

# 1 階微分方程式に対する Chebyshev - Galerkin 法 による特異積分

福井大工 長谷川武光 (Takemitsu Hasegawa)

名大工 鳥居 達生 (Tatsuo Torii)

## 1. はじめに

### 半無限区間の振動積分

$$I^c = \int_a^\infty f(x) \cos \omega x dx \quad (I^s = \int_a^\infty f(x) \sin \omega x dx), \quad a \geq 0, \quad (1)$$

の近似値を求めることは,  $f(x)$  が定符号 (ここでは正と仮定) かつ緩減少関数である場合非常に困難である。実際, 振動の半周期  $\pi/\omega$  毎に積分区間を分けると (1) は次のように符号が交代する無限級数で表わされる。

$$I^c = \int_a^{x_0} f(x) \cos \omega x dx + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \cos \omega x dx \quad (2)$$

ここで,  $x_0$  は  $a$  に最も近い  $\cos \omega x = 0$  の根で  $x_0 > a$ ,

$$x_j = x_0 + \pi j / \omega \quad (3)$$

関数  $f(x)$  が緩減少であると級数 (2) の収束は大変遅い。

数列の加速法を級数 (2) に適用して収束を速める工夫が多くの人々によりなされている<sup>1), 2), 3), 4), 5)</sup>。

Longman<sup>6), 7)</sup> は Euler 変換を用いて初めて加速法の適用を試

みた。Shanks変換(εアルゴリズム)の適用はChisholmsら<sup>8)</sup>およびAlayliogluら<sup>9)</sup>によって行われた。Levin変換の適用も試みられている。<sup>10), 11)</sup> 緩減少関数の振動積分に対する加速法としては, 現段階ではSidiの方法<sup>12), 13)</sup>が最も秀れているようである。われわれはSidiの加速法を用いるが, これが有効に作用する関数の族を示しておく。半無限区間 $[a, \infty)$ で定義されたある関数 $f(x)$ が次の条件(i)(ii)(iii)を満足するとき,  $f(x)$ は関数族 $A^{(\gamma)}$ に属するという。

(i)  $f(x)$ が $[x, \infty)$ で無限回微分可能で

(ii)  $x \rightarrow \infty$ で $f(x)$ が漸近展開

$$f(x) \sim x^{-\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} f_i / x^i \quad (4)$$

をもち

(iii)  $f(x)$ の全ての階数の微分も(4)の右辺を項別微分してえられる漸近展開をもつ。

ここで, 漸近展開(4)は次のように定義される。全ての正の整数 $n$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left\{ x^{-\gamma} f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f_i / x^i \right\} = f_n, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\gamma} f(x) = f_0.$$

$\gamma < 0$ ならば積分(1)が存在する。しかも加速が有効に働くことが示される。

振動積分(1)を有限区間 $[a, x)$ と残り $(x, \infty)$ の2つの区間の積分

$$I^c = \int_a^x f(x) \cos \omega x dx + \int_x^\infty f(x) \cos \omega x dx \quad (5)$$

に分ける。上の右辺の第2項  $(x, \infty)$  区間の積分の漸近的な表示は関数  $f(x)$  とその微分  $f'(x)$  を用いて次のように表わすことができる。いま被積分関数を

$$g(x) = f(x) \cos \omega x$$

によって定義すると、求める振動積分 (1) は適当な  $\beta_0(x) (\in A^{(0)})$ ,  $\beta_1(x) (\in A^{(0)})$  を用いて

$$\int_x^\infty g(x) dx = x^{-1} g(x) \beta_0(x) + g'(x) \beta_1(x) \quad (6)$$

と表わされる。(3) で定義される点  $x_j$  が  $\cos \omega x$  の一つの零点であることに注意すれば、 $x = x_j$  のとき上式の右辺は  $g'(x_j) \beta_1(x_j)$  となるので (5) より振動積分  $I^c$  の漸近展開として

$$I^c \sim \int_a^{x_j} f(x) \cos \omega x dx - \omega f(x_j) \sin(\omega x_j) (b_0 + b_1/x_j + b_2/x_j^2 + \dots) \quad (7)$$

をうる。*Sidi*<sup>(15), (16)</sup> はこの漸近表示 (7) に対して  $j=0, 1, 2, \dots$  と増しながら一般化リチャードソン補外 (W変換) を適用して加速すると収束が速いことを示した。

本論文では、この *Sidi* の加速法を利用して、要求精度  $\varepsilon$  に対して

$$|I^c - I_N^c| < \varepsilon$$

を満足する近似値  $I_N^c$  を与える能率的な自動積分法について述べる。すなわち、加速法の入力の数列である (7) の右辺第1項

$$J(a, x_j) = \int_a^{x_j} f(x) \cos \omega x dx, \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

をできるだけ少ない標本数で評価することが問題となる。そのために次の不定積分

$$G(t) = e^{-iLt} \int_0^t e^{iLt} F(t) dt \quad (9)$$

を考えれば十分である。ただし  $F \in A^{(\gamma)}$  ( $\gamma < 0$ )。これを敢えて1階微分方程式

$$G'(t) + iL G(t) = F(t), \quad G(0) = 0 \quad (10)$$

の積分に書きかえる。この微分方程式(10)を区間 $[0, 1]$ 上でチェビシェフ級数展開法を用いて解く。区間 $[0, 1]$ は1次変換によって任意の区間に拡張できる。

そこで、与えられた関数 $F(t)$ をずらしチェビシェフ級数で展開し

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} ' a_k T_k^*(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (11)$$

とする。ここで和 $\Sigma'$ は初項のみ $1/2$ 倍して総和する二を意味する。未知関数 $G(t)$ の展開を

$$G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} ' c_k T_k^*(t) \quad (12)$$

