数理解析研究所講究録
第552巻 1985年 69-78



# Sofic System と Sofic 測度

九大理　藤原雅子（Masako Fujiwara）
九大教養　浜地敏弘（Toshihiro Hamachi）
九大教養　押川元重（Motosige Osikawa）

Sofic System の研究は多くの研究者（[1]～[22]）によって集中的に熱気をもって現在進行中である。作用素環論との関連からすれば Sofic System からつくられる $C^*$-環の研究が考えられるが，この面での研究成果はまだみられない。ここでは，Sofic System の定義を紹介したあとで，Markov 測度よりも広いクラスである Sofic 測度を定義してその基本性質を論じる。

## 1. Sofic System の定義

有限集合 $A$ の両側無限直積集合 $A^{\mathbb{Z}}$ を考える。$A^{\mathbb{Z}}$ の元 $a=(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ に対して，$\sigma a=(a_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ とすれば，$\sigma$ は $A^{\mathbb{Z}}$ から $A^{\mathbb{Z}}$ の上への1対1写像である。$\sigma$ を Shift という。$A^{\mathbb{Z}}$ に集合 $A$ 上の離散位相の無限直積位相を考え

る。この位相のもとでShift $\sigma$ および $\sigma^{-1}$ は連続となる。

$A^{\mathbb{Z}}$ の閉部分集合Xで Shift 不変（$\sigma X = X$）なものをSubshift という。Subshift X にはその上の変換として，Shift $\sigma$ を考える。

Subshift の1つのクラスが Topological Markov Chain であり，さらにそれを含むクラスが Subshift of Finite Type である。実は，Subshift of Finite Type は Topological Markov Chain と同型だから，同型の意味ではこれら２つのクラスは同じである。Sofic System は Subshift of Finite Type を含む真に（同型の意味でも）広いクラスである。Sofic System の定義の仕方はいろいろあるが，Sofic System の諸側面をみるために，以下に互に同値な定義を5つあげることにする。

（1）弧に名前がつけられた有向グラフによる定義

有限集合 $\mathcal{S}$ を端点集合とする有向グラフを考え，その各弧には有限集合Aの元が対応しているものとする。$\mathcal{S}$ の両側無限直積集合 $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ の元 $s = (s_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ で，各 $i \in \mathbb{Z}$ について，$s_i$ を始点とし，$s_{i+1}$ を終点とする弧が存在するものを考える。$s_i$ を始点とし，$s_{i+1}$ を終点とする弧の1つの名前（その弧に対応するAの元）を $a_i$ とすると，$a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ は $A^{\mathbb{Z}}$ の元である。このようにしてできる $a = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ の

全体をXとすると，X は $A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift である。 Xを弧に名前がつけられた有向グラフが定める Sofic System という。

（2）Topological Markov Chain の1-block map による像としての定義

有限集合Bから有限集合Aへの写像 $\varphi$ に対して，$B^{\mathbb{Z}}$ から $A^{\mathbb{Z}}$ への写像 $\Phi$ を $\Phi b = (\varphi(b_i))_{i\in\mathbb{Z}}$，$b = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in B^{\mathbb{Z}}$ で定義する。 $\Phi$ を $B^{\mathbb{Z}}$ から $A^{\mathbb{Z}}$ への 1-block map という。 $Y \subset B^{\mathbb{Z}}$ を Topological Markov Chain とするとき，1-block map $\Phi$ による像 $\Phi(Y)$ をXとすると，Xは $A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift である。 Xを Topological Markov Chain Y と 1-block map $\Phi$ が定める Sofic System という。

（3）非負行列による定義

$P(a)$，$a \in A$ を有限集合Aをパラメータ集合とする $k \times k$ 非負行列の集合とする。（$k < \infty$）． $A^{\mathbb{Z}}$ の元 $a = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ で，任意の $n, m \in \mathbb{Z}$ $(n < m)$ について，$P(a_n)P(a_{n+1}) \cdots P(a_{m-1})P(a_m)$ が零行列でないようなものの全体をXとすると，X は $A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift である。 Xを $P(a)$，$a \in X$ が定める Sofic System という。

（4） 有限半群による定義

$G$を有限集合$A$を生成元集合とする有限半群で，$G$の任意の元$g$に対して $ge=eg=e$ をみたす$G$の元$e$が存在するようなものとする。 $A^{\mathbb{Z}}$ の元 $a=(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ で，任意の$n, m\in\mathbb{Z}$ $(n<m)$ について，$a_n a_{n+1}\cdots a_{m-1}a_m \neq e$ をみたすものの全体を$X$とすると，$X$は$A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift である。 $X$を有限半群$G$が定める Sofic System という。

