数理解析研究所講究録
第555巻 1985年 32-47

概均質ベクトル空間のGauss和(*)

川中宣明
阪大・理
行者明彦

1. (G, V)：既約，正則概均質ベクトル空間 $/\mathbb{C}$

$V^\vee$: V の dual space

f : V の既約相対不変式

$S = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

$\mathcal{O} = V - S$

j : $V - S \hookrightarrow V$

$d = \deg f$

$n = \dim V$

$\langle\ ,\ \rangle$: $V^\vee \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ pairing

dual の概均質ベクトル空間において，f, S, $\mathcal{O}$, j にあたるものを，$f^\vee$ $S^\vee$ $\mathcal{O}^\vee$ $j^\vee$ と書く．（定義については [20] 参照）

佐藤・木村の分類を見ると([20])，V には，自然に $\mathbb{Z}$-scheme の構造が入ることがわかる。（この $\mathbb{Z}$-scheme の構造を，もっと intrinsic に，定めることもできる。）従って，

reduction mod p により，有限体$\mathbb{F}_q$上の既約・正則概均質ベクトル空間が，得られる。（pが，あまり小さいと，既約，正則，概均質といった条件は，破れるので，以下の話では，pは適当に，大きいものとしておく。どれだけ大きくすればよいかは，分類[20]を用いて，個別に計算すれば，わかる。11節参照）

2. $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$: ℓ進体の代数閉包

χ : $\mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ $(\cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$ 乗法指標

ψ : $\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ $(\cong \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times)$ 加法指標（$\psi \neq 1$）

とし，$\chi(0) = 0$と定義する。可換群 $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times)$の元としての，$\chi$の位数を ord χ と書く。このとき，

$$\mathcal{F}_\psi[\chi \circ f](v^\vee) = \sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} \chi(f(v))\, \psi(\langle v^\vee\ v\rangle)$$

$$(v^\vee \in V^\vee(\mathbb{F}_q))$$

とおき，これを概均質ベクトル空間の Gauss 和 と呼ぶ．[11]

3. f の b-函数を，

$$b_f(s) = b_0 \prod_{j=1}^{d} (s + \alpha_j) \qquad (d = \deg f)$$

とし，

$$b_f^{exp}(t) = \prod_{j=1}^{d} (t - e^{2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_j})$$

とすると、[9][16] を使って $b_f^{exp}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が、わかる。

[8]より、$\alpha_j \in \mathbb{Q}$ だから、

$$b_f^{exp} = \prod_{\ell \geq 1} \Phi_\ell^{m_f(\ell)}$$

$\Phi_\ell = \ell$ 次円分多項式

と書ける。

4. <u>予想</u>　$p \gg 0$, $v^\vee \in O^\vee(\mathbb{F}_q)$ の時

$$(\#) \qquad \mathcal{F}_\psi[\chi \circ f](v^\vee) = \varepsilon_{\chi,\psi}\, q^{\frac{1}{2}(\dim V - m_f(\mathrm{ord}\, \chi))} (\chi^{-1} \otimes \theta_\chi)(f^\vee(v^\vee))$$

$$|\varepsilon_{\chi,\psi}| = 1$$

$$\theta_\chi = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{n}{d} \in \mathbb{Z} \\ \text{Legendre symbol} & \text{if } \frac{n}{d} \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. <u>定理</u> (i) $m_f(\mathrm{ord}\, \chi) = 0$ なら、予想は OK.

(ii) (G, V) が [20] の分類で、type (11) でなければ、予想は、OK.

6. <u>注意</u> 以下を見ればわかるように、この定理は、$\mathcal{E}f^s$ ($\mathcal{E}$ は、micro-differential operators の層) の構造に関する問題に帰着させることで、証明される。type (11) が、

除外されるのは、この場合に、$\mathcal{E}f^{s}$ の構造が、まだ、十分にわからないことによる。

注意 p を、どのくらい大きくとればよいかは、個別に計算すれば、わかる。（例えば type (1) なら無制限、type (2) なら $p \neq 2$, … ）

7. 注意（この節については、[15] 参照）

$|\cdot|^{\frac{1}{1-q}}$: Teichmüller character

$$\gamma(s) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} |x|^{s} \psi(x) \qquad \left(s \in \tfrac{1}{1-q}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \right)$$

