数理解析研究所講究録
第 552 巻 1985 年 43-48

von Neumann 環の maximal abelian subalgebras への normal なノルム 1 の projection の存在について

新潟大理 富山 淳 (Jun Tomiyama)

M を von Neumann 環でヒルベルト空間 H に作用しているものとする。H 上の有界線形作用素の全体を $B(H)$ とかく。A を今 M の maximal abelian subalgebra (以下略して masa とかくことにする) とし M の元 x について、x を A の unitary u の作用 $\mathrm{ad}u(x) = uxu^*$ で動かしたものの σ-weakly closed な convex hull を $\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}u(x) \mid u \in A_u\}$ とかくことにすると、よく知られた Kakutani-Markov の不動点定理から $\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}u(x) \mid u \in A_u\}$ (以下時には略して $\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}u(x)\}$ とかくこともある) は不動点をもつ。そして A が masa なことから、この不動点は A に属する。即ち任意の $x \in M$ について

$$\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}u(x) \mid u \in A_u\} \cap A \neq \phi.$$

このようなとき M から A へのノルム 1 の projection $\mathcal{E}$ で $\mathcal{E}(x)$ が上の集合に属するようなものがあることはよく知られている。又それは更に精密化して任意の有限個の $x_1, x_2, \cdots x_n$ に対し

て $y_i \in \overline{\mathrm{cov}}\{ad\,u(x_i)\} \cap A$ を指定して $\mathcal{E}(x_i) = y_i$ ($i=1,2,\cdots n$) となるようにとることもできる。ここで今Aへnormalなprojectionが存在したとすると、$\mathcal{E}(\overline{\mathrm{cov}}\{ad\,u(x)\}) = \mathcal{E}(x)$ となるから

$$\overline{\mathrm{cov}}\{ad\,u(x)\} \cap A = \{\mathcal{E}(x)\} \quad (\text{一点のみ})$$

となる。たとえばHが可分なときB(H)にはdiscreteな型のmasaと連続型のmasaが存在するがB(H)より前者の型のmasaにはnormalなprojectionが存在する。このような事柄はAのpure stateのM上へのpure state extensionの一意性に密接に関係している。もしAからMへのpure state extensionがすべて一意であれば、MよりAへのノルム1のprojectionは唯1つしかないことになるから、句論上の共通部分は一点になる。又共通部分が一点とは限らないMの元xが存在すればMよりAへは既にのべたことから少くとも2つ以上のprojectionが存在するからAのpure stateのM上への拡大は一意とは限らなくなる。実際、Kadison-Singer [1]はその先駆的な仕事で上のようにしてB(H)の連続型のmasaのpure stateのpure state extension(実はstate extensionでよい)は一意ではないことを示している。ちなみにB(H)のdiscrete masaのpure state extensionについては、その上のnormalなpure stateの拡大は一意であるがsingularなpure stateの拡大に

ついてはいまだに未解決になっている。

さてここで答えようというのは実は上の逆である。$\overline{\mathrm{co}}\{\mathrm{ad}\,u(x)\}$ と masa A との共通部分が常に一点のときにこの交点を対応させる projection が normal になるのではないかということは大分前から予想されていたが([3])解答が判明しなかった。

しかし問題は最近の次の Szücs の結果によって肯定的に(空間が可分なときには)解決されることになった。

Mを可分なヒルベルト空間上の von Neumann 環とする。

GをM上の σ-weakly continuous な線形写像の有界な半群とし、更に次の条件(*)をみたすとする。

(*) 任意のMの元xについて、$\overline{\mathrm{co}}\{g(x) \mid g\in G\}$ は唯1つの不動点をもつ。

定理 (J. M. Szücs) 上の(*)の仮定の下で写像

$$\varepsilon_G : x\in M \longrightarrow \text{不動点 } x^G$$

は σ-weakly に連続な有界な projection である。また ε_G は G の元の convex sum の列の σ-weak な極限としてかける。

2つの von Neumann 環 M, N の間の有界写像(線形)では、任意の functional $\varphi\in N_*$ について ${}^t\tau(\varphi)\in M_*^{\perp}$ (singular な functional のつくる M^* の部分空間) となるとき singular な写像と

呼ばれている. τ が σ-weak 位相で連続というのは、これに対して ${}^t\tau(N_*) \subset M_*$ ということであるから、singular な写像というのは単に σ-weakly に連続にならないばかりではなく、そのあらゆる連続性の"部分"を全然持っていない写像だといえる.