（5） Shift 不変な閉集合の特長づけによる定義

$A^{\mathbb{Z}}$ の Subshift を$X$とする。$A^{\mathbb{Z}-\mathbb{N}}$ の元 $a^-=(a_i)_{i\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}}$ で，$L_{a^-}=\{a^+=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}\ ;\ (a^-, a^+)\in X\}\neq\phi$ となるものの全体を$X^-$とする。$X^-$の２つの元$a^-, b^-$について，$L_{a^-}=L_{b^-}$ がなりたつとき，同値 $a^-\sim b^-$ であるという。 同値類 $X^-/\sim$ が有限集合となるとき，$X$を Sofic System という。

## 2． Sofic 測度

$A$を高々可算集合とする。$g(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A^n$ は，$g(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqq 0$ および

$$\sum_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A^n} g(a_1,a_2,\cdots,a_n)=1$$ をみたすものとする。

また，$P(a_1,a_2,\cdots,a_n\,;\,a_{n+1})$，$(a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1})\in A^{n+1}$ は

$P(a_1,a_2,\cdots,a_n\,;\,a_{n+1})\geqq 0$ および

$$\sum_{a_{n+1}\in A} P(a_1,a_2,\cdots,a_n\,;a_{n+1})=1 \quad , \quad (a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A^n$$

をみたすものとする。無限直積集合 $A^{\mathbb{Z}}$ の cylinder 集合

$[a_1,a_2,\cdots,a_\ell]=\{x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in A^{\mathbb{N}}\ ;\ x_i=a_i\ ,\ i=1,2,\cdots,\ell\}$

$(\ell\geqq n)$ に対して，

$$\mu([a_1,a_2,\cdots,a_n])=q(a_1,a_2,\cdots,a_n)P(a_1,a_2,\cdots,a_n\,;a_{n+1})$$
$$\times P(a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}\,;a_{n+2})\times\cdots\times P(a_{\ell-n},a_{\ell-n+1},\cdots,a_{\ell-1}\,;a_\ell)$$

とおくと，$\mu$ は $A^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度に拡張できる。拡張してえられる測度 $\mu$ を $A^{\mathbb{N}}$ 上の $n$ 重 Markov 測度という。特に $n=1$ のとき，単に Markov 測度という。

$A$ を高々可算集合とする。$q$ を $1\times k$ 確率行列とする。$(k\leqq\infty)$。また，$P(a)$, $a\in A$ を $k\times k$ 非負行列の集合で，$P=\sum_{a\in A}P(a)$ が $k\times k$ 確率行列となるものとする。$A^{\mathbb{N}}$ の cylinder 集合 $[a_1,a_2,\cdots,a_\ell]$ に対して，

$$\mu([a_1,a_2,\cdots,a_\ell])=qP(a_1)P(a_2)\cdots P(a_{\ell-1})P(a_\ell)\mathbb{1}$$

とする。但し，$\mathbb{1}$ は全ての成分が 1 である $k\times 1$ 行列とする。$\mu$ は $A^{\mathbb{N}}$ 上の確率測度に拡張できる。拡張してえられる測度 $\mu$ を $A^{\mathbb{N}}$ 上の Sofic 測度という。

定理

$n$ 重 Markov 測度は Sofic 測度である。

証明

$q(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ および $P(a_1,a_2,\cdots,a_n;a_{n+1})$ から定まる $n$ 重 Markov 測度を $\mu$ とする。 $a\in A$ に対して,

$$P(a)_{(a_1,a_2,\cdots,a_n),\,(b_1,b_2,\cdots,b_n)} = \delta_{(a_1,a_2,\cdots,a_n),(a,b_1,b_2,\cdots,b_{n-1})} \times P(a_1,a_2,\cdots,a_n;b_n)$$

とおくと, $q$ および $P(a)$, $a\in A$ から定まる Sofic 測度は $\mu$ と一致する。//

定理

$\mu$ が Sofic 測度であるための必要十分条件は, $\mu$ が Markov 測度の 1-block map による像測度となることである。

証明

十分性: $q(b)$ および $P(b_1;b_2)$ から定まる $\mathbb{B}^{\mathbb{N}}$ 上の Markov 測度を $\nu$ とする。写像 $\varphi: B\to A$ が定める $B^{\mathbb{N}}$ から $A^{\mathbb{N}}$ への 1-block map を $\Phi$ とする。

$$P(a)_{b_1,b_2} = \delta_{\varphi(b_1),a}\, P(b_1;b_2) \quad , \; b_1,b_2\in B,\; a\in A$$

