $h\lambda$  の  $m$ 次式である。

$$p_{m,r}(h\lambda, \delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_m) = \sum_{k=0}^r \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \sum_{i=r+1}^m \gamma_i \cdot \frac{(h\lambda)^i}{i!} \quad (5)$$

ただし  $\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \dots, \delta_m$  は、公式の係数 $\gamma_i$ の関数である。  
注1)

注1)  $m-r \geq 2$ 型の高次法においては、 $\delta_{m-1}$  はかなり複雑になるので、本研究の上3に数式処理を用いないとその誘導は容易ではない。

### [定義1]

(5) によって定義される  $h\lambda$  の多項式を、 $m$ 段数 $r$ 次陽的

ルニケ・クツタ法(2)の安定多項式という。

次に、個々の伝達関数の安定性の比較を可能にするために、二重の概念を導入しよう。

### [定義2]

$$S(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m) = \{ h\lambda \mid |P_{m,r}(h\lambda, \gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m)| \leq 1, \\ \text{ここで } h\lambda \text{ は複素数} \} \quad (6)$$

以上で定義される複素平面上の閉領域  $S(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m)$  を、 $m$  段数と次陽的ルニケ・クツタ法(2)の絶対安定領域という。特に、原点を含む  $S(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m)$  の単連結な閉部分領域は安定性にとって有効であるから、これを有効絶対安定領域とよび、 $Se(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m)$  によって表す。また、 $Se(\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_m)$  の面積を  $A(Se(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m))$  によって表すことにする。

### [定義3]

$Se(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m)$  と実軸  $R$  との交わりを  $S_I(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m)$  によって表し、 $m$  段数と次陽的ルニケ・クツタ法(2)の絶対安定区間という。すなわち、

$$S_I(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m) = Se(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m) \cap R \\ = [-\alpha(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m), 0.0] \quad (7)$$

である。ここで  $-\alpha(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m)$  は、絶対安定区間の下限である。

$h\lambda$  が絶対安定領域  $S(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \dots, \gamma_m)$  に入るための刻み幅

が選ばれるとき， $m$  段おろし法 (2) による (3) の数値解は安定である。微分方程式 (1) の右辺の関数系が非線形で，そのヤコビ行列が相異なる固有値をもつとき，上記の入にはこれらの固有値が対応する。これらのすべての固有値と  $h_n$  との積  $S(\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots, \gamma_m)$  に入るような刻み幅  $h_n$  に対して， $m$  段おろし法陽的ルンゲ・クッタ法 (2) による (1) の数値解はほぼ安定である。

### 3. 打ち切り誤差とその大小の判定 <sup>4), 5)</sup>

$x = x_{n+1}$  における  $r$  次陽的ルンゲ・クッタ法の局所打ち切り誤差  $T_n$  は，一般に

$$T_n = K_x h_n^{r+1} + O(h_n^{r+2}) \quad (8)$$

と表される。ここで

$$K_x = \sum_{j=1}^{m_r} a_{xj} g_{xj}(x_n, y_n) \quad (9)$$

である。ただし， $a_{xj}$  は公式の係数の  $x$  の関数で， $g_{xj}(x, y(n))$  は，微分方程式 (1) の右辺の関数ベクトルに依存して定まる関数ベクトルである。また， $m_r$  は方法の次数と，微分方程式 (1) が単一が連立かに依存して定まる自然数である。

[定義 4]

$$Ar_2 = \sum_{j=1}^{m_r} |a_{xj}| \quad (10) \quad Ar_3 = \sum_{j=1}^{m_r} a_{xj}^2 \quad (11)$$

によつて定義される数量  $Ar_2$  及び  $Ar_3$  を， $r$  次陽的ルンゲ・クッタ法の打ち切り精度判定基準という。

これらの数量は，その公式によつて得られる数値解の打ち

切り精度をよく反映するので、しばしば個々の公式の打ち切り精度の評価に使用される。

4. 4次以下の次数をもつ陽的ルンゲ・クッタ法の安定性  
方法(2)において  $m \leq 4$  のときには、次数と段数が一致するので、安定多項式(5)は次のようになる。

$$p_{m,m}(h\lambda) = \sum_{k=0}^m \frac{(h\lambda)^k}{k!} \quad (12)$$

すなわち、4次以下の同次数の公式に対して安定多項式は一意に定まる。したがって、安定多項式を用いて定義される種々の特性値も、同次数の公式に対して一意である。

Fig. 1 に、2次から4次までの陽的ルンゲ・クッタ法に対する絶対安定領域を示す。

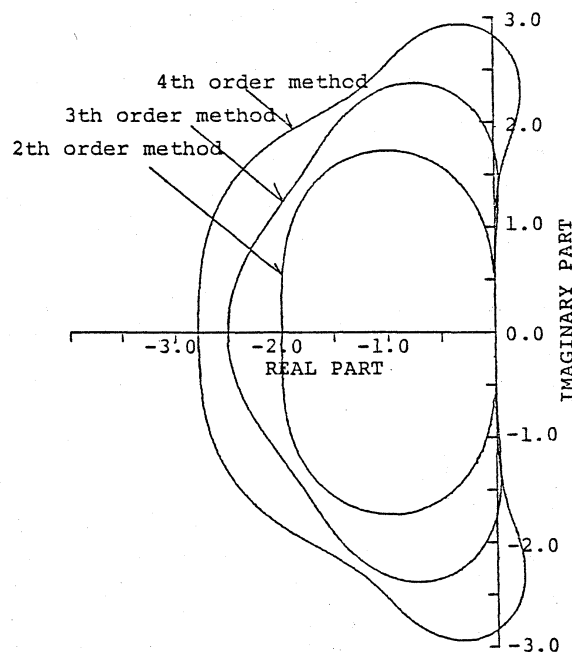


Fig. 1 次数2から4の陽的ルンゲ・クッタ法の絶対安定領域

## 5. 5段数4次陽的ルンゲ・クッタ法の安定性

5段数4次陽的ルンゲ・クッタ法の安定多項式は,

$$P_{5,4}(h\lambda, \gamma_5) = \sum_{k=0}^4 \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \gamma_5 \cdot \frac{(h\lambda)^5}{5!} \quad (13)$$

によって与えられる。ここで  $\gamma_5 = 5! a_2 b_3 c_2 b_4 c_5 C_5$  (14) である。

Fig. 2は、横軸に  $h\lambda$ 、縦軸に  $P_{5,4}(h\lambda, \gamma_5)$  をとって、 $\gamma_5$  が種々の値をとるとき、 $h\lambda \leq 0$  において  $P_{5,4}(h\lambda, \gamma_5)$  がどのように変動するかを図示したものである。  $m=5$  の場合の方法(2)の絶対安定区間は、この図において  $-1.0 \leq P_{5,4}(h\lambda, \gamma_5) \leq 1.0$  を満たす  $h\lambda$  の範囲である。  $\gamma_5 = 0$  のとき、 $S_E(\gamma_5)$  は、4次陽的ルンゲ・クッタ法の絶対安定区間と一致する。 Fig. 2の観察からも容易に知られるように、最大絶対安定区間を与える  $\gamma_5$  は