とおく。ただし $T_k^*(t)$ は $k$ 次ずらしチェビシェフ多項式で $T_k^*(t) = T_k(2t-1)$ ,  $T_k(x) = \cos k\theta$  ( $x = \cos \theta$ )で定義される。微分方程式(10)の積分形

$$G(t) + iL \int_0^t G(t) dt = \int_0^t F(t) dt$$

にこれらの関数(11), (12)を代入し係数比較により次の漸化式をうる。

$$c_{k-1} + \frac{4k}{iL} c_k - c_{k+1} = \frac{1}{iL} (a_{k-1} - a_{k+1}), \quad k \geq 1 \quad (13)$$

$G(t)$ の初期条件  $G(0) = 0$  より, 上式の規格化条件は

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k = 0 \quad (14)$$

となる。漸化式の最小解が求める関数  $G(t)$  のチェビシェフ展開係数である。これで振動積分の不定積分(9)が確定したことになる。

ここで非同次3項漸化式(13)の最小解の収束のオーダーについて簡単に調べよう。最小解  $C_k$  は特解  $d_k$  と(14)の右辺を0とした同次3項漸化式の2つの基本解の1つ変形ベッセル関数  $I_k(-iL/2)$  との和

$$C_k = d_k + \lambda I_k(-iL/2) \quad (15)$$

で表わされる。定数  $\lambda$  は規格化条件(14)を満足するように決定される。1階微分方程式(10)の右辺  $F(z)$  ( $z$  は複素数)が有理関数ならば, そのチェビシェフ展開係数は  $|a_k| = O(r^{-k})$  ( $r$  は定数で,  $r > 1$ ) の速さで0に収束するので, 特解  $d_k$  も  $r^{-k}$  のオーダーとなる。一方  $k > [L/2]$  となる  $k$  に対して  $|I_k(-iL/2)|$  は急速に減少し漸近的に

$$|I_k(-iL/2)| \sim (L/4)^k / k! \quad (16)$$

で評価される。実際上は,  $k$  が  $[L/2]$  に近い場合も上の評価は良い近似である。結局  $k$  が十分大ならば  $C_k = O(r^{-k})$  となる。

加速法の入力の数列は積分(8)で与えられるが, 数値積分(8)の標本数は区間の分割に著しく影響される。われわれは経験的ではあるが次のような分割の方法を提案する。要求精度  $\varepsilon$

に依存して番号  $l = \{[0.7 \log_{10} \varepsilon^{-1} + 3]$  の整数部分} を定め、これに応じて区間を  $K_0 = [a, x_2]$ ,  $K_1 = [x_2, x_{2+l}]$ ,  $\dots$ ,  $K_{j+1} = [x_{2+jl}, x_{2+(j+1)l}]$ ,  $\dots$  と分ける。各  $K_{j+1}$  区間を変数変換  $x = Lt/\omega + x_{2+jl}$  により  $[0, 1]$  区間に移し、(9)において

$$F(t) = f(Lt/\omega + x_{2+jl}) \quad , \quad L = \pi l$$

とおけば

$$\int_{x_{2+jl}}^x f(x) e^{i\omega x} dx = \frac{L}{\omega} e^{i\omega x_{2+jl}} e^{iLt} G(t) \quad , \quad x \in K_{j+1} \quad , \quad (17)$$

と表わされる。最初の区間  $K_0$  だけは特別に扱って

$$\int_a^x f(x) e^{i\omega x} dx = \left(\frac{L}{\omega} + x_0 - a\right) e^{i\omega(x_0 - a)} e^{iLt} G(t) \quad , \quad x \in K_0 \quad (18)$$

$$F(t) = f\left(\left(\frac{L}{\omega} + x_0 - a\right)t + a\right) \quad L = \pi$$

である。  $G(t)$  は区間  $K_{j+1}$  に依存していることに注意しておく。既知関数  $F(t)$  のチェビシェフ級数展開には、標本数漸増型の関数入力の FFT<sup>(17)</sup> を用いる。3項漸化式の最小解を安定に求める算法<sup>(18)</sup> が1階微分方程式の解法に有効に使われていることに注意しておく。

## 2. 振動積分の不定積分

与えられた関数  $F(t)$  を倍々より緩やかに項数を増しながらずらしチェビシェフ展開の列で近似する方法<sup>(17)</sup> と、そのときの不定積分(9)の誤差推定について述べる。

3項漸化式(13)の右辺に現われる  $a_k$  は  $F(t)$  の(連続型)チェビ

チェビシェフ級数展開を次数  $N$  の (離散型) チェビシェフ級数

$$p_N(t) = \sum_{k=0}^N {}'' a_k^N T_k^*(t) \quad (19)$$

で近似する。ここで  $\Sigma''$  は初項と末項のみ  $1/2$  倍して総和することを意味する。この展開の次数  $N$  を  $2^n, 3 \times 2^{n-1}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) と倍々より緩やかに増して近似多項式の列  $\{p_N(t)\}$  の作り方を示そう。  $N=2^n$  と仮定する。式 (19) の係数  $a_k^N$  は  $N+1$  次多項式

$$\omega_{N+1}(t) = T_{N+1}(t) - T_{N-1}^*(t) \quad (20)$$

の零点  $t_m = \cos^2 \pi m / (2N)$  ( $0 \leq m \leq N$ ) 上で (19) が  $F(t)$  の補間式となる条件

$$F(t_m) = \sum_{k=0}^N {}'' a_k^N T_k^*(t_m) \quad , \quad 0 \leq m \leq N \quad (21)$$

より決定される。すなわち

$$a_k^N = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^N {}'' F(t_m) T_k^*(t_m) \quad (22)$$