とおくと, $q$ および $P(a)$, $a\in A$ から定まる $A^{\mathbb{N}}$ 上の sofic 測度 $\mu$ に対して,

$$\mu([a_1,a_2,\cdots,a_l]) = \nu(\Phi^{-1}[a_1,a_2,\cdots,a_l]) \qquad a_1,a_2,\cdots,a_l\in A$$

がなりたつ。

必要性: $q$ および $P(a)$, $a\in A$ から定まる Sofic

測度を$\mu$とする。 $B=\{(i,a,j)\ ;\ P(a)_{i,j}>0\}$ として，写像 $\varphi : B \longrightarrow A$ を $\varphi(i,a,j)=a$ で定める。また，$\varphi$が定める $B^{\mathbb{N}}$ から $A^{\mathbb{N}}$ への 1-block map を $\Phi$とする。 $\xi(i,a,j)=\xi(i)P(a)_{i,j}$ および $P_{(i,a,j),(i',a',j')}=\delta_{j,i'}P(a)_{i',j'}$ とおき，$\xi$ および $P$ から定まる Markov 測度を$\mu$ とすると，

$$\mu([a_1,a_2,\cdots,a_\ell])=\nu(\Phi^{-1}[a_1,a_2,\cdots,a_\ell])$$
$$a_1,a_2,\cdots,a_\ell\in A$$

がなりたつ。 //

$\xi$ および $P(a),a\in A$ が定める $A^{\mathbb{N}}$ 上の Sofic 測度は，$\xi P=\xi$ （但し $P=\sum_{a\in A}P(a)$ ）をみたすとき，Shift 不変となる。 このような $\xi$ および $P(a),a\in A$ に対しては，両側無限直積集合 $A^{\mathbb{Z}}$ 上の Sofic 測度が定義できて，これもまた Shift 不変である。 Sofic System の平衡測度（即ち，Shift 不変な確率測度で，その測度に関する metrical entropy が topological entropy に一致するもの）は Sofic 測度であることを示すことができる。

## Sofic System 文献

[1] M. Boyle : Topological Orbit Equivalence and Factor Maps in Symbolic Dynamics. Preprint

[2] M. Boyle : Lower Entropy factors of Sofic Systems. Preprint.

[3] M. Boyle, B. Kitchens and B. Marcus : Minimal Covers for Sofic Systems. Preprint.

[4] M. Boyle and S. Tuncel : Infinite-to-one Codes and Markov Measures. Preprint.

[5] E. Coven and M. Paul : Sofic Systems. Israel J. Math. 20 (1975) 165-177.

[6] E. Coven and M. Paul : Finite Proceedure for Sofic Systems. Monats. Math. 83 (1977) 265-278.

[7] R. Fisher : Sofic Systems and Graphs. Monats. Math. 80 (1975) 179-186.

[8] R. Fisher : Graphs and Symbolic Dynamics. Colloq. Math. Soc. Jonos Bolyai, Topics in Info. Theory (1975).

[9] B. Kitchens : Continuity Properties of Factor Maps in Ergodic Theory. Ph. D. Thesis Univ. North Calolina, (1981).

[10] B. Kitchens : An Invariant for Continuos Factors of Markov Shifts. Proc. A.M.S. 83 (1981) 825-828.

[11] B. Kitchens and S. Tuncel : Semigroups and Graphs for Sofic Systems. Preprint.

[12] B. Kitchens and S. Tuncel : Finitary Measures for Subshifts of Finite Type and Sofic Systems. Preprint.

[13] W. Krieger : On Sofic Systems I.

[14] B. Marcus : Factors and Extensions of Full Shifts. Monats. Math. 88 (1979) 239–247.

[15] B. Marcus : Sofic Systems and Encoding Data.

[16] M. Nasu : Uniformly Finite-to-one and onto Extensions of Homomorphisms between Strongly Connected Graphs. Discrete Math. 39 (1982) 171–197.

[17] M. Nasu : An Invariant for Bounded-to-one Factor Maps between Transitive Sofic Subshifts.

[18] M. Nasu : Constant-to-one and onto Grobal Maps of Homomorphisms between Strongly Connected Graphs.

[19] M. Nasu : Nonnegative Matrix Systems and Sophic Systems.

[20] M. Nasu : Topological Conjugacy for Sofic Systems.

[21] W. Parry : A Finitary Classification of Topological Markov Chains and Sofic Systems. Math. System

Theory 3 (1977) 86-92.

[22] B. Weiss : Subshifts of Finite type and Sofic Systems. Monats. Math. 77 (1973) 462-474.