数理解析研究所講究録
第555巻 1985年 61-84

概均質ベクトル空間の相対不変超函数について

高知大 理　室 政和
(Masakazu Muro)

序.

(G, ρ, V) を $\mathbb{R}$上定義された概均質ベクトル空間とする。すなわち Gは $\mathbb{R}$上定義された連結な線型代数群で, ρは有限次元 $\mathbb{R}$-ベクトル空間Vへの線型表現であり, それはその複素化 $(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ が $\mathbb{C}$上の有理表現で, $\mathbb{C}$上概均質ベクトル空間になっているものとする。さらに W を複素有限次ベクトル空間として, (σ, W) を G の real analytic な表現とする。$\varsigma(x)$ を V上の Wに値をとるベクトル値超函数としたとき,

$$(1) \qquad \varsigma(\rho(g)\cdot x) = \sigma(g)\,\varsigma(x) \qquad (g \in G)$$

がみたされるとき, $\varsigma(x)$ を σに対応する相対不変超函数であると定義する。このとき, 自然に次のことが問題となる。

問題; 1) 与えられた (G, ρ, V) 及び (σ, W) に対して, 相対不変超函数のなす空間を決定せよ。

2) そのような相対不変超函数の support や singular support, 及び Fourier 変換像はどうなるか？

ここでは，(σ, W) が一次元表現，すなわち $\sigma ; G \to \mathbb{C}^{\times}$ が real analytic な character の場合に，この問題が holonomic 系の理論の使って解くことができることを報告する。

1　概均質ベクトル空間と相対不変超函数。

$(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ を $\mathbb{C}$ 上の正則概均質ベクトル空間（regular irreducible prehomogeneous vector space）とする。我々は $V_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の作用で有限個の orbits に分解すると仮定する。$P(x)$ を既約な相対不変多項式（これは定数倍をのぞいて一意にきまる），$\chi(g)$ をそれに対応する character であるとする。

$(G_{\mathbb{R}}^{+}, \rho, V_{\mathbb{R}})$ を概均質ベクトル空間の real form とする。すなわち，$G_{\mathbb{R}}^{+}$ は $G_{\mathbb{C}}$ のひとつの real form の単位元を含む connected component であり，$\rho(G_{\mathbb{R}}^{+}) \subset GL(V_{\mathbb{R}})$ となっているものとする。特に character $\chi(g)$ が $G_{\mathbb{R}}^{+}$ 上 real valued の場合を考える。そして $(\sigma, W) = (\chi(g)^{s}, \mathbb{C})$, $(s \in \mathbb{C})$ という場合を考える。このとき，$\chi(g)^{s}$ に対応する相対不変超函数とは $V_{\mathbb{R}}$ 上の超函数 $\zeta(x)$ で，$\zeta(\rho(g) \cdot x) = \chi(g)^{s} \zeta(x) \quad (g \in G_{\mathbb{R}}^{+})$ をみたすもののことである。

まず，この式を線型微分方程式に書き直そう。$\mathfrak{g}$ を $G_{\mathbb{R}}^{+}$ の Lie algebra, $d\rho$, $\delta\chi$ は各々 ρ, χ の infinitesimal representation とする。すると，次のことが成り立つ。

Proposition 1.1

(1.1) $\quad f(\rho(g)\cdot x) = \chi(g)^{s} f(x) \qquad (g \in G_{\mathbb{R}}^{+})$

と線型微分方程式系

(1.2) $\quad \left(\langle d\rho(A)\cdot x, \frac{\partial}{\partial x}\rangle - s\,\delta\chi(A)\right) f(x) = 0 \qquad (A \in \mathfrak{g})$