つぎに (22) の右辺が与えられたとして、 $T_{N/2}^*(t) - \cos \pi/4 = 0$  の  $N/2$  個の根  $u_m$

$$u_m = \cos^2 \theta_m / 2 \quad , \quad \theta_m = 4\pi(m + \sqrt{8}) / N \quad (23)$$

を追加して  $N+N/2$  次チェビシェフ級数展開  $p_{N+N/2}(t)$  をうる。

$$p_{N+N/2}(t) = \sum_{k=0}^N {}'' a_k^N T_k^*(t) + \sum_{k=1}^{N/2} B_k \{T_{N-k}^*(t) - T_{N+k}^*(t)\} \quad (24)$$

補間係数  $B_k$  の計算法については文献 (7) 参照。さらに

$T_{N/2}^*(t) + \cos \pi/4 = 0$  の  $N/2$  個の根を標本点に追加すると

$$\omega_{2N+1}(t) = 4\omega_{N+1}(t) \{T_{N/2}^*(t) - \cos \frac{\pi}{4}\} \{T_{N/2}^*(t) + \cos \frac{\pi}{4}\}$$

であるから倍の次数  $2N$  のチェビシェフ展開 (19) がえられる。以上

の手順を繰返して倍々より緩やかに次数を増すチェビシェフ展開の列が作られる。

このようにしてえられた近似多項式  $p_N(t)$  または  $p_{N+N/2}(t)$  で  $F(t)$  を近似したときの不定積分 (9) の誤差推定は以下のようにする。簡単のため  $F(t)$  に次の仮定をおく。複素平面  $Z$  において 2 点 0 と 1 を焦点とする楕円

$$C_f : |2Z - 1 + 2\sqrt{Z^2 - Z}| = \rho > 1$$

の外側に  $F(Z)$  は  $J$  個の単極  $z_j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) をもつ有理関数とする。すると文献 (9) で述べた方法と類似の方法によって上述の誤差は

$$e = \left| e^{-ilt} \int_0^t e^{ilt} \{F(t) - p_N(t)\} dt \right| \leq |a_N^N| 4r / (r-1)^2 \quad (25)$$

によって推定できる。ここで  $r = \min_j |2z_j - 1 + 2\sqrt{z_j^2 - z_j}| > 1$ 。  $F(t)$  のチェビシェフ展開係数は  $|a_k^N| = O(r^{-k})$  のオーダーで収束することから、実際には  $r$  は  $|a_k^N|$  の漸近的振舞いから推定される。  $N+N/2$  次チェビシェフ展開 (24) に対しても

$$e = \left| e^{-ilt} \int_0^t e^{ilt} \{F(t) - p_{N+N/2}(t)\} dt \right| \leq (2+\sqrt{2}) |B_{N/2}| 4r / (r-1)^2 \quad (26)$$

によって推定される。

### 3. 加速法

振動積分  $I^c$  の漸近展開が (7) の形で表わされることを *Sidi* に従って示す。まず被積分関数  $g(x) = f(x) \cos \omega x$  が次の関係



$$g(x) = p_1(x) g'(x) + p_2(x) g''(x) \quad (27)$$

$$p_1(x) = 2f(x)f'(x) / \{\omega^2 f^2(x) + 2f''(x) - f(x)f''(x)\}$$

$$p_2(x) = -f^2(x) / \{\omega^2 f^2(x) + 2f''(x) - f(x)f''(x)\}$$

を満足する。なぜなら  $g(x)/f(x) = \cos \omega x$  であるから  $(g/f)'' + \omega^2(g/f) = 0$  よって (27) が成立つ。  $f \in A^{(r)}$  ( $r < 0$ ) であることから  $p_1 \in A^{(-1)}$ ,  $p_2 \in A^{(0)}$  となる。さらに (27) を (6) の左辺に代入し部分積分を繰返し, かつ  $p_1, p_2$  の上記の漸近的性質を利用すると容易に (6) の右辺が導かれる。式 (5) と (6) で  $x = x_j$  とおくと  $g(x_j) = 0$  より漸近展開 (7) がえられる。

変数変換  $y = 1/x$  とおき

$$\varphi(y_j) = -\omega f(x_j) \sin \omega x_j, \quad \psi(y_j) = \int_a^{x_j} g(x) dx$$

とおくと (7) は

$$I^c \sim \psi(y_j) + \varphi(y_j) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k y_j^k \quad (28)$$

と表わされる。さて  $I^c$  の近似値として

$$W_{m,n} = \psi(y_j) + \varphi(y_j) \sum_{k=0}^m \bar{\beta}_k y_j^k \quad n \leq j \leq n+m+1 \quad (29)$$

を仮定する。  $I^c$  が  $j$  に無関係であることからこのようにおく。ここで  $\bar{\beta}_k$  は適当なパラメータであり,  $I^c$  と  $W_{m,n}$  は定数である。さらに任意の関数  $h(y)$  の  $m$  階差分商を  $D_{m,n}\{h(y)\}$  で表わす。すなわち

$$D_{m,n}\{h(y)\} = h[y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+m+1}]$$

$h(y)$  が  $m$  次以下の多項式なら  $D_{m,n}\{h(y)\} = 0$  であることに注

意して(29)の両辺を $\varphi(y_j)$ で除した式の差分商を求めると

SidiのW変換<sup>(15), (16)</sup>

$$W_{m,n} = D_{m,n} \{ \psi(y) / \varphi(y) \} / D_{m,n} \{ 1 / \varphi(y) \} \quad (30)$$

がえられる。このW変換の収束性について次の結果が知られている。

$$(1) n \text{ 固定}, m \rightarrow \infty : |I^c - W_{m,n}| = o(m^{-\rho}), \rho \text{ 任意}, \rho > 0$$

$$(2) m \text{ 固定}, n \rightarrow \infty : |I^c - W_{m,n}| = o(\lambda_n^{-m-1})$$