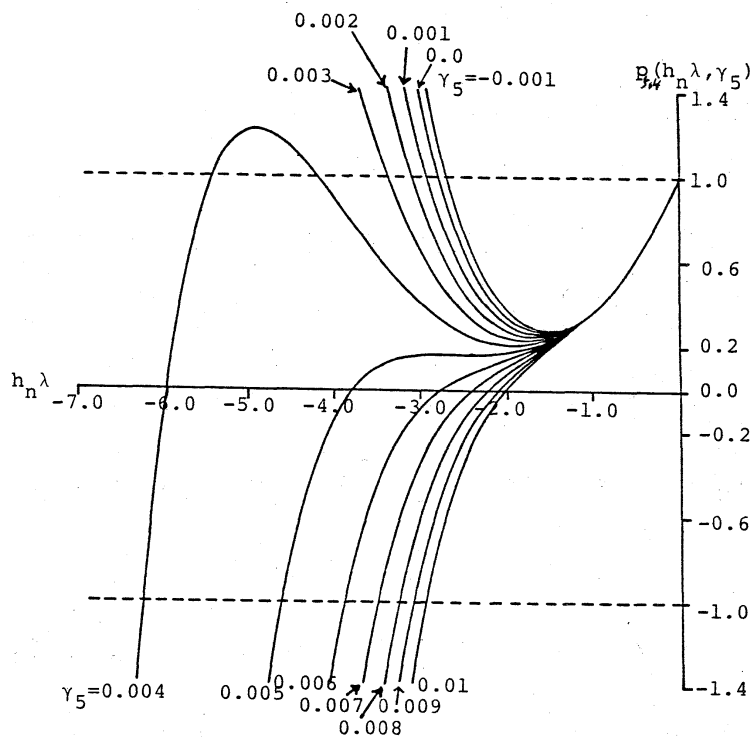


Fig. 2  $\gamma_5$  の値に対する  $y = P_{5,4}(h\lambda, \gamma_5)$  のグラフ

、曲線  $y = p_{5,4}(h\lambda, \delta_5)$  が  $y = 1.0$  に接する場合である (Fig. 3 を見よ)。  
 これより最大絶対安定区間を求めるには、まず

$$p_{5,4}(h\lambda, \delta_5) = 1.0 \quad (15) \quad p'_{5,4}(h\lambda, \delta_5) = 0 \quad (16) \quad (\text{ここで}$$

微分は  $(h\lambda)$  について実行される) を解いて  $\delta_5$  を決定する。この解を  $\delta_5^*$  としよう。ついで  $p_{5,4}(h\lambda, \delta_5^*) = -1$  (17) を解き、その解を  $(h\lambda)^*$  とすれば、最大絶対安定区間  $S_{\pm}(\delta_5^*)$  は、 $S_{\pm}(\delta_5^*) = [(h\lambda)^*, 0.0]$  によって与えられる。このようにして、

$$\delta_5^* = 0.490428, \quad S_{\pm}(\delta_5^*) = [-6.0606, 0.0] \text{ が得られた。}$$

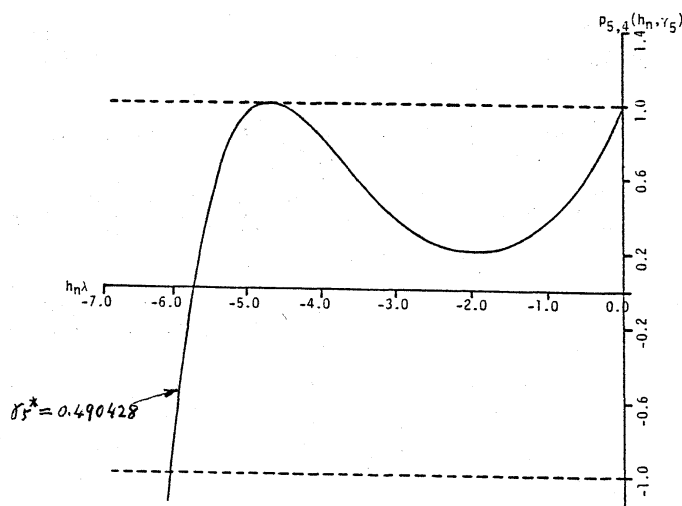


Fig. 3 絶対安定区間最大の場合の  $y = p_{5,4}(h\lambda, \delta_5)$  のグラフ

Fig. 4 は、横軸に  $\delta_5$ 、縦軸に有効絶対安定領域の面積  $A(S_{\pm}(\delta_5))$ 、及び絶対安定区間の下限の絶対値  $\alpha(\delta_5)$  をとって、 $\delta_5$  と安定性の間の相互関係を図示したものである。同図上における“\*MERSON”等または“(1)”と、名前が傍記された“\*”や“(2)”は、それぞれ同名の考案者及び著者たちによって導かれた諸公式の、 $(\delta_5, \log_{10} A_{\omega})$  を座標とする点を示す。なお、著者たちによって導かれた公式



注2)  
 の多くは単調な公式である。注2) m段数陽的ルニゲ・クツ法  
 (2)は、(i)  $a_i \leq a_j$  ( $i \leq j$ ), (ii) すべての係数は非負, であるとき単調  
 であるという。この定義は一松によって与えられ、4次の陽  
 的ルニゲ・クツ法中単調な公式は、いわゆる“古典的ルニゲ・  
 クツ法”のみであるという興味ある事実が、同氏によって報告  
 されている。絶対安定領域は、単連結の複数個の成分から構成  
 されて居り、 $\alpha(\gamma)$  や  $A(\text{se}(\gamma))$  のグラフの不連続な突然の増減  
 は、2つあるいは3つの絶対安定領域の接触合併または分  
 離に起因している。