は同値である。すなわち(1)の超函数解は(2)の超函数解で逆も正しい。

これは，簡単な計算で容易にたしかめることができる。

この線型微分方程式系(1.2)を $\mathcal{M}_s$ と書くことにする。以下 $\mathcal{M}_s$ の超函数解を調べよう。

この目的のためには，$V_{\mathbb{R}}$ 上の超函数をその cotangent bundle $T^{*}V_{\mathbb{R}}$ 上の microfunction とみなして調べることが有用である。$\mathcal{B}_{V_{\mathbb{R}}}$ を $V_{\mathbb{R}}$ 上の超函数 (hyperfunction) の sheaf, $\mathcal{C}_{T^{*}V_{\mathbb{R}}}$ を $T^{*}V_{\mathbb{R}}$ 上の microfunction の sheaf とする。このとき，

$$
\begin{array}{lccc}
(1.3) \quad sp\,; & f & \longmapsto & (f, sp(f)) \\
 & \cap & & \cap \\
 & \mathcal{B}_{V_{\mathbb{R}}} & \longrightarrow & (\mathcal{B}_{V_{\mathbb{R}}}, \mathcal{C}_{T^{*}V_{\mathbb{R}} - V_{\mathbb{R}}})
\end{array}
$$

によってその間に $\mathcal{D}_V$ - Module としての isomorphism が存在する。(1.3) の map の意味は $\mathcal{B}_{V_{\mathbb{R}}}$ の local section $f(x)$ に対して、$T^*V_{\mathbb{R}}$ の zero section 上に $f(x)$ を、$T^*V_{\mathbb{R}} - V_{\mathbb{R}}$ 上に microfunction $sp(f)$ を対応させるものである。$\mathcal{D}_{V_{\mathbb{R}}}$ は $V_{\mathbb{R}}$ 上の real analytic な係数を持つ微分作用素の環のなす sheaf であり、projection map π; $T^*V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ によって $T^*V_{\mathbb{R}}$ 上の sheaf とみなすことができる。この isomorphism $\overset{\vee}{sp}$ によって我々は、相対不変超函数を求めることを $T^*V_{\mathbb{R}}$ 上の (1.2) をみたす microfunction 解を決定することに問題を移しかえることができる。

特に与えられた超函数 $u \in \mathcal{B}_{V_{\mathbb{R}}}$ に対して、$\mathrm{supp}(\overset{\vee}{sp}(u)) \subset T^*V_{\mathbb{R}}$ を u の <u>singular spectrum</u> と言うことにする。(注意；通常は singular spectrum とは u 自身の $V_{\mathbb{R}}$ 上での support を除いた $\mathrm{supp}(\overset{\vee}{sp}(u)) - V_{\mathbb{R}} \subset T^*V_{\mathbb{R}} - V_{\mathbb{R}}$ のことを言うのであるが、我々の場合、$V_{\mathbb{R}}$ も含めておいたほうが都合が良いのでこのように定義する。) また u を $T^*V_{\mathbb{R}}$ 上の microfunction 自身であると考えているときには、その <u>singular support</u> を単に <u>$T^*V_{\mathbb{R}}$ 上の support</u> と呼ぶことにする。

$T^*V_{\mathbb{R}}$ 上で局所的に（つまり超局所的に）Proposition 1.1. (1.2) の線型微分方程式系を考えるのは、$V_{\mathbb{R}}$ 上で直接考えるより容易である。方程式の構造がかんたんであるからである。その

ような microfunction 解を $T^*V_{\mathbb{R}}$ 上うまくはりあわせて, $T^*V_{\mathbb{R}}$ 全体で global に定義された解を得ることができれば, $\overset{\vee}{sp}$ の map (1.3) でひき戻すことによって, $V_{\mathbb{R}}$ 上の超函数解が得られ, したがって相対不変超函数が得られることになる。

以下この方針にしたがってまとして Proposition 1.1 (1.2) の方程式の microfunction 解を構成することにする。

2. Complex holonomic system

まず complex manifold X 上の線型マイクロ微分方程式系について復習しよう。詳しくは Kashiwara [1] を参照のこと。

X を n 次元 complex manifold, $\mathcal{D}_X$ を X 上の holomorphic な函数を係数とする有限階の微分作用素の環のなす sheaf とする。自然に cotangent bundle T^*X 上では microdifferential operators の sheaf が得られる。これを $\mathcal{E}_X$ と書く。

X 上の線型微分方程式系 $\mathfrak{M}$ とは coherent な左 $\mathcal{D}_X$-Module のことである。通常, ひとつの未知函数 $u(x)$ を持つ連立線型微分方程式系

$$(2.1) \qquad P_i(x, D_x)\,u = 0 \qquad (i = 1, \cdots, N)$$

は $\mathcal{J}$ を $P_1(x, D_x), \cdots, P_N(x, D_x)$ によって生成される左 $\mathcal{D}_X$-Ideal

