数理解析研究所講究録
第 551 巻 1985 年 173-179

統計力学に於けるFeynman図形の自動処理1

岡山理科大学　理学部　応用数学科

坂本薫 (Kaoru Sakamoto)

情報処理センター

青江俊夫 (Toshio Aoe)

序論

量子電気力学の自動処理についての研究され，その計算も可能になつている[1].

私達は統計力学の物理常数を計算する時使用されるFeynman図形から，温度Green（松原関数）によつて求める方法を自動処理化する為の研究をした．　ここでは，電子，フォノンを対象に考えたが，超電導度現象を対象にしてはいない．　Feynman図形の生成と波数ベクトルおよび角周波数の法定には，Interlispでプログラムを作成したが，数式の計算には，数理解析研のReduce3を使用した．　この小論文では，主に自動処理の方法を提案し，計算例については，簡単なものに限定した．

統計力学に於けるＦｅｙｎｍａｎ図形の自動処理は図１の流れ図を実現するとである．

ファインマンダイヤグラムの自動化

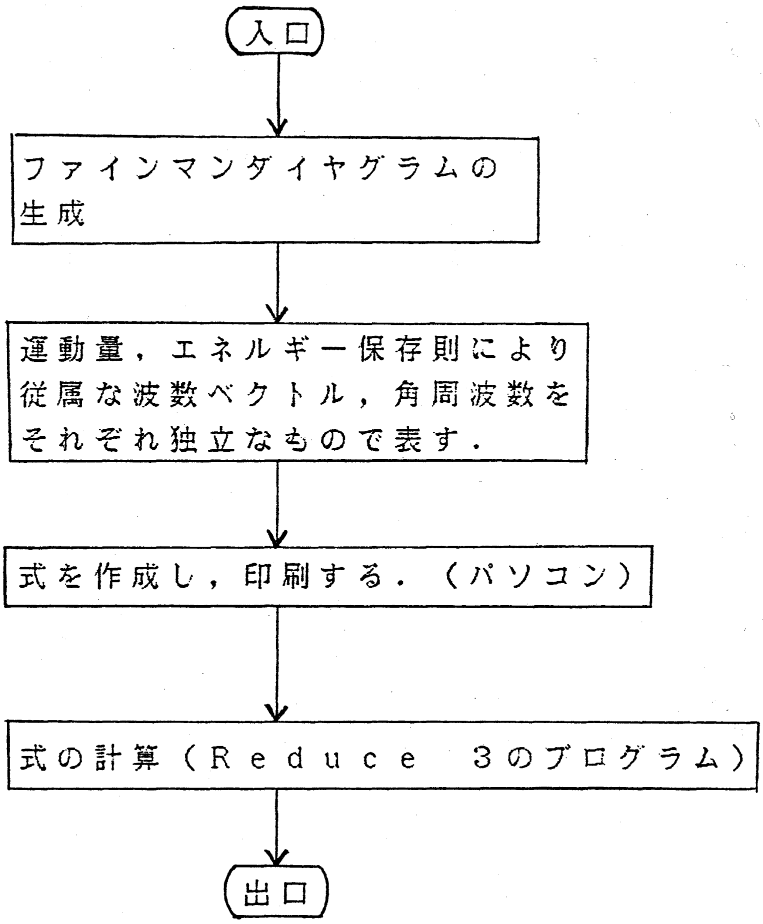

図　1

１．Feynman図形の生成

Feynman図形を作成するためには，Bloch－De Domicis
理を使用して可能なコントラクションをつくればよい.[2]　ここでは，量子電
力学のFeynman図形を生成するため使用されたグラフ理論に依って，トポ
ジイ的に異なった図形を生成する方法を修正する.[3]　粒子間の相互作用を表す
amiltonian 演算子は，図２のように、かかれる.[5,6,7,8]

２．　波数ベクトルと角振動数の決定[4]

ベクトルは外線波数ベクトルと内線波数ベクトルの２種類がある.
２のように波数ベクトルは，左又は右バーテックスに入る又は出る．バーテック
に入る波数ベクトルをそのままのベクトルとし，出るベクトルをマイナスの符号
付けると運動量保存則に依って外線波数ベクトルの総和とすべての右又は左のバ
テックスに於ける内線波数ベクトルの総和は零になる.　図２は従属な波数ベ
トルを他の独立な波数ベクトルの線形結合で表す為の流れ図である.　電子と
ォノンの波数ベクトルは同じように扱う.