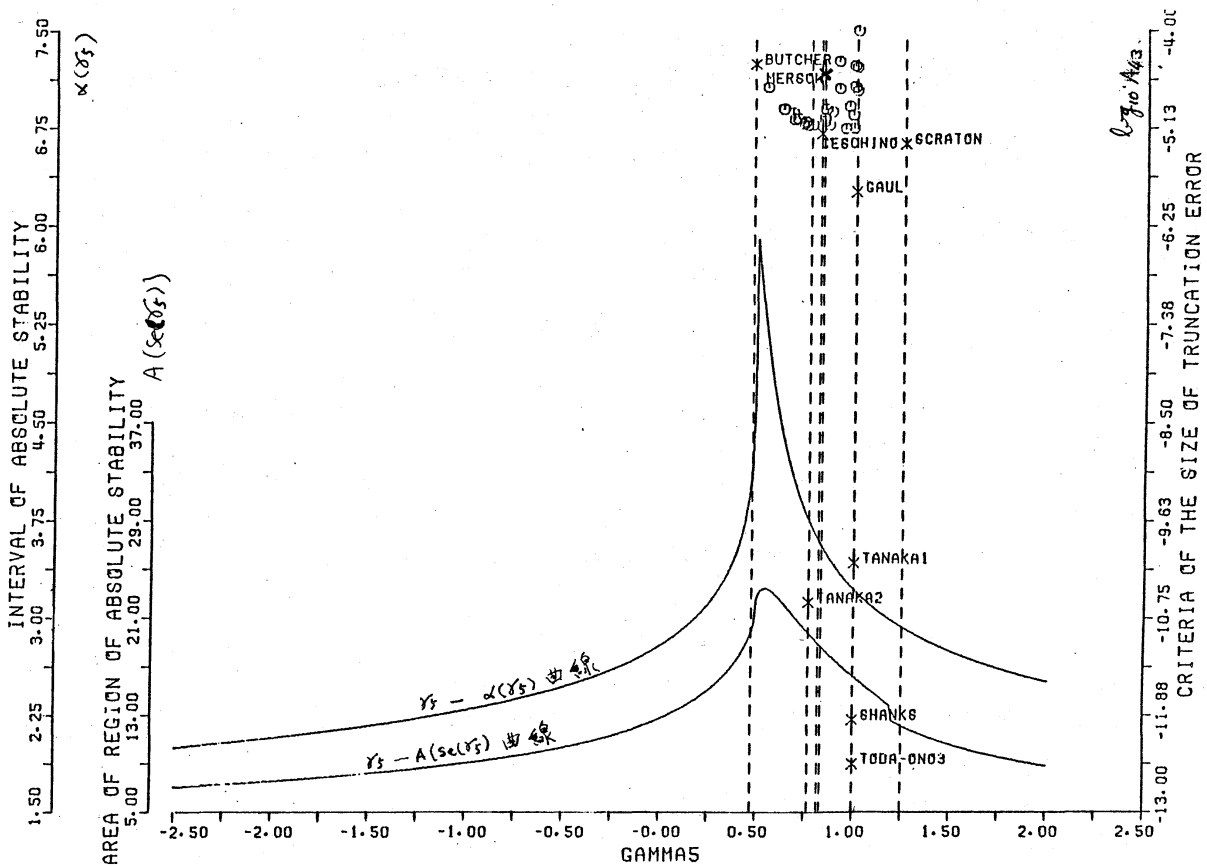


Fig. 4 5段数4次法の安定性と既知公式の特性

Fig. 4 の観察から, 5 段数 4 次法の既知公式の安定性は, Butcher<sup>3)</sup>, Ceschino<sup>8)</sup>, Merson<sup>9)</sup>, Gaul<sup>10)</sup> (Shankes<sup>11)</sup>, 田中<sup>12)</sup>及び戸田・小野<sup>13)</sup> の高精度公式は, Gaul と同等の安定特性をもつ) の順に次第に悪くなく, 打ち切り精度最良の Gaul 等において最悪である。打ち切り精度を併せ考えるとき, Butcher の公式は, 打ち切り精度を落さず安定性の面でもかなりの改良が可能であるし, また, 一般に既知の 5 段数公式は,  $\gamma$  についてほぼ最適な選択をしていることが結論づけられるが, ここではこれを指摘するに留める。Fig. 4 は, 既知公式の安定性の優劣や, それに打ち切り精度をも考慮に入れた評価を容易にするためである。この図はまた, 任意の 5 段数 4 次法の主要な安定特性を簡単に知ることもできて便利である。すなわち, 与えられた公式の係数から安定性を支配するパラメータ  $\gamma$  の値を計算し, その値を Fig. 4 の横軸上にとり, その点から  $\gamma - A(\sec(\gamma))$  及び  $\gamma - \alpha(\gamma)$  の両曲線までの距離を求めれば, その公式の安定性の主要な特性値である  $A(\sec(\gamma))$  や  $\alpha(\gamma)$  が得られる。また, この図の観察からその公式の安定性に関する相対的評価が可能である。これらのことは, 6 段数 5 次法及び 7 段数 6 次法についても同様である。

Fig. 5 には, 絶対安定区間最大及び有効絶対安定領域の面積は注 3) 最大の 2 公式の絶対安定領域を示す。  $A(\sec(\gamma))$  は,  $\gamma = 0.540$  のときほぼ最大となり, その値は  $A(\sec(\gamma)) = 23.41$  となる。

注3) 個々の既知公式の絶対安定領域について(3, 7)を見よ。

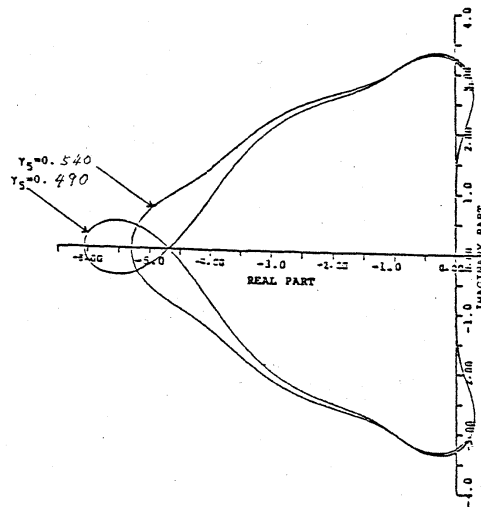


Fig. 5 有効絶対安定領域の面積は最大及び

絶対安定区間最大の2公式の絶対安定領域

6. 6段数5次陽的ルニゲ・クツツ法の安定性

6段数5次陽的ルニゲ・クツツ法の安定多項式は,

$$p_{6,5}(h\lambda, \gamma_6) = \sum_{k=0}^5 \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \gamma_6 \cdot \frac{(h\lambda)^6}{6!} \quad (18)$$

によって与えられる。ここで  $\gamma_6 = 6! a_2 b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} C_6$  (19)

である。

Fig. 6 は, 横軸に  $h\lambda$ , 縦軸に  $p_{6,5}(h\lambda, \gamma_6)$  をとって,  $\gamma_6$  が種々の値をとるとき,  $h\lambda \leq 0$  において  $p_{6,5}(h\lambda, \gamma_6)$  がどのように変動するかを図示したものである。  $m=6$  の場合の方法(2)の絶対安定区間は, この図において  $-1.0 \leq p_{6,5}(h\lambda, \gamma_6) \leq 1.0$  を満足する  $h\lambda$  の範囲である。 Fig. 6 の観察から容易に知られるように, 最大絶対安定区間を定める  $\gamma_6$  は, 曲線  $y = p_{6,5}(h\lambda, \gamma_6)$  が  $y = -1.0$  に接する場合である。これより最大絶対安定区間を定めるには, まず

$$p_{6,5}(h_n\lambda, \gamma_6) = -1.0 \quad (20) \quad p'_{6,5}(h_n\lambda, \gamma_6) = 0 \quad (21)$$

を解いて  $\gamma_6$  を決定する。この解を  $\gamma_6^*$  としよう。ついで

$p_{6,5}(h_n\lambda, \gamma_6^*) = 1.0$  (22) を解き、その解を  $(h_n\lambda)_6^*$  とすると、最大絶対安定区間  $S_{\pm}(\gamma_6^*)$  は、 $S_{\pm}(\gamma_6^*) = [(h_n\lambda)_6^*, 0.0]$  によって与えられる。

このようにして  $\gamma_6^* = 0.525$  ,  $S_{\pm}(\gamma_6^*) = [-6.21, 0.0]$  が得られた。

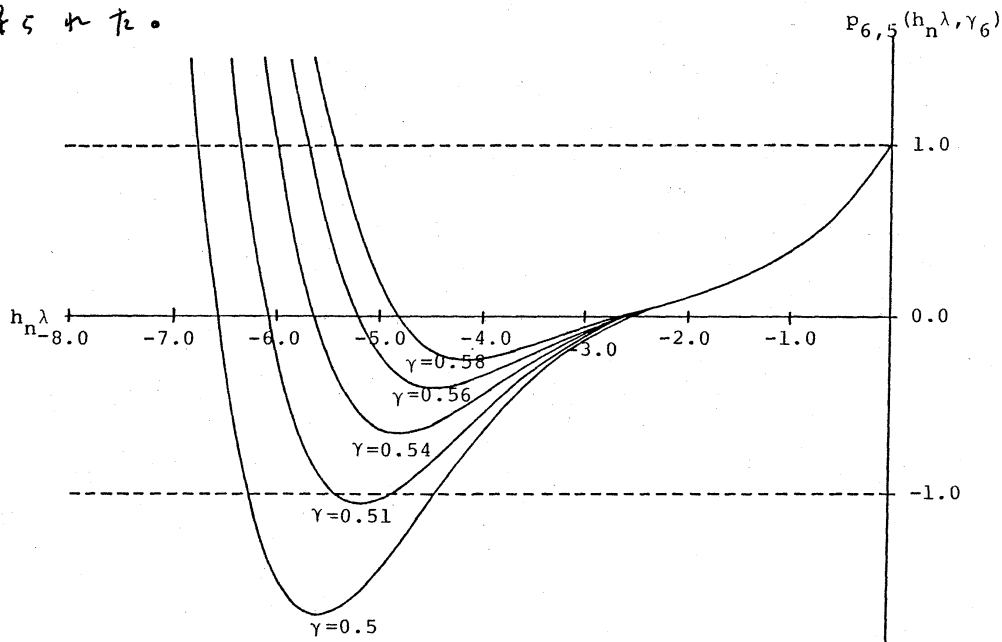


Fig. 6 いろいろの  $\gamma_6$  の値に対する  $y = p_{6,5}(h_n\lambda, \gamma_6)$  のグラフ

Fig. 7 は、横軸に  $\gamma_6$ 、縦軸に有効絶対安定領域の面積  $A(\text{se}(\gamma_6))$  及び絶対安定区間の下限の絶対値  $\alpha(\gamma_6)$  をとって、 $\gamma_6$  と安定性の相互関係を図示したものである。同図上における“●Butcher”等または“○”と、右前が傍記された“●”や“○”は、それぞれ同名の考案者及び著者たちによって導かれた諸公式の、 $(\gamma_6, \log_{10} A_{53})$  を座標とする点を示す。

Fig. 7 の観察から、これまでに得られている多くの公式は

、安定性の面でもあつてゐることが知られる。実はこれらの公  
 式の多くは、また打ち切り精度の面でもあつてゐて性能上の  
 題のあるものである。Lawson の公式は、その考案者の主張  
 するよゝに確かに最良の安定特性をもつてゐる。安定性と打  
 ち切り精度を併せ考えるとき、6 段数 5 次法の既知公式は殆  
 ど右の選択を誤つてゐるといえる（ここでは単に問題点  $\alpha$  指  
 5 次法の既知公式については注 15)、16) 参照。  
 標に留めるが）。