したがって(1)の方が(2)より速い。さらに性質 $\varphi(y_j)\varphi(y_{j+1}) < 0$ を用いると、このW変換は数値的に安定であることも示される。

すなわち $W_{m,n}$ を $m+2$ 個の $\psi(y_j)$ の線形和

$$W_{m,n} = \sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^{(m)} \psi(y_{n+j}) \quad (31)$$

と書いたとき、 $\gamma_j^{(m)} > 0$  ( $0 \leq j \leq m+1$ ) となる<sup>(16)</sup>。ただし

$$\sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^{(m)} = 1.$$

次にW変換を漸化的に計算するアルゴリズムを示す。

[Wアルゴリズム]  $n=0, 1, 2, \dots$  に対して初期値

$$P_{-1,n} = \psi(y_n) / \varphi(y_n) \text{ とおいて}$$

$$P_{m,n} = (P_{m-1,n+1} - P_{m-1,n}) / (y_{n+m+1} - y_n) \quad m=0, 1, \dots, n-1 \quad (32)$$

を求める。同様にして初期値 $Q_{-1,n} = 1 / \varphi(y_n)$ として上と同じ

算法で $Q_{m,n}$ を求めると

$$W_{m,n} = P_{m,n} / Q_{m,n}$$

となる。

このアルゴリズムは差分商の漸化式

$$D_{m,n}\{h(y)\} = [D_{m-1,n+1}\{h(y)\} - D_{m-1,n}\{h(y)\}] / (y_{n+m+1} - y_n)$$

から自明である。Wアルゴリズムの収束判定は  $|W_{m,0} - W_{m+1,0}|$  の値によって行う。

#### 4. 大域的誤差評価

積分(8)は  $x_j \in K_{\mu+1} = (x_{2+\mu l}, x_{2+(\mu+1)l}]$  のとき,  $(a, x_j] = (\bigcup_{q=0}^{\mu} K_q) \cup (x_{2+\mu l}, x_j]$  であるので

$$J(a, x_j) = \sum_{q=0}^{\mu} J(K_q) + J(x_{2+\mu l}, x_j) \quad (33)$$

と表わされる。ここで  $J(K_q)$  ( $0 \leq q \leq \mu$ ) は区間  $K_q$  上での  $g(x) = f^{(1)}(x) \cos \omega x$  の定積分であり,  $J(x_{2+\mu l}, x_j)$  は区間  $K_{\mu+1}$  の部分区間  $(x_{2+\mu l}, x_j]$  上での  $g(x)$  の定積分を意味する。これらの定積分はそれぞれ別々に2節で述べた不定積分の方法を用いて計算される。すなわち(9)の  $G(t)$  を用いると(17)(または(8))より

$$J(K_q) = \{(l/\omega) \exp[i\omega x_{2+(q-1)l}] e^{-il} G(l)\} \text{の实数部} \quad (34)$$

と表わされる。 $G(l)$  は区間  $K_q$  上の定積分に他ならないので  $q$  に依存することを明示して以後  $G_q(l)$  とかく。不定積分(9)において  $F(t)$  をフーリエ展開(19)(または(24))で近似する。このとき  $G_q(t)$  の近似値を

$$\widetilde{G}_q(t) = e^{-ilt} \int_0^t e^{ilt} p_N(t) dt$$

//

そのときの誤差を  $e_g(t)$  とかくと

$$G_g(t) = \widetilde{G}_g(t) + e_g(t) \quad (35)$$

ここで  $P_N(t)$  は  $F(t)$  のチェビシェフ級数 (19) (または (24)) であり  $\|e_g\|$  は (25) (または (26)) の右辺で推定される。各区間  $K_g$  毎の数值積分と誤差評価が可能となったので積分  $J(a, x_j)$  の近似値を  $\widetilde{J}(a, x_j)$ , その誤差を  $E_j$  とすれば (33), (34), (35) より

$$J(a, x_j) = \widetilde{J}(a, x_j) + E_j \quad (36)$$

ここで

$$\begin{aligned} \widetilde{J}(a, x_j) = & \left\{ \sum_{g=1}^{\mu} (L/w) \exp[i\omega x_{2+(g-1)l}] e^{-iL} G_g(1) \right. \\ & + (2\pi/w + x_0 - a) \exp[i\omega(x_0 - a)] e^{-2\pi i} G_0(1) \\ & \left. + (L/w) \exp[i\omega x_{2+\mu l}] e^{-iL} G_{\mu}(t_j) \right\} \text{の実数部} \\ & , \quad t_j = \{j - 2 + \mu l\} / l \quad (37) \\ E_j = & \left\{ \sum_{g=1}^{\mu+1} (L/w) \exp[i\omega x_{2+(g-1)l}] e^{-iL} e_g(1) \right. \\ & \left. + (2\pi/w + x_0 - a) \exp[i\omega(x_0 - a)] e^{-2\pi i} e_0(1) \right\} \text{の実数部, (38)} \end{aligned}$$

である。簡単のため  $L = \pi l$  とおいた。そこで振動積分  $J(a, x_j)$  を  $W$  変換の  $\psi(y_j)$  に採用すると

$$W_{m,0} = \widetilde{W}_{m,0} + \sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^{(m)} E_j \quad (39)$$

ここで  $\widetilde{W}_{m,0}$  は近似  $\widetilde{J}(a, x_j)$  を用いたときの  $W$  変換 (30) であり, したがって計算できる量である。  $W$  変換の収束判定は積分の要求精度  $\varepsilon$  に対して

$$|W_{m+1,0} - W_{m,0}| < \varepsilon \quad (40)$$

で行う。ところで (39) と  $W$  変換が数値的に安定である性質

$\gamma_j^{(m)} > 0$ , および  $\sum_j \gamma_j^{(m)} = 1$  から

$$\begin{aligned} |W_{m+1,0} - W_{m,0}| &\leq |\widetilde{W}_{m+1,0} - \widetilde{W}_{m,0}| + \sum_{j=0}^{m+1} \gamma_j^{(m)} |E_j| + \sum_{j=0}^{m+2} \gamma_j^{(m+1)} |E_j| \\ &\leq |\widetilde{W}_{m+1,0} - \widetilde{W}_{m,0}| + 2 \max_{0 \leq j \leq m+2} |E_j| \end{aligned}$$