とする。少々、雑ではあるが、(#) は、次のように書きかえられる。

$p \gg 0$, $v^\vee \in O^\vee(\mathbb{F}_q)$ のとき

$$q^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\psi[\,|f|^{s}\,](v^\vee) = \varepsilon'_\psi(s)\left(\prod_{j=1}^{d} \gamma(s+\alpha_j)\right)\cdot |f^\vee(v^\vee)|^{-s-\frac{n}{d}}$$

$$|\varepsilon'_\psi(s)| = 1.$$

Gross－Koblitz の公式により、Gauss 和と、p 進 Γ 函数が、本質的に同じものであることを思い出せば、上の予想－定理（有限体の場合）と、$\mathbb{R}$ の場合との類似は、明らかであろう。

裏返し変換に関して、$\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f]$ が、どうかわるかは、よく、

わかっているので、以下、必要ならば"被約"という仮定をおきながら、定理の証明をする。（スケッチ）

8.（この節では、$\mathbb{F}_q$上で考える。）

[5; p172, 定義1.7] で、定義された、$\mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^1-\{0\}$ 上の、(étale) sheaf $\mathcal{F}(\psi)$, $\mathcal{F}(\chi)$ を、ここでは、$\mathcal{L}_\psi$, $\mathcal{L}_\chi$ と書くことにする。（χ, ψ については、2節）

$$\begin{tikzcd}
 & V^\vee \times V \arrow[dl, "pr^\vee"'] \arrow[dr, "pr"] \arrow[rrr, "\langle\,\rangle"] & & & \mathbb{A}^1 \\
V^\vee & & V & V-S \arrow[l, hook', "j"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^1-\{0\}
\end{tikzcd}$$

を自然に定義する。V上の sheaf $\mathcal{G}$ に対し、

$$\mathcal{F}_\psi[\mathcal{G}] = pr^\vee_![pr^*\mathcal{G}\otimes\langle\,\rangle^*\mathcal{L}_\psi] \qquad \text{(Fourier 変換)}$$

とおく。([2] [10]) ここで、$pr^\vee_!$ は、通常 $Rpr^\vee_!$ と書くものであるが、すべての話しが、derived category で、進むので、R, L は省略する。この時、

$$\mathcal{F}_\psi[\chi\circ f](v^\vee) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \,\mathrm{Tr}(F\,;\, H^i(\mathcal{F}_\psi[j_! f^*\mathcal{L}_\chi])_{v^\vee})$$

ここで、Fは、Frobenius endomorphism。従って、次の二つを示せば、十分である。

8.1. $\mathcal{F}_\psi[j_! f^* \mathcal{L}_\chi]\big|_{V^\vee - S^\vee} = f^{\vee *} \mathcal{L}_{\chi^{-1} \otimes \theta_\chi} [-\dim V]\big|_{V^\vee - S^\vee}$

8.2. $\mathcal{F}_\psi[j_! f^* \mathcal{L}_\chi]\big|_{V^\vee - S^\vee}$ は. pure of weight $-m_f(\mathrm{ord}\ \chi)$

(pure sheaf の定義については、[4] 参照) まず. (8.1) から考える.

9. (この節では. $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上)

まず. Jacobi 和の類似物を考える.

$$\left(\sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} \chi^{-d}(x)\,\psi(-x)\right)\left(\sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} \chi(f(v))\,\psi(\langle v^\vee v \rangle)\right)$$

$$= \sum_{\substack{v \\ x \neq 0}} \chi(f(x^{-1}v))\,\psi(\langle v^\vee v\rangle - x)$$

$$= \sum_{\substack{v \\ x \neq 0}} \chi(f(v))\,\psi(x(\langle v^\vee v\rangle - 1))$$

$$= \sum_{\substack{v \\ x \in \mathbb{F}_q}} \chi(f(v))\,\psi(x(\langle v^\vee v\rangle - 1)) - \sum_{v} \chi(f(v))$$

$$= \sum_{\substack{v \\ \langle v^\vee v\rangle = 1}} \chi(f(v)) - \sum_{v} \chi(f(v))$$

この計算を. 逐語的に. sheaf の言葉に翻訳すると. 次の distinguished triangle ([5; p265] 参照) を得る:

9.1.

$$\begin{tikzcd}
 & pr^{\vee}_{!}\, pr^{*}(j_{!} f^{*}\mathcal{L}_{\chi}) \arrow[dl, "+1"'] & \\
\mathcal{F}_{\psi}[j_{!} f^{*}\mathcal{L}_{\chi}][-1] \arrow[rr] & & (pr^{\vee}|_{H})_{!}(pr|_{H})^{*}(j_{!} f^{*}\mathcal{L}_{\chi})[-2] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

これは 0.