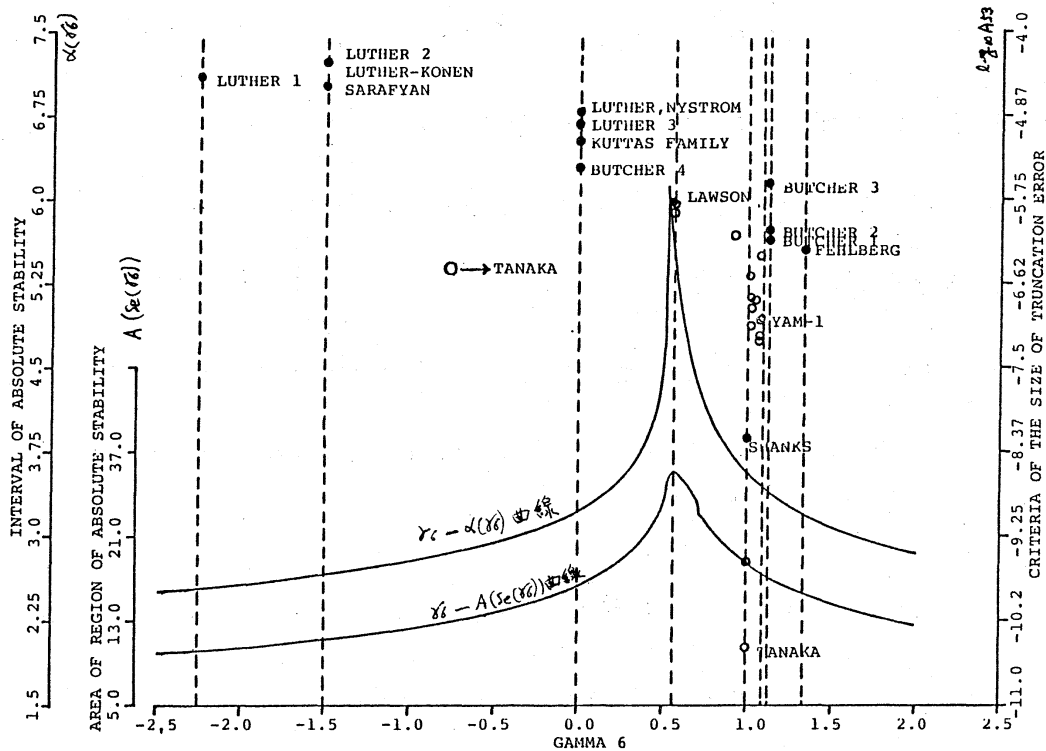


Fig. 7 6 段数 5 次法の安定性と既知公式の特性

Fig. 8 には、絶対安定区間最大及び有効絶対安定領域の面  
 積は最大の 2 公式の絶対安定領域を示す。A(Se(rho)) は、

$\gamma_c = 0.5625$  のときは最大となす、その値は  $A(Se(\gamma_c)) = 27.05$   
 となる。

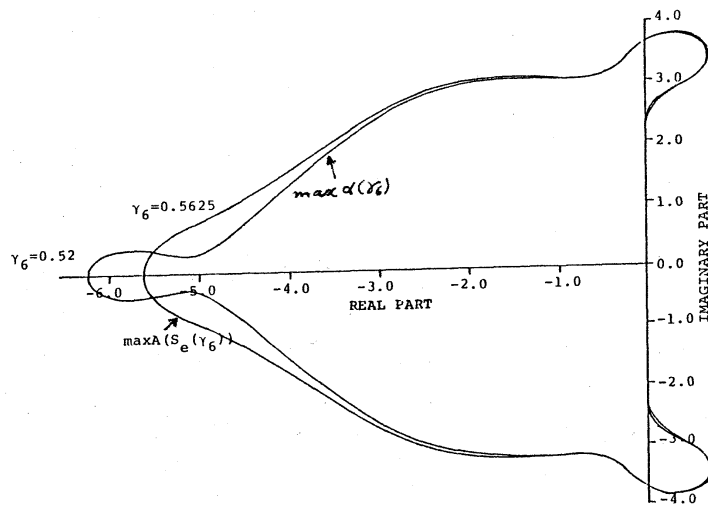


Fig. 8 有効絶対安定領域の面積は最大及び絶対安定区間最大の2公女の絶対安定領域

7. 6次陽的ルンゲ・クッタ法の安定性

7.1 7段数6次陽的ルンゲ・クッタ法の安定性

7段数6次陽的ルンゲ・クッタ法の安定多項式は,

$$p_{7,6}(h\lambda, \gamma_7) = \sum_{k=0}^6 \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \gamma_7 \cdot \frac{(h\lambda)^7}{7!} \quad (23)$$

によつて与えられる。ここで  $\gamma_7 = 7! a_2 b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} c_7$  (24)

である。

Fig. 9 は, 横軸に  $h\lambda$ , 縦軸に  $p_{7,6}(h\lambda, \gamma_7)$  をとつて,  $\gamma_7$  が種々の値をとるとき,  $h\lambda \leq 0$  において  $p_{7,6}(h\lambda, \gamma_7)$  がどのように変動するかを図示したのである。  $m=7$  の場合の方法(2)の絶対安定区間は, この図において  $-1.0 \leq p_{7,6}(h\lambda, \gamma_7) \leq 1.0$  を満足する  $h\lambda$  の範囲である。 Fig. 9 の観察から容易に知られるように, 最大絶対安定区間を与える  $\gamma_7$  は, 曲線  $y = p_{7,6}(h\lambda, \gamma_7)$  が  $y = 1.0$  に接する場合である。これより最大絶対安定区間を求

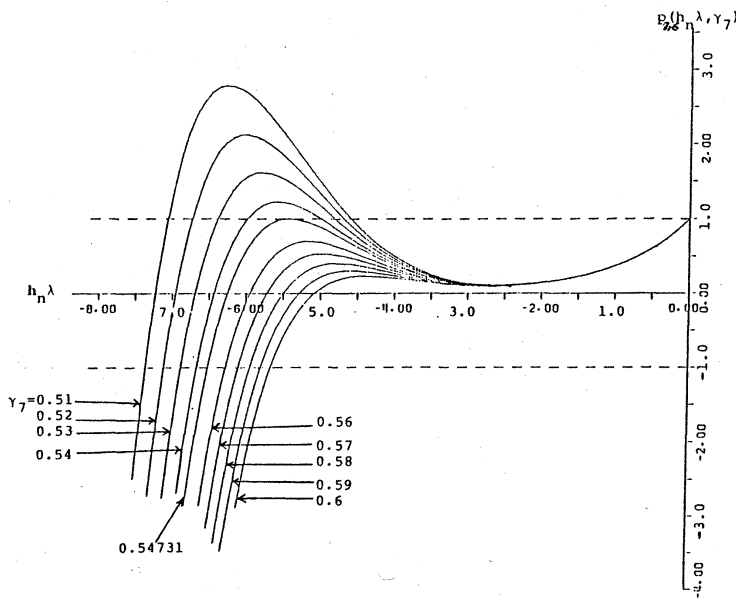


Fig. 9  $\gamma_7$  の値に対する  $p_{7,6}(h_n \lambda, \gamma_7)$  のグラフ

めるとは、まず

$$p_{7,6}(h_n \lambda, \gamma_7) = 1.0 \quad (25) \quad p_{7,6}(h_n \lambda, \gamma_7) = 0 \quad (26)$$

を解いて  $\gamma_7$  を決定する。この解を  $\gamma_7^*$  としよう。ついで

$$p_{7,6}(h_n \lambda, \gamma_7^*) = -1.0 \quad (27) \quad \text{を解き、その解を } (h_n \lambda)_7^* \text{ とする}$$

ると、最大絶対安定区間  $S_I(\gamma_7^*)$  は、 $S_I(\gamma_7^*) = [(h_n \lambda)_7^*, 0.0]$  に

なると考えられる。このようにして  $\gamma_7^* = 0.54731$  ,  $S_I(\gamma_7^*) = [-6.5111, 0.0]$  が得られた。

Fig. 10 は、横軸に  $\gamma_7$ 、縦軸に有効絶対安定領域の面積  $A(Se(\gamma_7))$  及び絶対安定区間の下限の絶対値  $\alpha(\gamma_7)$  をとって、 $\gamma_7$  と安定性の相互関係を図示したものである。同図における "x Butcher" などと傍記された "x" は、同名の考案者によって導かれた公式の、 $(\gamma_7, \log_{10} A_{63})$  を座標とする点である。