したがって (40) を満足するためには 2 つの誤差限界

$$|\widetilde{W}_{m+1,0} - \widetilde{W}_{m,0}| \leq \varepsilon/2 \quad (41)$$

$$2 \max_{0 \leq j \leq m+2} |E_j| \leq \varepsilon/2 \quad (42)$$

を満たせばよい。前者は直ちに判定できるので後者について考えればよい。 $x_{m+2} \in K_\nu$  とすると (38) より

$$\max_{0 \leq j \leq m+2} |E_j| \leq \sum_{q=1}^{\nu} \|e_q\| (L/\omega) + \|e_0\| (2\pi/\omega + x_0 - a)$$

したがって右辺が  $\varepsilon/4$  以下であればよい。このため各区間  $K_q$  での積分の誤差  $\|e_q\|$  を

$$\|e_q\| (L/\omega) \leq (\varepsilon/4) / 2^{q+1}, \quad q \geq 1 \quad (43)$$

$$\|e_0\| (2\pi/\omega + x_0 - a) \leq (\varepsilon/4) / 2$$

とすればよいであろう。(43) の右辺が計算機の丸め誤差  $\varepsilon_{mach}$  以下になったら, この右辺を  $\varepsilon_{mach}$  でおきかえる。

さて今まで被積分関数の非振動項  $f(t)$  が多項式ならばその振動積分は正確であるという仮定の下で大域的誤差評価を行ってきたが, それが妥当であることについて述べる。実際上  $G(t)$  を (12) の右辺のような無限和では展開できない。この展開を次式を満足する  $M$  次で展開したい。

$$|G(t) - \sum_{k=0}^M C_k T_k^*(t)| = o(e_g) \quad (44)$$

被積分関数の非振動項  $F(t)$  を  $N$  次式  $p_N(t)$ , (17), で近似したとき  $k > N$  に対して  $a_k^N = 0$  であるので  $C_k$  の表示式 (15) において特解  $d_k = 0$  とできる。したがって最小解  $C_k \propto I_k(-iL/2)$ 。

$k > [L/2]$  となる  $k$  に対して  $|I_k(-iL/2)|$  は (16) のように急速に減少するので  $N$  が  $[L/2]$  以上とそうでない場合に分けて考える。

$N > [L/2]$  の場合,  $M > N$  とする。  $k \geq M$  に対して  $|C_k| \propto |I_k(-iL/2)|$  だから (16) より  $|C_k| \sim |C_M| (L/4)^{k-M} / \{(M+1)(M+2) \dots k\}$ 。この関係を用い  $\eta = (L/4)/(M+1)$  とおくと

$$|G(t) - \sum_{k=0}^M C_k T_k^*(t)| \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} |C_k| \leq |C_M| (\eta + \eta^2 + \dots) = |C_M| \eta / (1 - \eta)$$

ここで  $N$  と  $M$  に関する仮定より  $\eta < 1/2$  であるから  $G(t)$  の  $M$  次チェビシェフ級数の誤差は

$$|G(t) - \sum_{k=0}^M C_k T_k^*(t)| \lesssim |C_M|$$

で評価される。ここで次数  $M$  は  $|C_M| = o(\|e_g\|)$  となるように定めればよい。 $|C_k|$  の収束が速いので、実際上  $M$  は  $N$  に近い値である。

$N < [L/2]$  の場合 (19) 式を次式でおきかえる。

$$e^{-ilt} \int_0^t e^{ilt} F(t) dt = G(t) - e^{-ilt} G(0) \quad (46)$$

すると  $F(t)$  が  $N$  次多項式  $p_N(t)$  であれば  $G(t)$  も厳密に  $N$  次式となる。 $G(t)$  のチェビシェフ展開係数  $C_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ) はやはり漸

化式(13)を満足する。規格化条件(14)は存在しない。 $C_{N+2} = C_{N+1} = 0$ とおいて(13)を逆向きに計算して安定に $C_N, C_{N-1}, \dots, C_0$ が求められる。

### 5. 計算法のまとめ

まず $K_0$ 区間で $F(t)$ をチェビシフ多項式(19)(または(24))で近似する。このとき(25)(または(26))の右辺で与えられる推定誤差 $\|e_q\|$ が(43)を満足するまで近似多項式の次数 $N$ を2節の方法で増してゆく。えられた展開係数 $a_n^N$  ( $0 \leq n \leq N$ )を3項漸化式(13)の右辺に用いる。 $N \leq [L/2]$ , ( $L=2\pi$ )なら前節の(46)式とそれ以下で述べたようにして $C_N, C_{N-1}, \dots, C_0$ を計算する。 $N > [L/2]$ の場合, 既にわれわれが発表した安定に最小解を求める方法を漸化式(13)に適用して $C_k$  ( $0 \leq k \leq M$ )を計算する。以上によってえられた $C_k$ を(12)に代入し(18)を用いると $\tilde{J}(a, x_j)$  ( $0 \leq j \leq 2$ )が一度にえられる。Wアルゴリズムにより $\tilde{W}_{m,0}$  ( $0 \leq m \leq 2$ )を計算し, 収束判定(41)が満足されれば停止する。さもなければ区間 $K_1, K_2, \dots$ に対して同様の手続きを繰返してゆく。ただし $L = \pi l$ である。実際上は $K_1$ ないしは $K_2$ で計算は終了する。