とするとき，$\mathfrak{M}=\mathcal{D}_X/\mathcal{J}$ としてあらわすことができる。我々は $\mathfrak{M}$ と (2.1) の表示は同じものとして取り扱うので，単に方程式系 $\mathfrak{M}$ と言ったとき (2.1) をあらわすものとする。

さて方程式系 $\mathfrak{M}$ に対して <u>characteristic variety</u> $ch(\mathfrak{M})$ を $supp(\mathcal{E}_X \underset{\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)}{\otimes} \mathfrak{M})$ によって定義する。これは T^*X の中の subvariety であり，Ideal $\mathcal{J}$ の生成元をうまくとれば，それの最高階の部分の多項式の共通零点としてあらわされる T^*X の中の subvariety である。特にこの characteristic variety の次元が，X の次元に等しいとき，$\mathfrak{M}$ を <u>holonomic system</u> と言う。たとえば，我々が考えている Proposition 1.1. (1.2) の相対不変超函数を定義する systems を複素化したもの

$$(2.2)\quad \mathfrak{M}_s;\ \left(\left\langle d\rho(A)x, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle - s\,\delta\chi(A)\right)u(x)=0 \qquad (A\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

は，$(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ の orbit の数が有限個であるという条件のもとに $V_{\mathbb{C}}$ 上の holonomic system になる。

Holonomic system $\mathfrak{M}$ を特徴づけるものは，その characteristic variety の次元であるが，特にそれは次のような性質を持っている。

(2.3) 1) $\dim\ ch(\mathfrak{M}) = \dim X$

2) T^*X 上の 2-form $\omega = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_i$ は $ch(\mathcal{M})$ 上に制限すると消える。

3) $(x, y) \in ch(\mathcal{M})$ ならば $\forall \alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ に対して，$(x, \alpha y) \in ch(\mathcal{M})$ である。

このような性質を持った T^*X 内の subvariety を homogeneous Lagrangian subvariety という。$ch(\mathcal{M})$ が homogeneous Lagrangian subvariety であることを利用して，$ch(\mathcal{M})$ を X の中のいくつかの analytic subsets の conormal bundle の和として記述することができる。

というのは，Λ を T^*X の中の $(x_0, y_0) \in T^*X$ の近傍で定義されたひとつの irreducible homogeneous Lagrangian subvariety であるとするとき，その X 上への projection $\pi(\Lambda)$ は X の中の irreducible subvariety になる。特に $(x_0, y_0) \in \Lambda$ の近傍で Λ が non-singular で projection map $\pi|_\Lambda$; $\Lambda \longrightarrow X$ の rank が constant であるとき，その近傍で

$$(2.4) \qquad \Lambda = T^*_{\pi(\Lambda)} X$$

とあらわすことができるからである。ここで $T^*_{\pi(\Lambda)}X$ は $\pi(\Lambda)$ の conormal bundle をあらわす。homogeneous Lagrangian subvariety Λ が (x_0, y_0) の近傍で与えられたとき，Λ の

non-singular pointsの集合 Λ_{reg} は open dense な subset であり，さらに Λ_{reg} の中の $\pi|_{\Lambda_{reg}}$ が maximal rank となる点，(ヤコビ行列の rank が最大である点)の集合はやはり open dense subset をなすので，そのような各点の近傍において，Λ は (2.4) と書きあらわせる。

ここで念のため conormal bundle の定義をしておく。X を complex manifold，Y をその subvariety とする。Y_{reg} によって Y の non-singular points のなす集合をあらわす。すると Y_{reg} の各点 y において tangent space $T_y Y_{reg}$ が得られる。そこで Y の conormal bundle $T^*_Y X$ を，次のように定義する。

$$(2.5) \quad T^*_Y X = \bigcup_{y \in Y_{reg}} (T^*_{Y_{reg}} X)_y$$

ただし $(T^*_{Y_{reg}} X)_y = \{ \xi \in T^*_y X \,;\, \langle a, \xi \rangle_y = 0 \text{ for } \forall \xi \in T_y Y \}$ であり $\langle\ ,\ \rangle_y$ は y における tangent space $T_y X$ と cotangent space $T^*_y X$ の pair 上の bilinear form である。