Fig. 11 は、絶対安定区間最大及び有効絶対安定領域の面積は

注4) ほぼ最大の場合約に対する絶対安定領域を示す。注4) このAは  
 仮定が存在するかどうかは不明である(多分存在すると思いが-)。

$A(\text{se}(\gamma_7))$  は,  $\gamma_7 = 0.589$  のときほぼ最大となり, その値は

$A(\text{se}(\gamma_7)) = 29.83$  となる。

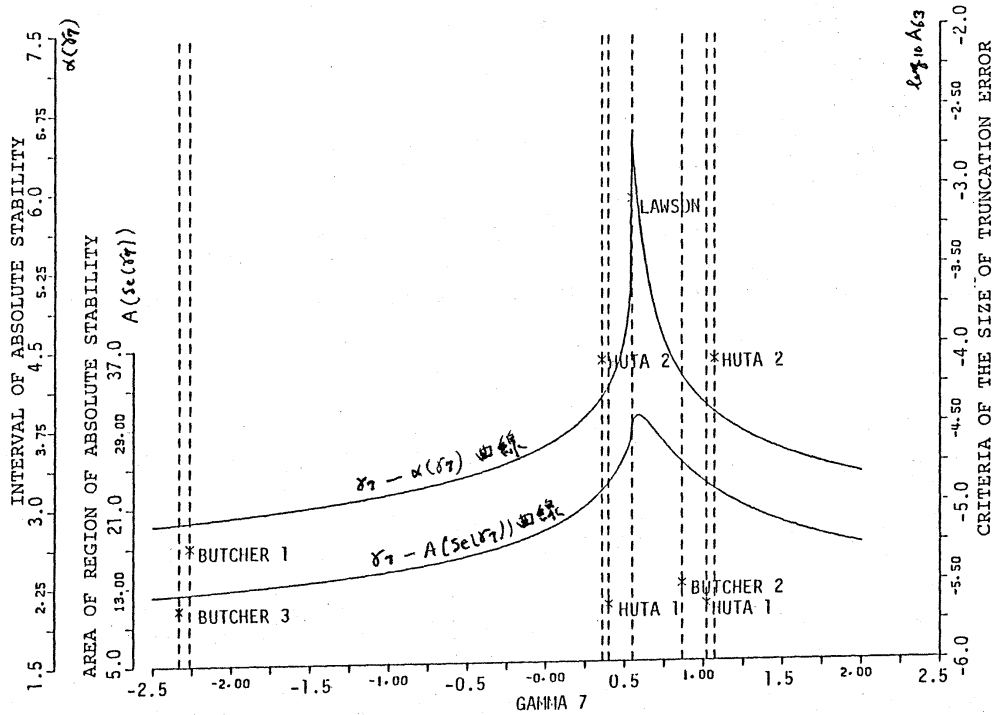


Fig. 10 7段数6次法の安定性と既知公式の特性

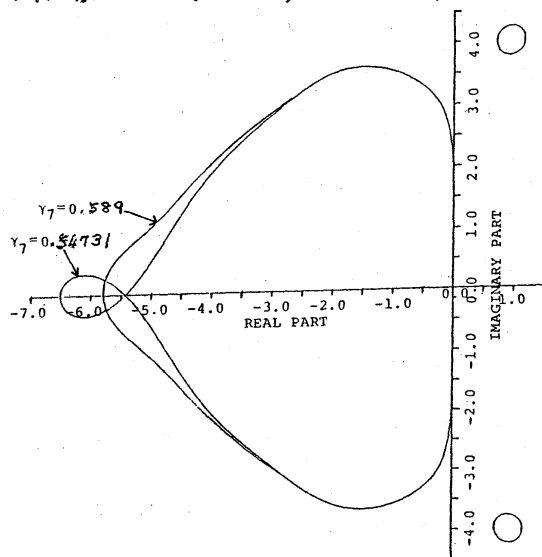


Fig. 11 有効絶対安定領域の面積はほぼ最大及び絶対安定区間最大の場合約に対する絶対安定領域



## 7.2 8段教6次陽的ルニケ・クツタ法の安定性

8段教6次陽的ルニケ・クツタ法の安定多項式は、

$$p_{8,6}(h\lambda, \gamma_7, \gamma_8) = \sum_{k=0}^6 \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \gamma_7 \cdot \frac{(h\lambda)^7}{7!} + \gamma_8 \cdot \frac{(h\lambda)^8}{8!} \quad (28)$$

に上つておられる。ここで  $\gamma_7 = 7! \{ C_7 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 + C_8 (a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 + a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 + a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 + a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 + a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7) \}$

$$\gamma_8 = 8! C_9 a_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 \quad (30) \quad \text{である。}$$

Fig. 12は、 $\gamma_7$ を横軸、 $\gamma_8$ を縦軸にとり、 $(\gamma_7, \gamma_8)$ の(既知公式(7)式(Huřaの公式)を含む)広い変域について  $A(\text{Se}(\gamma_7, \gamma_8))$ の等高線図を描いたものである。同図における“Huřa 1”, “Huřa 2”及び“OPTIMAL”と傍記された●は、“Huřaによる2公式”と、×ツシエ法によつて求められた“ $A(\text{Se}(\gamma_7, \gamma_8))$ の最大点”の、3者の各々における $(\gamma_7, \gamma_8)$ を座標とする点である。また、等高線上の数値は、その線上の各点において  $A(\text{Se}(\gamma_7, \gamma_8))$ がその値をとることを示している。

Fig. 12の観察から、Huřaの2公式は、共に  $A(\text{Se}(\gamma_7, \gamma_8))$ が22から24の間に存在し、8段教6次陽的ルニケ・クツタ法としては、特に安定性のよい公式ではないと推測される。また、×ツシエ法によつて得られた  $A(\text{Se}(\gamma_7, \gamma_8))$ の最大点(●)は、概して正しく得られていると思われる。

8段教6次法と7段教6次法の比較を容易にするために、

両者の安定多項式のパラメータ間には、「安定性に関して等価」とい  
う概念を導入しよう。

(定義 5)

7 段数 6 次法及び 8 段数 6 次法の、各々の安定性を支配す  
るパラメータをそれぞれ  $\gamma_7^*$  及び  $(\gamma_7, \gamma_8)$  とするとき、もし

$$A(\text{Se}(\gamma_7, \gamma_8)) = A(\text{Se}(\gamma_7^*)) \quad (31)$$

ならば、 $(\gamma_7, \gamma_8)$  は  $\gamma_7^*$  と安定性に関して等価であるという。

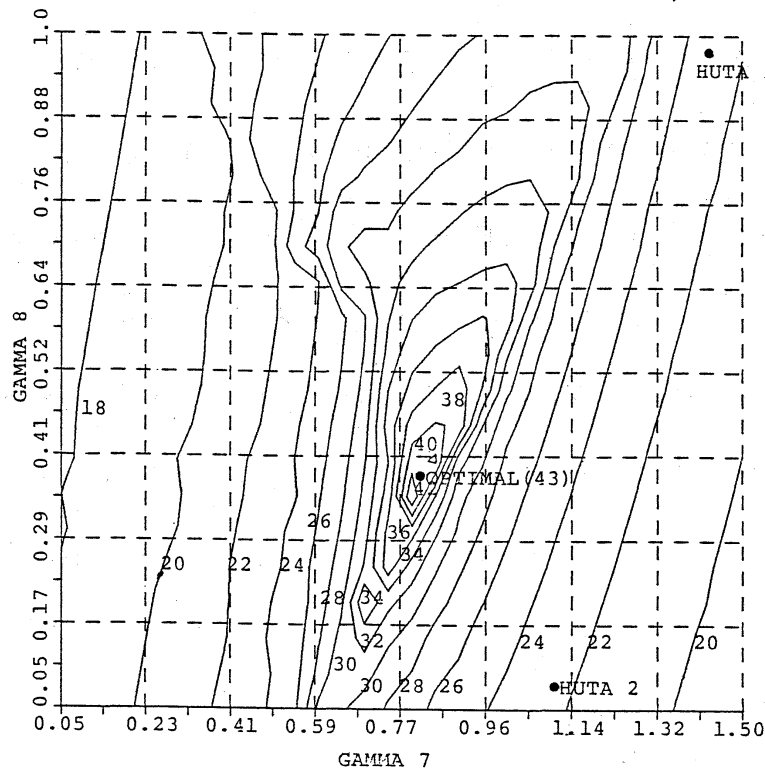


Fig. 12 8 段数 6 次法の安定性とパラメータの関係  
( $A(\text{Se}(\gamma_7, \gamma_8))$  の等高線図)