但し,

$$H = \{ (v^{\vee}\ v) \in V^{\vee} \times V \mid \langle v^{\vee}\ v \rangle = 1 \}$$

注意 (多変数の) Fourier 変換は. Radon 変換と. 一変数の Fourier 変換に分解するが. ([6; Chapter 1] 参照) triangle (9.1) を考えることは. Fourier 変換に. 一変数の Fourier 逆変換をほどこして. 話しを. Radon 変換に帰着させることにあたる.

10. (この節では. $\mathbb{C}$ 上)

$s = 1/\mathrm{ord}\,\chi$ とし. x^{s} が. 定める $\mathbb{C} - \{0\}$ 上の locally constant sheaf を. $\mathcal{L}_{s}$ とする。$\mathcal{F}$ を [3], [7] の意味の Fourier 変換とすると. (9.1) と同様にして. 次の triangle を得る。

10.1.

$$\begin{tikzcd}
 & pr^{\vee}_{!}\, pr^{*}(j_{!} f^{*}\mathcal{L}_{s}) \arrow[dl, "+1"'] & \\
\mathcal{F}[j_{!} f^{*}\mathcal{L}_{s}][-1] \arrow[rr] & & (pr^{\vee}|_{H})_{!}(pr|_{H})^{*}(j_{!} f^{*}\mathcal{L}_{s})[-2] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

これは 0.

さて、$f^\wedge$ の、G に関する相対不変性を、Lie(G) を用いて、infinitesimal に記述すると、それは、微分方程式と考えられる。(⇐[19] の (4.1)) これを、$\mathcal{D}$-module と見たものを、$\mathcal{M}_s'$ とし、$\mathcal{M}_s = \mathcal{M}_s'[\frac{1}{f}]$ とおくと、

$$\mathcal{F}[j_! f^* \mathcal{L}_s] = \mathrm{DR}(\mathcal{F}[\mathcal{M}_s^*])$$

であるから、(DR, $*$, については、[17] 参照) 議論を、微分方程式の話しに帰着させて、$\mathcal{F}[j_! f^* \mathcal{L}_s]$ が、求められる。従って、

$$pr^\vee_! \, pr^* \mathcal{L}_s \,, \qquad (pr^\vee|_H)_! (pr|_H)^* \mathcal{L}_s$$

の、reduction mod p が、うまく、(i.e. $\mathbb{Z}_p$-scheme 上の sheaf と見た時の smoothness)

$$pr^\vee_! \, pr^* \mathcal{L}_\chi \,, \qquad (pr^\vee|_H)_! (pr|_H)^* \mathcal{L}_\chi$$

になれば、(8.1) が、証明できる。これは、$p \gg 0$ ならば、OK だが、次に述べるやり方で、具体的に、p がどれだけ大きければよいかが、わかる。

注意 [3] [7] の、Fourier 変換の定義には、半空間という、$\mathbb{C}$ に特有のものが、含まれ、8節に、出てきた Fourier 変換 $\mathcal{F}_\psi$ には、Artin-Schreier sheaf $\mathcal{L}_\psi$ という、$\overline{\mathbb{F}}_q$ に特有のものが、含まれていたため、(9.1) (10.1) という triangles を使わないで、直接に reduction mod p を考えることはできない。

8.