ともかく，これによって $ch(\mathcal{M})$ のほとんどすべての点の近傍で，$ch(\mathcal{M})$ はある X 内の analytic subset の conormal bundle としてあらわされることがわかった。

それでは $ch(\mathcal{M})$ を得るためには $ch(\mathcal{M})$ を得るためにはどのような X 内の subvariety が必要で，それらは，どのよう

性質を持っているであろうか。これについては次の Kashiwara [1] の結果がある。

$\mathcal{M}$を complex manifold X 上の holonomic $\mathcal{D}_X$-Module とする。Xの stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が存在して、

$$(2.6) \qquad ch(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{\alpha\in A} T^*_{X_\alpha}X$$

と書くことができる。ここで $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が Xの stratification であるとは、$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は Xの connected な analytic subsets の family であり、次の条件をみたすもののことである。

(2.7) 1) $\overline{X_\alpha}$ と $\overline{X_\alpha}-X_\alpha$ は共にXの analytic subset である。

2) $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は Xの locally finite covering である。

3) $X_\alpha \cap X_\beta = \phi$ if $\alpha\neq\beta$。

4) $\overline{X_\alpha} \cap X_\beta \neq \phi$ ならば $\overline{X_\alpha} \supset X_\beta$。

特にXが$\mathbb{C}$上定義された algebraic manifold であり、stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の各 stratum が algebraic subset となる場合には、我々は最初から各 stratum は irreducible かつ non-singular と仮定してよい。なぜならば、irreducible でない stratum は irreducible components に分解すれば良いし、またある stratum X_α が singularity を持っていたら、その singular locus を $(X_\alpha)_{sing}$ として、X_α を $X_\alpha-(X_\alpha)_{sing}$ と

$(X_\alpha)_{sing}$ の二つの strata に分解し，さらに $(X_\alpha)_{sing}$ が singularity を持っていたときには，これを irreducible components に分解したのち同じことをつづければ良い。これをくりかえすことによって最後には non-singular な strata にまで分解してしまうことができる。この操作によって上の条件 (2.7) はそこなわれない。$\bigcup_\alpha T^*_{X_\alpha}X$ が大きくなるだけである。

例として，たとえば $(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ を有限個の orbits を持つ既約な正則概均質ベクトル空間であるとする。このとき，holonomic system $\mathcal{M}_s$ が (2.2) によって定義されるが，この場合には $X = V_{\mathbb{C}}$ の stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は各 X_α を $V_{\mathbb{C}}$ 内の $G_{\mathbb{C}}$-orbit として定義すればよい。性質(2.7)をみたすことは自然に示される。

以下我々は X を $\mathbb{C}$ 上定義された algebraic manifold として，stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の各 stratum は irreducible non-singular algebraic subvariety であるものとする。

$$(2.8) \qquad \Lambda_{\alpha\mathbb{C}} = \overline{T^*_{X_\alpha}X} \qquad \left(\text{— は Zariski closure を あらわす}\right)$$

とおく。このとき $\Lambda_{\alpha\mathbb{C}}$ は irreducible な homogeneous Lagrangian subvariety であり，

$$(2.9)\quad ch(\mathfrak{M}) \subset \bigcup_{\alpha\in A} \Lambda_{\alpha\mathbb{C}}$$

である。特に $\{\Lambda_{\alpha\mathbb{C}}\}_{\alpha\in A}$ のうち，実際には $ch(\mathfrak{M})$ に含まれていないような $\Lambda_{\alpha\mathbb{C}}$ の族を $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha\in B}$ とし，$C=A-B$ とする。このとき，

$$(2.10)\quad ch(\mathfrak{M}) = \bigcup_{\alpha\in C} \Lambda_{\alpha\mathbb{C}}$$