## 6. 数値例

オイラー変換,  $\epsilon$  アルゴリズム, レビン変換 ( $u$  変換,  $t$  変換) および Sidi の方法の 5 種類の加速法の収束の速さを問題  $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} \cos x dx$  に対してテストした結果を図 1 に示す。

加速法の入力の数列 (8) の個数が横座標である。Sidi の方法の収束が最も速いことが図 1 からわかる。次に以下に示す各種のテスト問題に対して本方法の性能を現在発表されてい

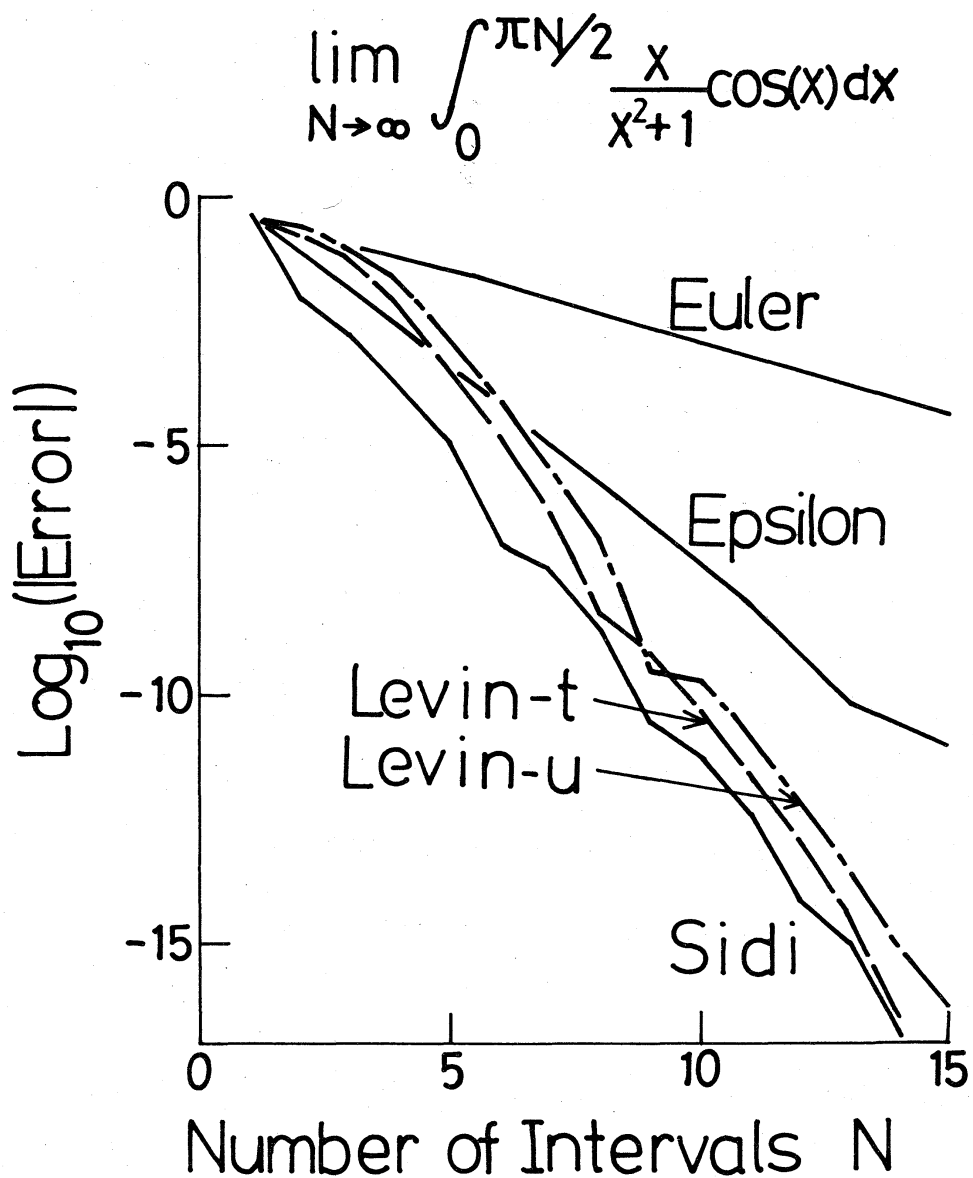


図 1

るなかで能率的な自動積分法である Piessens らの方法<sup>20)</sup>と比



較する。計算は倍精度演算(10進約16桁)を用いて行った。比較は要求精度 $\varepsilon$ を満足するために使用した標本点数によって行う。

$$(1) \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx = 0.5$$

$$(2) \int_0^{\infty} x/(x^2+1) \cos x \, dx = -[\bar{E}_i(1)/e + e E_i(-1)]$$

$$(2-S) \int_0^{\infty} x/(x^2+1) \sin x \, dx = \pi/(2e)$$

$$(3) \int_0^{\infty} 1/\sqrt{x^2+1} \cos x \, dx = K_0(1)$$

$$(3-S) \int_0^{\infty} 1/\sqrt{x^2+1} \sin x \, dx = [I_0(1) - L_0(1)] \pi/2$$

$$(4) \int_0^{\infty} 1/(x^2+1) \cos x \, dx = \pi/(2e)$$

$$(5) \int_0^{\infty} \{\log(x+1)\}/x \cos x \, dx = \{(S_i(1) - \frac{\pi}{2})^2 + C_i^2(1)\}/2$$

$$(6) \int_1^{\infty} 1/x \cos x \, dx = -C_i(1)$$

$$(7) \int_1^{\infty} 1/\sqrt{x} \cos x \, dx = -0.5557343384850400$$

$$(8) \int_1^{\infty} 1/\sqrt{x^2+1} \cos x \, dx = -0.3333975265101900$$

$$(9) \int_1^{\infty} 1/x^2 \sin x \, dx = \sin(1) - C_i(1)$$

$$(10) \int_0^{\infty} \log\{(x^2+4)/(x^2+1)\} \cos \omega x \, dx = (e^{-\omega} - e^{-2\omega}) \pi/\omega$$