Fig. 10 の “\* Huta 1” 及び “\* Huta 2” を通るそれぞれ 2 本の点  
線は、横軸上にとられた Huta の 2 公式の  $(\gamma_7, \gamma_8)$  と等価な  $\gamma_7^*$  (各  
公式について等価な  $\gamma_7^*$  は 2 つずつ存在する) を通って、縦軸に平行  
に引かれたものである。

Fig. 10 の観察から, Butcher 1<sup>(16)</sup> 及び Butcher 3<sup>(18)</sup> は共に安定性が悪く, Huta 2 は, Butcher 2<sup>(16)</sup> よりも関数計算回数 (stepあたりの) が一回多いにもかかわらず, 打ち切り精度も安定性も共に Butcher 2 に劣っている。Huta 1 は Butcher 2 よりも僅かに打ち切り精度がすぐれているが, 安定性が悪く, また関数計算回数 (stepあたりの) も一回多いので, Butcher 2 の方が優れているといえよう。また, Lawson の公式<sup>(16)</sup> は安定性が最もよい。

8 段数 6 次法の任意の公式の安定特性は, その公式の  $(\gamma, \delta)$  を計算し, それを座標とする点を Fig. 12 に記入することにより, 直観的に容易に把握することが出来る。

パラメータ  $(\gamma, \delta)$  を固定したとき,  $\ln \lambda \leq 0$  にかいて曲線  $y = p_{8,6}(\ln \lambda, \gamma, \delta)$  がどのように変動するかを, 多数の  $(\gamma, \delta)$  の組合せについて調べることにより, 最大絶対安定区間を定める  $(\gamma, \delta)$  の組は, 同曲線が  $y = \pm 1.0$  の両者に接する場合であることがわかった (Fig. 13 参照)。これより最大絶対安定区間を求めるには, まず連立方程式

$$p_{8,6}(u, \gamma, \delta) = 1.0 \quad (32) \quad p'_{8,6}(u, \gamma, \delta) = 0 \quad (33)$$

$$p_{8,6}(v, \gamma, \delta) = -1.0 \quad (34) \quad p'_{8,6}(v, \gamma, \delta) = 0 \quad (35)$$

を解いて  $\gamma, \delta$  を決定する。その解を  $\gamma^*, \delta^*$  としよう。ついで

$$p_{8,6}(z, \gamma^*, \delta^*) = 1.0 \quad (36)$$

を解いて, その解を  $z^*$  とすると, 最大絶対安定区間  $S_{\pm}(\gamma^*, \delta^*)$  は,  $S_{\pm}(\gamma^*, \delta^*) = [z^*, 0.0]$

によって与えられる。このとき  $z^* = 0.716$  ,

$\gamma_2^* = 0.233$  ,  $S_2(\gamma_2^*, \gamma_8^*) = [-9.8287, 0.0]$  が得られた。

Fig. 14 に, 有効絶対安定領域の面積は最大の場合の絶対安定領域を示す。  $A(S_2(\gamma_7, \gamma_8))$  は,  $\gamma_7 = 0.775$  ,  $\gamma_8 = 0.2975$  のときには最大となり, その値は  $A(S_2(\gamma_7, \gamma_8)) = 45.56$  となる。

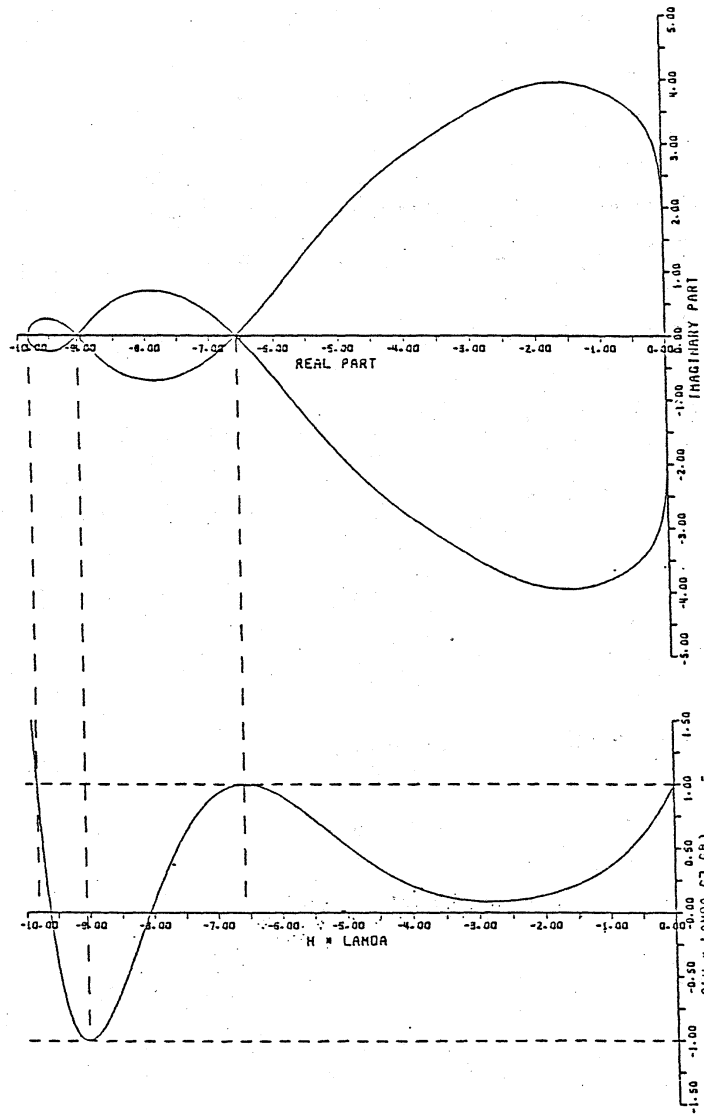


Fig. 13 絶対安定区間最大の場合の  $\gamma = \beta_{s,c}(h\lambda, \gamma_7, \gamma_8)$  のグラフとこれに対応する絶対安定領域

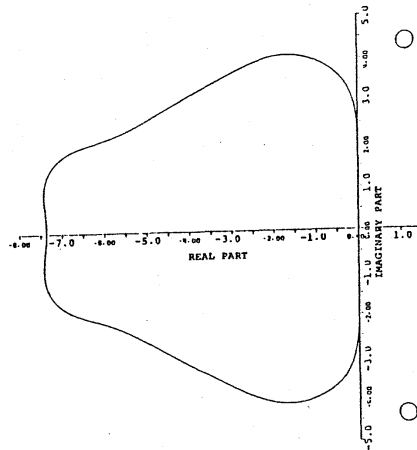


Fig. 14 有効絶対安定領域の面積はほぼ最大の場合の絶対安定領域

8. 7次陽的ルンゲ・クッタ法の安定性

8.1 9段数7次陽的ルンゲ・クッタ法の安定性

9段数7次陽的ルンゲ・クッタ法の安定多項式は,

$$p_{9,7}(h\lambda, \gamma_8, \gamma_9) = \sum_{k=0}^7 \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \gamma_8 \cdot \frac{(h\lambda)^8}{8!} + \gamma_9 \cdot \frac{(h\lambda)^9}{9!} \quad (37)$$

により求えられる。ここで  $\gamma_8 = 8! \{ c_8 a_2 b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} + c_9 ( a_2 b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} + a_2 b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{86} b_{98} + a_2 b_{32} b_{43} b_{54} b_{75} b_{87} b_{98} + a_2 b_{32} b_{43} b_{64} b_{76} b_{87} b_{98} + a_2 b_{32} b_{53} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} + a_2 b_{42} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} + a_3 b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} ) \}$   $= 8! \sum_{i,j,k,l,m,n,o=1}^9 c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} b_{no} a_o \quad (38)$

$$\gamma_9 = 9! c_9 a_2 b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} b_{76} b_{87} b_{98} \quad (39)$$