角振動数は波数ベクトルと同じように，対応する式で表す.

・ 温度Green関数に対するFeynman図形 [8,9]

.1 外線とつながった1に依って生成したのn次のすべての可能なFeynman図形 ら，波状の線（フォノン線）には

$$D_q(i\nu_\ell) = |\alpha_q|^2\left(\frac{1}{\omega_q+i\nu_\ell} + \frac{1}{\omega_q-i\nu_\ell}\right), \quad \nu_\ell = \frac{2\ell\pi}{\beta}$$

を対応させる．

.2 そのような図形に

$$\frac{(-1)^n(-1)^{n_i}}{n!(2\beta V)^{n_c}(\beta V)^{n_p}}$$

の数係数を対応させる． 但し，n_C はクローン相互作用を表す点線の数，数 n_Pはフォノン線の数，また n`は摂動の次数で $n = n_C + 2n_P$ で与えられる． n_iは電子線が閉じている図形の数である．

3 r,1 の電子線に

$$g_r(i\omega_\ell) = (i\omega_\ell-\varepsilon_r)^{-1}$$

を対応させ，また同時刻の点を結ぶ電子線には

$$(i\omega_\ell-\varepsilon_r)^{-1}\exp(i\omega_\ell 0)$$

を対応させる． 但し r は k_r を表す．

4`運動量，エネルギー保存則は，

図２のフローチャートのように満足されている．

5 内線の独立な波数と角周波数についての和をとる．

4.式の計算

3で得られた，数式を計算する時，波数の大きさと角周波数とスピンについての和が現れる．　それらの和は次のように等価な積分に置きかえる．[8,9,10]

$$\sum_{k\sigma} \quad \to \quad \frac{2V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}$$

$$\frac{1}{\beta}\sum_{m} g(i\omega_m) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{g(z)}{e^{\beta z}+1}\,dz$$

低温の近似として，絶対温度　T=0 の場合を考えるとき，次のように，和を積分に置きかえる．

$$\frac{1}{\beta}\sum_{\ell} \quad \to \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx$$