$$(11) \int_0^{\infty} f(x) \cos x \, dx = (\pi/\beta) e^{-\beta} \cos \gamma,$$

$$f(x) = \{\beta^2 + (\gamma - x)^2\}^{-1} + \{\beta^2 + (\gamma + x)^2\}^{-1}$$

問題(2)において  $E_i(x)$  は積分指数関数であり  $\bar{E}_i(x) = \{E_i(x+i0) + E_i(x-i0)\}/2$  である<sup>21)</sup>。(3), (3-S)における  $K_0(x)$ ,  $I_0(x)$  は0次変形ベッセル関数で,  $L_0(x)$  は0次変形Struve関数である。(5), (6), (9)における  $S_i(x)$ ,  $C_i(x)$  はそれぞれ正弦および余弦積分で

ある。問題(1)~(5)は $[0, \infty)$ 区間の積分, 問題(6)~(9)は $[1, \infty)$ 区間の積分問題である。それぞれの問題の要求精度 $\varepsilon=10^{-6}$ ,  $10^{-9}$ ,  $10^{-12}$ に対する標本点数とそのときの誤差を表1に示す。各種の振動数 $\omega$ の値に対する問題(10)の結果は表2である。以上の問題では被積分関数の非振動項 $f(x)$ のピークが積分区間の下限かその近傍にあり, その後 $x \rightarrow \infty$ に向って単調に減少している。問題(11)では $x=\delta$ で $f(x)$ が最大となる。パラメータ $\delta$ の値を $0, \pi, 2\pi$ と変化させて $f(x)$ のピーク的位置を $\infty$ の方に動かした場合の必要な標本点数と入力の数列(8)の項数を表3に示す。もう一つのパラメータ $\beta$ の値が小さい程ピークが高くなり困難な問題となる。表1~3から関数 $f(x)$ が滑らかである程, また $f(x)$ のピーク的位置が積分区間の下限に近い程本方法の能率が高いことがわかる。

## 7. おわりに

本論文では, 半無限振動積分(1)の自動積分法を示した。この積分は収束の遅い交代級数の極限值として与えられる。収束を速めるため  $Sidi$  の加速法を適用した。加速のための入力数列を能率的に計算するため不定積分の方法を用いた。このとき入力関数 $f(x)$ のチェビシェフ級数展開を利用しているので cosine 積分  $I^c$  と sine 積分  $I^s, (1)$ , の両方を求める

表 1  $\int_a^\infty f(x) \left\{ \frac{\cos x}{\sin x} \right\} dx$  ( $a=0$  または 1)

問題	$\epsilon = 10^{-6}$		$\epsilon = 10^{-9}$		$\epsilon = 10^{-12}$	
	本方法 標本数	Piessens 標本数 誤差	本方法 標本数	Piessens 標本数 誤差	本方法 標本数	Piessens 標本数 誤差
(1)	33	$3 \times 10^{-9}$	45	$1 \times 10^{-12}$	61	$5 \times 10^{-16}$
(2)	45	$3 \times 10^{-7}$	84	$4 \times 10^{-11}$	94	$2 \times 10^{-14}$
(2-5)	45	$1 \times 10^{-6}$	83	$3 \times 10^{-11}$	94	$4 \times 10^{-15}$
(3)	49	$5 \times 10^{-8}$	68	$8 \times 10^{-11}$	94	$6 \times 10^{-15}$
(3-5)	49	$2 \times 10^{-8}$	67	$4 \times 10^{-11}$	94	$1 \times 10^{-15}$
(4)	57	$1 \times 10^{-8}$	83	$2 \times 10^{-10}$	93	$1 \times 10^{-13}$
(5)	37	$2 \times 10^{-7}$	67	$1 \times 10^{-10}$	79	$1 \times 10^{-13}$
(6)	45	$1 \times 10^{-6}$	68	$6 \times 10^{-12}$	94	$8 \times 10^{-15}$
(7)	37	$8 \times 10^{-7}$	68	$6 \times 10^{-12}$	78	$6 \times 10^{-15}$
(8)	37	$1 \times 10^{-6}$	60	$9 \times 10^{-12}$	78	$7 \times 10^{-15}$
(9)	44	$6 \times 10^{-7}$	67	$7 \times 10^{-11}$	92	$3 \times 10^{-13}$

表 2 積分  $\int_0^\infty \log \left\{ (x^2+4)/(x^2+1) \right\} \cos wx dx$

問題	$\epsilon = 10^{-6}$		$\epsilon = 10^{-9}$		$\epsilon = 10^{-12}$	
	本方法 標本数	Piessens 標本数 誤差	本方法 標本数	Piessens 標本数 誤差	本方法 標本数	Piessens 標本数 誤差
(0)	49	$4 \times 10^{-8}$	69	$2 \times 10^{-10}$	94	$1 \times 10^{-14}$
1	38	$3 \times 10^{-8}$	53	$1 \times 10^{-12}$	89	$6 \times 10^{-15}$
5	30	$1 \times 10^{-8}$	63	$4 \times 10^{-11}$	82	$7 \times 10^{-14}$
15	30	$2 \times 10^{-8}$	55	$1 \times 10^{-11}$	75	$1 \times 10^{-13}$

表3.  $\int_0^{\infty} f(x) \cos x dx$ ,  $f(x) = \{\beta^2 + (\gamma - x)^2\}^{-1} + \{\beta^2 + (\gamma + x)^2\}^{-1}$ 