11. (この節では、mixed characteristic)

reduction mod p が"うまく"行く場合を思い出すと：

11.1. (complete smooth variety)

または、もう少し、一般に：

11.2. (complete smooth variety) − (normal crossing)

くらいしかない．我々が問題にしている sheaf $j_! f^* \mathcal{L}_x$ (or $j_! f^* \mathcal{L}_s$) は、実質的に、$V-S$ 上の sheaf であるから、(11.2) を直接使おうとすると、S の特異点を、具体的な形で、解消しなければならない．これは、なかなかうまくいかない．

ところが、よく知られているように、GL_n (i.e. [20] の type (1) の場合の $V-S$) の、多様体としての cohomology の、reduction mod p に関する不変性が、次のようにして証明できる：

(証明) $E_n = \{ n \times n$ 上半三角行列$\}$

$B_n = E_n \cap GL_n$ (Borel 部分群)

とすると、

$$GL_n \longrightarrow GL_n / B_n$$

は、(11.1) 型の base をもち、(11.2) 型の fibre をもつ、fibre bundle になる．そこで、spectral sequence を使えば、目的の結果を得る． ▨

この証明を見て．想像されるように．一般の既約．正則．被約．概均質ベクトル空間でも．E_n にあたる subspace が．うまくみつかれば，同様の議論ができるはずである．それが，実際に，みつかる．

命題～定義

V：既約．正則．被約．概均質ベクトル空間．

B：G の Borel 部分群

B_0：generic isotropy 群の．Borel 部分群

とするとき．

(i) V の B-stable な subspace E が．$V-S$ と交わるなら．

$$\dim E \geqslant \dim B - \dim B_0$$

であり．等号の成立する場合．E を（仮に）Borel subspace と呼ぶ．

(ii) Borel subspace E で．$E \cap S$ が．normal crossing になるか．または，ordinary double しか持たないものが．存在する．

この証明は．case-by-case check であり．不満が残るが．とにかく，このおかげで．reduction mod p に関する精密な議論が．できる．

注意 Borel subspace は、水野氏の、E_n型代数群（任意標数）の、ユニポテント共役類の分類の仕事の中で、最初に、(implicit に）あらわれた。最近の、村上順氏の仕事では、big cell の、概均質ベクトル空間における類似物が、大きな役割りを、はたしていることにも、注意しておく。

これで、(8.1) の証明のあらすじは、完了した。次に、(8.2) を考える。

12. $j_! f^* \mathcal{L}_x$ は、perverse sheaf であり、(perverse sheaf については、[1] [17] 参照) perverse sheaf は、weight filtration を持つので（[1] 定理 5.3.5）

$$j_! f^* \mathcal{L}_x = \mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_{-1} \supset \mathcal{W}_{-2} \supset \cdots$$

を weight filtration とする。(derived category における、"filtration" については [1] 3.1 節) 11 節の、議論により、この filtration は、標数 0 に、持ち上げられる：

$$j_! f^* \mathcal{L}_s = \mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_{-1} \supset \mathcal{W}_{-2} \supset \cdots$$

さらに、Riemann-Hilbert 対応　　　　　　により、次の filtration が、得られる：

$$\mathcal{M}_s = \mathcal{N}_0 \supset \mathcal{N}_{-1} \supset \mathcal{N}_{-2} \supset \cdots$$

pure な perverse sheaf が、semi-simple で、あること

より [1; (5.3.8)]

12.1. $\mathcal{N}_{-i}/\mathcal{N}_{-i-1}$ = simple $\mathcal{D}$-modules の直和.

また. perverse sheaf の weight filtration の存在 [1; (5.3.5)] の証明と同様にして

12.2. $W_{-i} \supset W_{-i-1} = W_{-i-2}$

ならば. W_{-i} において. W_{-i-1} の complement が.

存在する.

ことが. わかる. さらに. [19] の一般論と. [12] [13] [14] [18] [19] の具体的な計算により. $\mathcal{E}\otimes\mathcal{M}_s$ の $\mathcal{E}$-module としての構造は. [20] の type(11) $= (SL_5 \times GL_4,\ \Lambda^2(V_5)\otimes V_4)$ を除いて. きわめてよく. わかっている。特に. $\mathcal{E}$-submodule として. どのようなものが. 存在するか. また. 存在しないかが. 十分にわかっていて. その知識と. (12.1), (12.2) をあわせると

$$\mathcal{N}_0 \supsetneqq \mathcal{N}_{-1} \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathcal{N}_{-m_f(\mathrm{ord}\,\chi)} \supsetneqq \mathcal{N}_{-m_f(\mathrm{ord}\,\chi)-1} = 0$$

$$\mathrm{Supp}\,\mathcal{E}\otimes\mathcal{N}_{-m_f(\mathrm{ord}\,\chi)} \supset V^\vee \times \{0\}$$