さて H が可分で無限次元のとき $B(H)$ より連続型の masa へのノルム 1 の projection はすべて singular なことはよく知られている. 従って前述の Kadison-Singer の結果の連続型の masa についての部分は又次のようにも導びける. 即ち上の定理からこのときには $\overline{\mathrm{co}V}(\mathrm{ad}u(x)) \cap A$ が二点以上になる $B(H)$ の元 x が必ず存在する. よって $B(H)$ より A への projection は必ず 2 つ以上存在するから pure state の拡大は一意ではない. この結論は実は任意の properly infinite な von Neumann 環 M について意味をもつ. というのは、このような M の中には必ずその上へのノルム 1 の projection が singular になるような、$B(H)$ での連続型に相応するような masa が数多く存在するからである.

そしてこれらの masa より M への、pure state の pure state extension は一意ではない. ([4] 参照).

最後に定理の証明の鍵になる点をのべておく.

1° H の可分性は、G に各点 σ-weak 收束で位相を入れると、G が可分になることに使われる. それは G を M_* に作用する半群とみたものを G_* とすると、H の可分性から M_* はノルム位相で

可分になっていることから G_* は各点ノルム収束の位相で可分になる。従って G は前述の位相で可分になる。

2° $\mathcal{E}_G$ が G からの可算列で近似できること。1° から G を可算な群と考えてもよいことになるので、$G=\{g_1, g_2, g_3, \cdots\}$ とおくと求める近似列は

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{n^n}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n} g^{i_1}\cdot g^{i_2}\cdots g^{i_n} \quad (n=1,2,3\cdots)$$

で与えられる。ここで M の有界閉球は σ-weak 位相で metrizable compact であるから $\mathcal{E}_n(x)$ が任意の元 x について x^G に σ-weak に収束することを示すには任意の部分列 $\{\mathcal{E}_{n_k}(x)\}$ が x^G に収束する部分列を含むことを言えばよい。そしてこの部分列 $\{\mathcal{E}_{n_k}(x)\}$ は上の compact 性よりとにかくその極限が $\overline{\mathrm{cov}}(g(x))$ に入っている収束部分列をもつわけであるから、その極限が G の不動点であることを示せばよく、その証明に上の $\mathcal{E}_n$ の形が利用される。G の有界性もここで用いる。

3° $\mathcal{E}_G$ が normal なこと。$\mathcal{E}_n$ を M_* に作用する写像と考えたものを $\mathcal{E}_{n_*}$ とかくと、$x\in M$ について

$$(\mathcal{E}_{n_*}-\mathcal{E}_{m_*})(\varphi)(x) = \varphi((\mathcal{E}_n-\mathcal{E}_m)(x)) \to 0 \qquad n,m\to\infty$$

よって $\{\mathcal{E}_{n_*}(\varphi)\}$ は M_* の weakly Cauchy 列である。M_* は weakly sequentially complete であるから $\{\mathcal{E}_{n_*}\}$ の極限の写像 π が得られる。これから π は M_* の有界写像であり $\mathcal{E}={}^t\pi$ は有界

で normal な G-不動点の集合への projection になる.

参考文献

1. R. V. Kadison and I. M. Singer, Extensions of pure states, Amer. J. Math., 81 (1959), 383-400.

2. J. M. Szücs, Some weak $*$-ergodic theorems, Acta Sci. Math., 45 (1983), 389-394

3. J. Tomiyama, Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Mimeographic Note, 1970, Univ. Copenhagen.

4. J. Tomiyama, On some types of maximal abelian subalgebras, J. Functional Analysis, 10 (1972), 373-386.