となる。このようにして得られた $ch(\mathfrak{M})$ の irreducible components の family $\{\Lambda_{\alpha\mathbb{C}}\}_{\alpha\in C}$ は，相互に交わったり，singular points を持っていたり，さらには，X への projection map による image $\pi(\Lambda_\alpha)$ が singular point を持っていたりする。いずれの場合にも，micro function 解を調べる場合には，このような点は最初は除いておいたほうが都合が良い。そこで次のように定義する。

$$(2.11)\quad 1)\ \hat{\Lambda}_{\alpha\mathbb{C}} = T^*_{\pi(\Lambda_\alpha)_{reg}} V_{\mathbb{C}} \subset \Lambda_\alpha.$$

$$2)\ \Lambda^\circ_{\alpha\mathbb{C}} = \left\{ x\in\Lambda_{\alpha\mathbb{C}};\ x \text{ の近傍で } \Lambda_{\alpha\mathbb{C}} \text{ は non-singular であり } \forall\beta\in C, (\beta\neq\alpha) \text{ に対して } x\notin\Lambda_\beta \right\}.$$

このようにおくと $\Lambda^\circ_{\alpha\mathbb{C}}$ も $\hat{\Lambda}_{\alpha\mathbb{C}}$ も non-singular subvariety であり $\Lambda_{\alpha\mathbb{C}}$ の中の open subset となる。特に $x\in\Lambda^\circ_{\alpha\mathbb{C}}$ のとき，x を $ch(\mathfrak{M})$ の <u>non-singular point</u> と言い $x\in\Lambda^\circ_{\alpha\mathbb{C}}$

のとき. x は $\Lambda_{\alpha\mathbb{C}}$ が regular position にある点ということにする。

3. 実領域における holonomic system.

前節と同じようにして $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{J}$ は n 次元 complex algebraic manifold X 上の holonomic system であるものとする。この $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{M}$ が一個の未知函数 u に対する線型微分方程式系

$$(3.1) \quad P(x, D_x)\, u = 0 \qquad\qquad (P(x, D_x) \in \mathcal{J})$$

と同等であることはすでに述べた。また前節と同様に X の stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ で，各 stratum X_α は non-singular algebraic subvariety となるものがあって，

$$(3.2) \quad ch(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{\alpha\in A} T^*_{X_\alpha} X$$

となっているものと仮定する。各 $\alpha\in A$ に対して，

$$(3.3) \quad \Lambda_{\alpha\mathbb{C}} = \overline{T^*_{X_\alpha} X},$$

とおいて，A の subset B に含まれる $\beta\in B$ に対しては $\Lambda_{\beta\mathbb{C}}$ は $ch(\mathcal{M})$ に含まれず，$C = A - B$ とするとき

$$(3.4) \quad ch(\mathcal{M}) = \bigcup_{\alpha\in C} \Lambda_{\alpha\mathbb{C}},$$

となっているものとする。

今度は，これの real form を考える。$X_{\mathbb{R}} \subset X$ を X のひとつの real form，すなわち $X_{\mathbb{R}}$ は real algebraic subvariety で，X がその complex form となっているものとする。こうすれば，$X_{\mathbb{R}}$ 上の超函数の sheaf $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}}$，あるいは $T^*X_{\mathbb{R}}$ 上の microfunction の sheaf $\mathcal{C}_{T^*X_{\mathbb{R}}}$ が自然に定義され，holonomic system $\mathcal{M}$ に対しても超函数解ないしは microfunction 解を考えることができる。このとき，次が成りたつ。

<u>Proposition 3.1.</u>

u を $\mathcal{M}$ の超函数解とする。このとき u の singular spectrum $SS(u)$ は $ch(\mathcal{M}) \cap T^*X_{\mathbb{R}}$ に含まれる。

これは佐藤の基本定理の直接の結果である。

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\Lambda^\circ_{\alpha\mathbb{C}}$，$\widetilde{\Lambda}_{\alpha\mathbb{C}}$ を (2.11) で定義したものとして，

(3.5) $\quad \Lambda^\circ_\alpha = \Lambda^\circ_{\alpha\mathbb{C}} \cap T^*X_{\mathbb{R}}, \qquad \widetilde{\Lambda}_\alpha = \widetilde{\Lambda}_{\alpha\mathbb{C}} \cap T^*X_{\mathbb{R}},$

とおく。このとき Λ°_α や $\widetilde{\Lambda}_\alpha$ は $T^*X_{\mathbb{R}}$ の中の open subset になる。