得られた式は，簡単にするために，主要項のみ残し，他は捨てる．

これらの方法について個々に違うので，実際の例について考慮する．

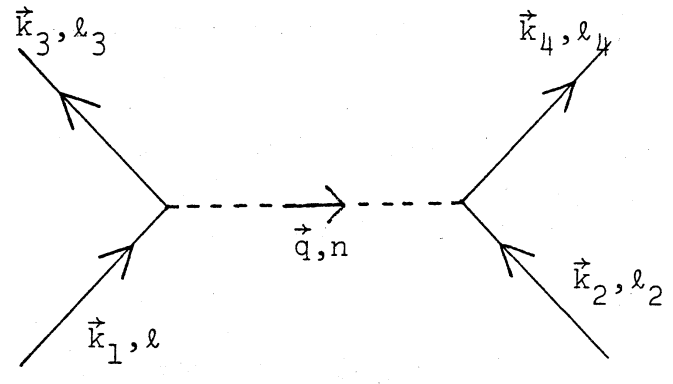

図 2

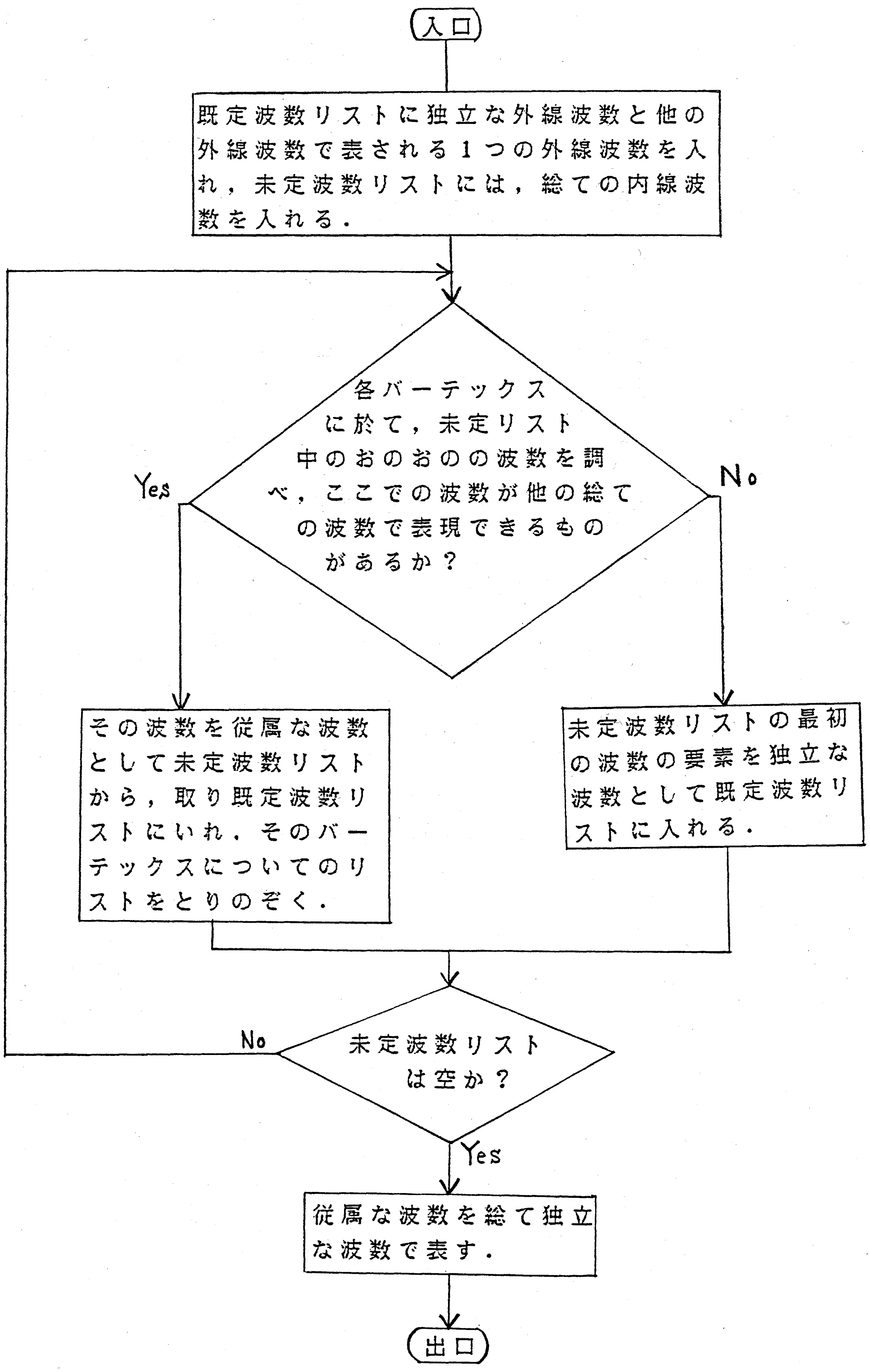
入口
既定波数リストに独立な外線波数と他の外線波数で表される1つの外線波数を入れ，未定波数リストには，総ての内線波数を入れる．
各バーテックスに於て，未定リスト中のおのおのの波数を調べ，ここでの波数が他の総ての波数で表現できるものがあるか？
Yes
No
その波数を従属な波数として未定波数リストから，取り既定波数リストにいれ．そのバーテックスについてのリストをとりのぞく．
未定波数リストの最初の波数の要素を独立な波数として既定波数リストに入れる．
未定波数リストは空か？
No
Yes
従属な波数を総て独立な波数で表す．
出口

図 3

文献

1. A.C. Hearn ,REDUCE USER' S MANUAL Version 3.1(1984).The Rand Corpc
rtion

2. K.Sakamoto and Aoe.J. of Pro. vol 4 no.2 p 89-90(1981)

3. T.Sasaki,Automatic Generation of Feynman Graphs in QED.J.Comp.Phys.
22.2(1976)P189-214

4. 坂本薫，青江俊夫， ファインマン ダイヤグラムから数式への変換プロー
グラムの作成、情報処理学会第２８会（昭和 ５９年前期）６H-7,P159-1

5.高野文彦,多体問題（１９７５）,培風館

6. Fetter and Walecke. Quantum Theory of Many Particle Systems(1971)
McGraw-Hill

8.阿部龍蔵,統計力学,東大出版会

9. Richard D. Mattuck A Guid to Feynman Diagrams in the Many-body Prob
(Second edition) (1976).McGraw-Hill

10. 一松信，留数解析（数学ワンポイント双書２８），共立出版