$\beta$	$\gamma$	$\varepsilon = 10^{-6}$					$\varepsilon = 10^{-12}$				
		本方法			Piessens		本方法			Piessens	
		標本数	誤差	項数	標本数	誤差	標本数	誤差	項数	標本数	誤差
1	0	57	$2 \times 10^{-8}$	7	335	$1 \times 10^{-9}$	110	$1 \times 10^{-14}$	12	1705	$2 \times 10^{-13}$
	$\pi$	82	$1 \times 10^{-8}$	8	360	$3 \times 10^{-10}$	158	$5 \times 10^{-13}$	12	760	$8 \times 10^{-13}$
	$2\pi$	103	$7 \times 10^{-8}$	12	360	$5 \times 10^{-10}$	225	$2 \times 10^{-14}$	14	1790	$5 \times 10^{-13}$
$\frac{1}{4}$	0	89	$2 \times 10^{-8}$	7	395	$1 \times 10^{-9}$	190	$1 \times 10^{-14}$	12	1095	$1 \times 10^{-12}$
	$\pi$	227	$5 \times 10^{-9}$	9	540	$3 \times 10^{-10}$	445	$4 \times 10^{-13}$	12	1305	$2 \times 10^{-12}$
	$2\pi$	215	$1 \times 10^{-8}$	12	540	$5 \times 10^{-10}$	420	$6 \times 10^{-14}$	17	1365	$1 \times 10^{-12}$

場合, 一方のための関数計算の手間で他方の値も求められる利点がある。3項漸化式の最小解を安定に求める算法も有効に利用されている。以上により, 従来の Piessens らの方法と比較して  $f(x)$  が滑らかでそのピークの位置が積分区間の下限に近い程, 本方法は能率的であることが数値実験によって示された。

本方法では入力関数  $f(x) = (1 - \cos x)/x$  のような定符号ではあるが振動するような問題は扱えない。

三角関数の代りにベッセル関数  $J_n(x)$ ,  $Y_n(x)$  を含んだ半無限振動積分の問題に本方法を拡張することは今後の課題である。

日頃御討論頂く名古屋大学二宮市三教授に感謝いたします。

## 参考文献

- 1) Davis, P.J. and Rabinowitz, P.: Methods of Numerical Integration, Academic Press, Orlando (1984).
- 2) 戸田英雄, 小野令美: Double Exponential 変換数値積分公式の有効性を発揮させるための注意, 京都大学数理解析研究所講究録 339, pp. 74-109 (1978).
- 3) 高橋秀俊: 振動的関数の積分法, 京都大学数理解析研究所講究録 483, pp. 238-248 (1983)
- 4) 吉田年雄: 振動する関数の半無限自動積分, 名古屋大学大型計算機センター - ニュース Vol. 14, No. 2, pp. 168-174 (1983)
- 5) 杉原正顕: DE 変換公式と補外法を用いて振動的関数の積分を計算する方法に関する一考察, 京都大学数理解析研究所講究録 514, pp. 21-47 (1984)
- 6) Longman, I.M.: Note on a Method for Computing Infinite Integrals of Oscillatory Functions, Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 52, pp. 764-768 (1956).
- 7) Longman, I.M.: A Method for the Numerical Evaluation of Finite Integrals of Oscillatory Functions, Math. Comput., Vol. 14, pp. 53-59 (1960).
- 8) Chisholm, J.S.R., Genz, A. and Rowlands, G.E.: Accelerated Convergence of Sequences of Quadrature Approximations, J. Comput. Phys., Vol. 10, pp. 284-308 (1972).
- 9) Ayse Alaylioglu, Evans, G.A. and Hyslop, J.: The Evaluation

of Oscillatory Integrals with Infinite Limits, J.Comput.Phys.,  
Vol.13, pp.433-438 (1973).

- 10) 二宮市三 : Levin の加速法, 情報処理学会第29回全国大会  
講演論文集, pp.1501-1502 (1984).
- 11) 中島洋 : 緩減少関数の数値フーリエ積分, 情報処理学会  
論文誌, Vol.25, No.6, pp.1098-1101 (1984).
- 12) Sidi, A.: Extrapolation Methods for Oscillatory Infinite  
Integrals, J.Inst.Math.Applic., Vol.26, pp.1-20 (1980).
- 13) Sidi, A.: The Numerical Evaluation of Very Oscillatory  
Infinite Integrals by Extrapolation, Math.Comput., Vol.38,  
pp.517-529 (1982).
- 14) Olver, F.W.J.: Asymptotics and Special Functions, Academic  
Press, New York (1974).
- 15) Sidi, A.: Some Properties of a Generalization of the  
Richardson Extrapolation Process, J.Inst.Math.Applic.,  
Vol.24, No.3, pp.327-346 (1979).
- 16) Sidi, A.: An Algorithm for a Special Case of a Generalization  
of the Richardson Extrapolation Process, Numer.Math., Vol.38  
, No.3, pp.299-307 (1982).
- 17) 鳥居達生, 長谷川武光 : 標本点数を低倍率で漸増させる実  
関数のFFT, 情報処理学会論文誌, Vol.24, No.3, pp.343-350 (1983).
- 18) 長谷川武光, 鳥居達生, 二宮市三 : 3項漸化式の最小解に  
対する安定な算法, 情報処理学会論文誌, Vol.23, No.6,  
pp.583-590 (1982).

- 19) 長谷川武光, 鳥居達生: 激しい振動積分の自動積分法, 情報処理学会論文誌, Vol.25, No.1, pp.116-124 (1984).
- 20) Piessens, R., deDoncker, E., Überhuber, C.W. and Kahaner, D.K.: QUADPACK A Subroutine Package for Automatic Integration, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- 21) Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M.: Table of Integrals, Series, and Products (translated by Jeffrey, A.), Academic Press, New York (1980).