以後 次の二つの仮定をおく。

(3.6) <u>仮定 1</u> $\Lambda_\alpha = \Lambda_{\alpha\mathbb{C}} \cap T^*X_{\mathbb{R}}$ は real Lagrangian subvariety in $T^*X_{\mathbb{R}}$ であるか、あるいは 0 次元の subvariety であるかのいずれかである。

(3.7) <u>仮定 2</u> 特に Λ_α が real Lagrangian subvariety となったとき、$\forall x \in \Lambda_\alpha^0$ の近傍では $\mathcal{E}_X \underset{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \pi^{-1}(\mathfrak{M})$ (これもさしつかえないかぎり $\mathfrak{M}$ と書く) は $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_\ell$ と $\mathcal{E}_X$-Module として直和分解され各 $\mathfrak{M}_i$ は quantized contact transformation によって $\mathcal{E}_X$-Module として $\mathfrak{M}_{(\lambda_k, m_k)}$ と同型になる。ここで $\mathfrak{M}_{(\lambda_k, m_k)}$ $(\lambda_k \in \mathbb{C},\ m_k \in \mathbb{N}^+)$ は

$$\mathfrak{M}_{(\lambda_k, m_k)};\quad (x_1 D_{x_1} - \lambda_k)^{m_k} u = 0,$$
$$D_{x_2} u = D_{x_3} u = \cdots = D_{x_n} u = 0$$

という $(0, dx_1)$ の近傍で定義された system である。

この二つの仮定のもとに $\mathfrak{M}$ の各 $\Lambda_{\alpha\mathbb{R}}$ の近傍での microfunction 解を書きあらわすことができる。すなわち u を $\mathfrak{M}$ の solution とするとき、

(3.8) $$u = v_1 \oplus v_2 \oplus \cdots \oplus v_\ell,$$

と、ℓ 個の microfunction の直和とみなすことができる。ここで、v_i は $\mathfrak{M}_i$ の microfunction solution である。

このようにして，結局 $\mathcal{M}$ の microfunction solution を調べるためには各直和成分 $\mathcal{M}_i$ の解を調べれば良いことになる。

さて，超局所的には $\mathcal{M}_{(\lambda_k, m_k)}$ と同型な holonomic system の solution は $\Lambda_\alpha^0 \cap \widehat{\Lambda}_\alpha$ の各点の近傍においては，いわゆる有限階の"分数巾"あるいは"対数巾"の階数を持つマイクロ微分作用素（microdifferential operators of "fractional" or "logarithmic" order）を使って一意的に書きあらわすことができる。それを説明しよう。

$\mathfrak{x}_0 = (x_0, y_0) \in \Lambda_\alpha^0 \cap \widehat{\Lambda}_\alpha$ をひとつ fix して，$\mathfrak{x}_0$ の近傍で $\mathcal{M}$ が (3.6) の仮定1.，(3.7) の仮定2. をみたしているものとする。このとき $x_0 = \pi(\mathfrak{x}_0)$ の近傍 (in $X_{\mathbb{R}}$) においては，局所座標系 $(x_1, \cdots, x_n)$ をもってきて，$\pi(\Lambda_\alpha) = \{x_1 = \cdots = x_m = 0\}$ と書くことができる。したがって $\mathfrak{x}_0$ の近傍では，

$$(3.9)\qquad \Lambda_\alpha = T^*_{\pi(\Lambda_\alpha)} X_{\mathbb{R}} = \left\{ (x, \xi) \in T^* X_{\mathbb{R}} ;\ \begin{array}{l} x_1 = \cdots = x_m = 0 \\ \xi_{m+1} = \cdots = \xi_n = 0 \end{array} \right\},$$

と書くことができて，$\mathfrak{x}_0 = (0, dx_1)$ とすることができる。そして microfunction v_k は，

$$(3.10)\qquad v_k = P_k(x'', D_{x'})\,\delta(x')$$

と書くことができることが示される。ここで $\delta(x')$ とは超

函数 $\delta(x_1)\cdots\delta(x_m)$ という一変数デルタ函数の積のあらわす x_0 の近傍での microfunction である。$P_k(x'', D_{x'})$ は $T^*X_{\mathbb{R}}$ 上の"分数巾"あるいは"対数巾"のマイクロ微分作用素で $x''=(x_{m+1},\cdots,x_n)$, $D_{x'}=(D_{x_1},\cdots,D_{x_m})$ だけに depend するものである。座標をとって書けば x_0 の近傍で

$$(3.11)\qquad P_k(x'', D_{x'}) = \sum_{j=0}^{k} P_{kj}(x'', D_{x'})\, D_{x_1}^{\mu}(\log D_{x_1})^{j},$$