が. わかる. これから. $j_! f^* \mathcal{L}_\chi$ の組成因子で. その Fourier 変換が. $V^\vee - S^\vee$ 上で. 生き残るものを. $\mathcal{G}$ とすると.

$$\mathcal{G} = \text{pure of weight } -m_f(\mathrm{ord}\,\chi).$$

ここで. [4] の主結果と. $\mathcal{F}_\psi$ が. Verdier dual と可換

であること [10; (2.1.5)] を使うと.

$$\mathcal{F}_\psi[\mathcal{G}] = \text{pure of weight } -m_f(\operatorname{ord}\chi)$$

さらに.

$$\mathcal{F}_\psi[j_!f^*\mathcal{L}_\chi]|_{V^\vee-S^\vee} = \mathcal{F}_\psi[\mathcal{G}]|_{V^\vee-S^\vee}$$

であるから. (8.2) を得る.

13. 注意 $\mathcal{E}\otimes\mathcal{M}_s$ の submodule の存在・非存在(特に. 非存在)に. 関する部分で. 佐藤・木村の「分類」を. 本質的に用いたが. local b-function を用いて (分類は用いずに) 本来. 議論できるはずであるが....

(*) 本稿は、行者が. 執筆した。概均質ベクトル空間の. Gauss 和というものの定義された背景. その他、については. 「代数的整数論 シンポジウム (1984年 7月)」の報告集に所収の稿を. 見ていただきたい. そちらの方は. 川中が. 執筆している.

References

[1] A. A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne : Faisceaux pervers, Astérisque N° 100 (1982)

[2] J. L. Brylinski : Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques. Preprint.

[3] J.L. Brylinski, B. Malgrange, J.L. Verdier : Transformation de Fourier geometrique, I. C.R. Acad. Sc. Paris 297 (1983) 55-58.

[4] P. Deligne : La conjecture de Weil II. Publ. Math. IHES 52 (1980) 137-252

[5] P. Deligne et al. : SGA $4\frac{1}{2}$, Lecture Notes in Math. 569. Springer

[6] I. M. Gel'fand, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin; Generalized functions. vol 5.

[7] R. Hotta, M. Kashiwara : The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, Inventiones Math. 75 (1984) 327-358

[8] M. Kashiwara : B-functions and holonomic systems. Inventiones Math. 38 (1976) 33-53

[9] M. Kashiwara : Holonomic systems of linear differential equations with regular singularities and related topics in

topology, Adv. in Pure Math. vol 1, Kinokuniya.

[10] N.M. Katz, G. Laumon: Transformation de Fourier et majoratión de sommes exponentielles, Dissertatión.

[11] N. Kawanaka: Open problems in algebraic groups, Katata Symp. Proc. P13

[12] T. Kimura: The b-functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, Nagoya Math. J. 85 (1982) 1-80

[13] T. Kimura, M. Muro: On some series of regular irreducible prehomogeneous vector spaces, Proc. Japan Acad., 55 Ser.A. (1979) 384-389

[14] T. Kimura, I. Ozeki: On the microlocal structure of a regular prehomogeneous vector space associated with $Spin(10) \times GL(3)$, Proc. Japan Acad., 58 Ser.A (1982) 239-242

[15] S. Lang: Cyclotomic fields II, Springer

[16] B. Malgrange: Polynomes de Bernstein-Sato et cohomology evanesants, Astérique 101-102 (1983)

[17] 野海正俊: Constructible $\mathbb{C}_X$ 加群と holonomic $\mathcal{D}_X$ 加群, 数学 36巻2号 (1984) 125-136

[18] I. Ozeki : On the microlocal structure of a regular prehomogeneous vector space associated with GL(8), Proc. Japan Acad., 56, Ser. A (1980) 18-21.

[19] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura, T. Oshima : Micro-loca analysis of prehomogeneous vector spaces, Inventiones Math. 62 (1980) 117-179.

[20] M. Sato, T. Kimura : A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J. 65. (1977) 1-155.