である。

Fig. 15 は、横軸に  $\gamma_8$ 、縦軸に  $\gamma_9$  をとって、 $(\gamma_8, \gamma_9)$  の (既知公式 (Shanks の公式) を含む) 広い変域について  $A(se(\gamma_8, \gamma_9))$  の等高線図を描いたものである。同図における "Shanks" 及び "OPTIMAL" と傍記された ● は、"Shanks による公式" と、× はシエ法によって求められた "A(se( $\gamma_8, \gamma_9$ )) ほぼ最大の点" の両

者の各々に於ける  $(\gamma_8, \gamma_9)$  を座標とする点である。Fig. 15 の観  
 察から, Shanks の公式の  $A(\text{se}(\gamma_8, \gamma_9))$  はほぼ 27 位であって,  
 9 段数ノ次法としては余り安定性のよい公式とはいえないこ  
 とがわかる。また, ヌツニエ法によつて得られた  $A(\text{se}(\gamma_8, \gamma_9))$   
 はほぼ最大の点は, 概して正しく得られてゐると推測される。

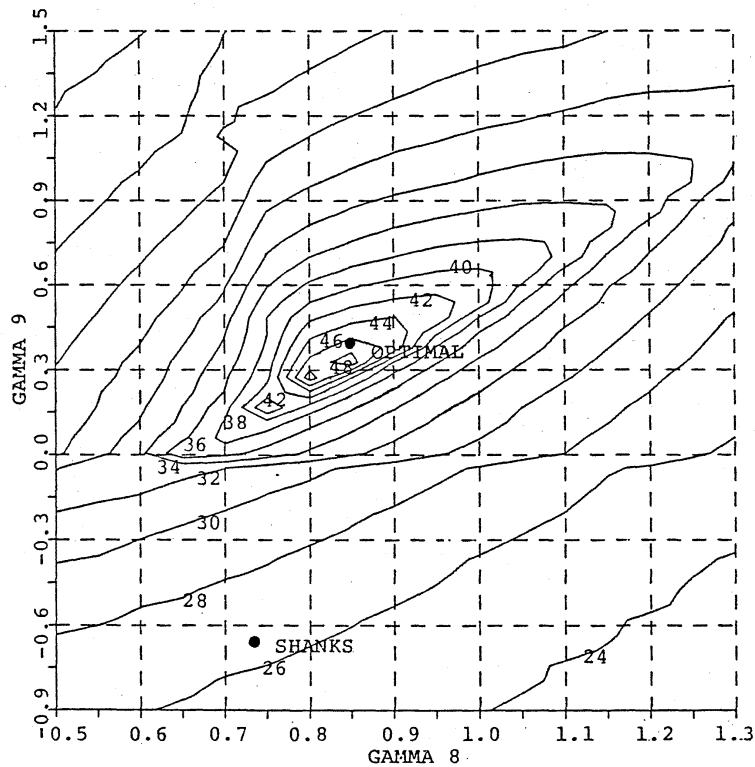


Fig. 15 9 段数ノ次法の安定性とパラメータの関係  
 ( $A(\text{se}(\gamma_8, \gamma_9))$  の等高線図)

パラメータ  $(\gamma_8, \gamma_9)$  を固定したとき,  $h\mu\lambda \leq 0$  において曲線  
 $y = \rho_{9,7}(h\mu\lambda, \gamma_8, \gamma_9)$  がどのように変動するかを多数の  $(\gamma_8, \gamma_9)$  の  
 組合せについて調べることにより, 最大絶対安定区間を与え  
 る  $(\gamma_8, \gamma_9)$  の組は, 同曲線が  $y = \pm 1.0$  の両者に接する場合に対応  
 するこゝとわかつてた (Fig. 17 を見よ)。これより最大絶対安定

区間を求めるには、まず連立方程式

$$p_{9,7}(u, \gamma_8, \gamma_9) = 1.0 \quad (39) \quad p'(u, \gamma_8, \gamma_9) = 0 \quad (40)$$

$$p_{9,7}(v, \gamma_8, \gamma_9) = -1.0 \quad (41) \quad p'(v, \gamma_8, \gamma_9) = 0 \quad (42)$$

を解いて  $\gamma_8, \gamma_9$  を決定する。この解を  $\gamma_8^*, \gamma_9^*$  としよう。ついで

$$p_{9,7}(z, \gamma_8^*, \gamma_9^*) = -1.0 \quad (43)$$

を解いてその解を  $z^*$  とすれば、

最大絶対安定区間  $S_z(\gamma_8^*, \gamma_9^*)$  は、 $S_z(\gamma_8^*, \gamma_9^*) = [z^*, 0.0]$

によつて与えられる。このよきにして  $\gamma_8^* = 0.742$  ,

$$\gamma_9^* = 0.256 \quad , \quad S_z(\gamma_8^*, \gamma_9^*) = [-9.9589, 0.0]$$

た。

Fig. 16 に、有効絶対安定領域の面積は最大の場合の絶対安定

領域を示す。  $A(S_e(\gamma_8, \gamma_9))$  は、  $\gamma_8 = 0.80$  ,  $\gamma_9 = 0.325$  のとき最大にな

り、その値は  $A(S_e(\gamma_8, \gamma_9)) = 51.62$  となる。 Fig. 17 に、絶対安定区間

最大の場合に対応する安定多項式のグラフと、絶対安定領域を示

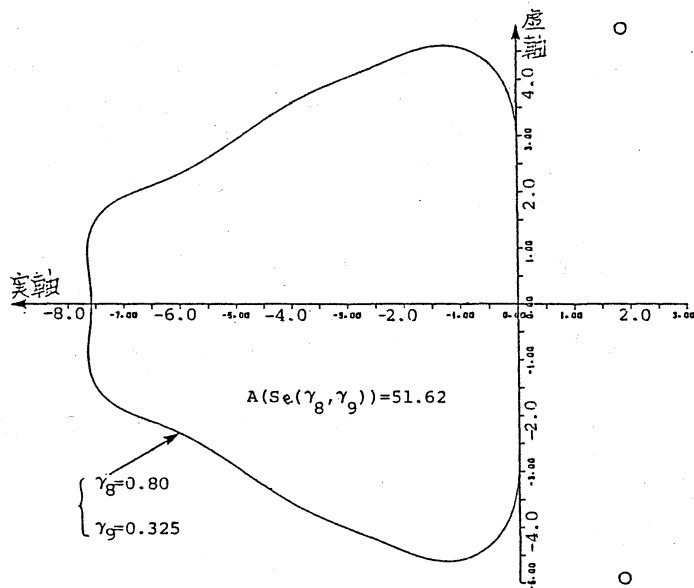


Fig. 16 有効絶対安定領域の面積は最大の場合の絶対安定領域

す。

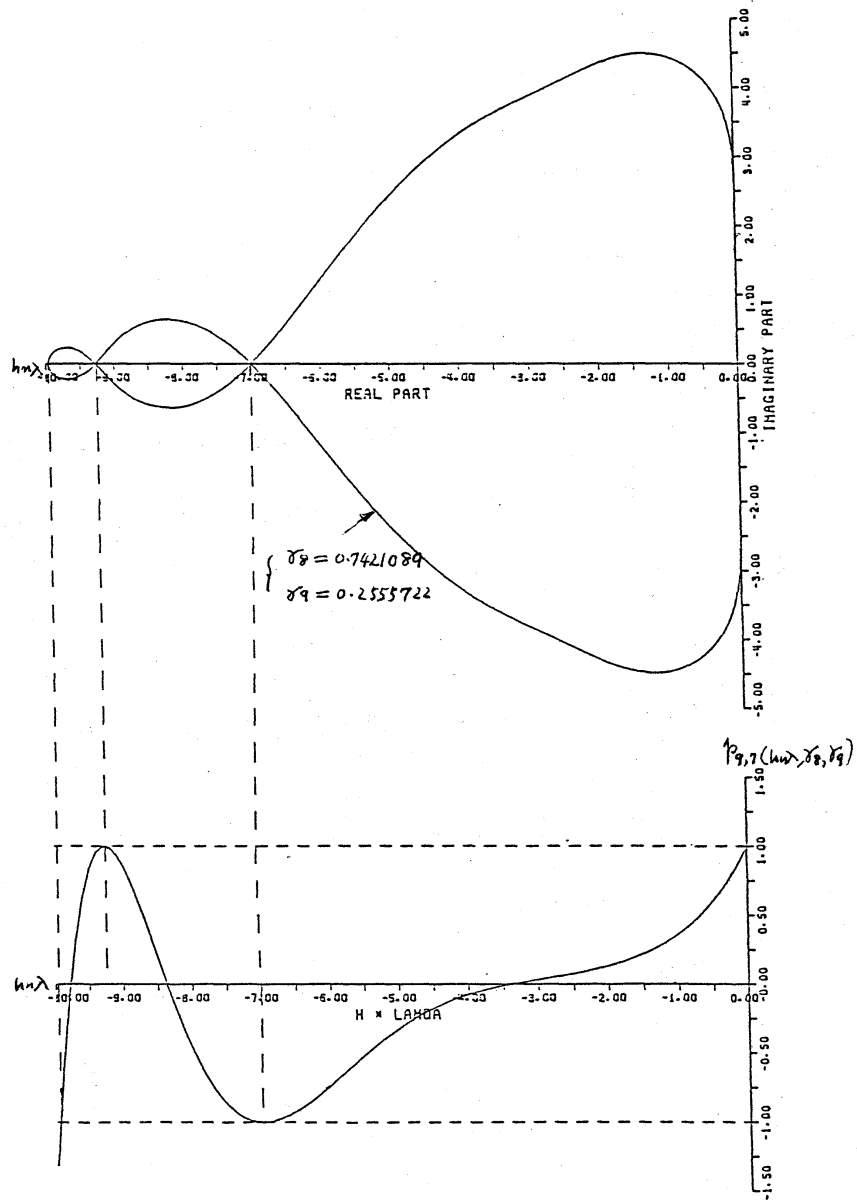


Fig. 17 絶対安定区間最大の場合に対応する安定多項式  
 $y = P_{9,7}(h\lambda, \delta_8, \delta_9)$  のグラフと絶対安定領域

8.2 10 級数 7 次陽的ルンゲ・クッタ法の安定性

紙面の関係で、ここでは 10 級数 7 次法の最大絶対安定区間  
 が、 $\delta_8 = 0.870527$  ,  $\delta_9 = 0.505118$  ,  $\delta_{10} = 0.1347$  の連続ルンゲ



表れ、その下限の絶対値はほぼ 12.0 になること、及び、有効絶対安定領域の面積最大は、 $\delta_9 = 0.87$ ,  $\delta_{10} = 0.515$ ,  $\delta_{10} = 0.145$  の近傍において表れ、その値はほぼ 72.2 であることの指摘に留める。

### 9. 10 段数 8 次陽的ルンゲ・クッタ法の安定性

10 段数で 8 次の精度が可能であるかどうかは未だ知られていない。ここではその存在を仮定し、8.2 同様 10 段数によって達成される安定性の限界について述べる。すなわち、10 段数 8 次法の最大絶対安定区間は、 $\delta_9 = 0.762$ ,  $\delta_{10} = 0.275$  の近傍において表れ、その下限の絶対値はほぼ 10.153 であり、また有効絶対安定領域の面積最大は、 $\delta_9 = 0.8125$ ,  $\delta_{10} = 0.34$  の近傍において表れ、その値はほぼ 58.33 になる。 $(A(\delta_9, \delta_{10}))$  の広い変域における等高線図が得られているが紙面の都合で割愛する。

### 10. おわりに

最後に、陽的ルンゲ・クッタ法の研究を通して気がついたいくつかの事柄を列挙しておく。

(i) 段数が増す程安定性はよくなる。また、同じ段数では低次法の方が目立って安定性が良い(表1, 表2を見よ)。

(ii) 最大絶対安定区間に対応する安定多項式のグラフや絶対安定領域は酷似している。

(iii) 8 段数 6 次法中には、既知公式の  $H_{\text{uta}1}$  及び  $H_{\text{uta}2}$  に比べて、はるかに打ち切り精度や安定性のよい公式の存在が予想され

る。

(iv) 9段数7次法中には、既知公式の“Shankesの公式”よりむしろ、  
かに安定性の面で優れた公式の存在が予想される。

(v)  $m$ 段数  $(m-1)$ 次法の安定多項式を  $P_{m,m-1}(h\lambda, \gamma_m) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(h\lambda)^k}{k!}$

$+ \gamma_m \cdot \frac{(h\lambda)^m}{m!}$  とすると、この方法は  $\gamma_m = 1$  のとき打ち切り精度

が最良になら、近似的に  $m$ 次法に在ると推測される。この命題が、

$m=5$  及び  $6$  において成立することは既に著者によって確認され

て居り、このタイプの残された唯一の方法は7段数6次法である。

表1 高次法の最大絶対安定区間

公式	$\gamma_{m-2}$	$\gamma_{m-1}$	$\gamma_m$	絶対安定区間の下限
5段数4次法	————	————	0.490	-6.06
6段数5次法	————	————	0.525	-6.21
7段数6次法	————	————	0.54731	-6.5111
8段数6次法	————	0.716	0.233	-9.8287
9段数7次法	————	0.742	0.256	-9.9589
10段数7次法	0.870527	0.505118	0.1347	-12.0
10段数8次法	————	0.762	0.275	-10.1530

表2 高次法の最大有効絶対安定領域

公式	$\gamma_{m-2}$	$\gamma_{m-1}$	$\gamma_m$	最大有効絶対安定領域の面積
5段数4次法	————	————	0.540	23.41
6段数5次法	————	————	0.5625	27.05
7段数6次法	————	————	0.589	29.83
8段数6次法	————	0.775	0.2975	45.56
9段数7次法	————	0.80	0.325	51.62
10段数7次法	0.87	0.515	0.145	72.2
10段数8次法	————	0.8125	0.34	58.33

(vi) 絶対安定領域の境界を決定するには  $(h\lambda)$  の高次代数方程式を解く必要があるが、この方程式は高次項の係数の変化に対してかなり敏感であるから注

を要する。

(vii) 5段数及び6段数公式について、著者は安定性を考慮に入れた多くの公式を導いているが、これらの公式の多くが準備が同じ合わずグラフ上に描戴できなかったのは残念である。

文献

1. C. W. Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1972
2. J. D. Lambert, Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1973
3. G. Hall and J. M. Watt (eds.), Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations, Clarendon Press, 1976
4. A. Ralston and P. Rabinowitz, A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, 1978
5. T. E. Hull and R. L. Johnston, Optimum Runge-Kutta methods, Math. Comp., 18, 1964
6. 一松信, 微分方程式と解法, 教育出版, 1973

7 若林晴秀, 昭和58年度計量機科学科修士論文

8. F. Ceschino, Evaluation de l'erreur par pas les problèmes Différentiels, Chiffres, 5, 1962 (この論文で提案されている公式の係数の誤りは著者によって正された (FACOM EDP 論文集 71巻, FACOM 7724-会誌, 1968)。

9. R. H. Merson, An operational method for the study of the integration processes, Proceedings of a Symposium on Data Processing, Weapons Research Establishment, Salisbury, South Australia, 1957
10. H. Gaul, Eine 5-stufige Runge-Kutta Formel für Hand- und Maschinenrechnung, ZAMM., Bd. 59, 1979
11. E. B. Shanks, Solution of differential equations by evaluations of functions, Math. Comp., 20, 1966
12. 田中正次, Runge-Kutta 法の打ち切り誤差の評価について, 情報処理, Vol. 17, No. 12, 1976
13. 戸田英雄・小野令英, 5個の乗数計算に於て実質的に5次の Runge-Kutta 法, 情報処理, Vol. 22, No. 2, 1981
14. J. D. Lawson, An order five Runge-Kutta process with extended region of stability, SIAM J. Numer. Anal. 3, 1966
15. L. Lapidus and J. H. Seinfeld, Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Academic Press, 1971
16. A. H. Stroud, Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Equations, Springer-Verlag, 1974
17. F. Ceschins and J. Kuntzmann, Numerical Solution of Initial Value Problems, Prentice-Hall, Inc., 1966
18. M. K. Jain, Numerical Solution of Differential Equations, John Wiley & Sons, 1979

謝辞 この研究を進めるにあつていろいろと有益な助言を  
いただいた山梨大 田口東助教授, ご協力をいただいた卒業生  
橋田, 弦向, 北沢, 見原, 加茂の諸君, 及び研究室の皆さんに  
心から御礼申し上げます。