と書ける。ここで $\mu\in\mathbb{C}$, $k\in N^+$ そして各 $P_{kj}(x'', D_{x'})$ は x'' と $D_{x'}$ のみに depend する $\mathcal{E}_X$ の section である。これは座標のとり方に depend した表示であり、$X_{\mathbb{R}}$ 上の座標変換にしたがって表示の仕方も変わる。

特に u_k が $\mathcal{M}_k$ の解であるときには、各 $P_{kj}(x'', D_{x'})$ $(j=0,\cdots,k)$ の order は $\lambda_k-\mu\in N$ であり、k の値によらず一定であるか、$P_{kj}(x'', D_{x'})\equiv 0$ であるかのいずれかであることが示される。そこで、この場合の $P_k(x'', D_{x'})$ の principal symbol を

$$(3.12)\qquad \sigma(P_k)(x'', \xi') = \sum_{j=0}^{k} \sigma(P_{kj})(x'', \xi')\,\xi_1^{\mu}(\log \xi_1)^{j}$$

によって定義する。このように定義するとこの principal symbol は $X_{\mathbb{R}}$ の座標のとり方によらず定義される。そこで microfunction u_k の <u>real principal symbol</u> を

$$(3.13)\qquad \sigma_{\Lambda_\alpha}(v_k) = \sigma(P_k)(x'', \xi')\sqrt{|d\xi'|}\Big/\sqrt{|dx'|},$$

と定義する。これは $|v_{\Lambda_\alpha}|^{1/2}\otimes|v_{X_{\mathbb{R}}}|^{-1/2}$ の x_0 の近傍で定義された real analytic section であり、このように定義することによって $\sigma_{\Lambda_\alpha}(v_k)$ は $X_{\mathbb{R}}$ の座標のとり方によらずきまる。ここで v_{Λ_α}, $v_{X_{\mathbb{R}}}$ は各々 Λ_α, $X_{\mathbb{R}}$ 上の volume element の sheaf である。

このように、local に定義した microfunction solution v_k の principal symbol $\sigma_{\Lambda_\alpha}(v_k)$ の直和

$$(3.14)\qquad \sigma_{\Lambda_\alpha}(u) = \bigoplus_{k=1}^{\ell}\sigma_{\Lambda_\alpha}(v_k)$$

によって microfunction solution u の <u>real principal symbol</u> $\sigma_{\Lambda_\alpha}(u)$ を定義することにする。

このような $\sigma_{\Lambda_\alpha}(u)$ は $\Lambda_\alpha^\circ\cap\tilde{\Lambda}_\alpha$ の各点の近傍で定義された $|v_{\Lambda_\alpha}|^{1/2}\otimes|v_{X_{\mathbb{R}}}|^{-1/2}$ (の直和) の real analytic section である。

特に u が Λ_α 全体で定義された microfunction solution である場合には、$\sigma_{\Lambda_\alpha}(u)$ は $\Lambda_\alpha^\circ\cap\tilde{\Lambda}_\alpha$ 全体にまで real analytic section として延長することができる。(局所的に定義したものをつなぎあわせてゆけば良い。)

real principal symbol の性質として重要なことは次のことである。

Proposition 3.2.

u_1, u_2 を $x_0 \in \Lambda_\alpha^\circ \cap \widehat{\Lambda}_\alpha$ の近傍で定義された microfunction で holonomic system $\mathfrak{M}$ の solution となっているものとする。もしその real principal symbol $\sigma_{\Lambda_\alpha}(u_1) = \sigma_{\Lambda_\alpha}(u_2)$ であるならば，$u_1 \equiv u_2$ である。

これは $\mathfrak{M}$ の solution を考える時には少くとも超局所的にはmicrofunction のかわりに，その real principal symbol を考えれば良いことを示している。そこで $ch(\mathfrak{M})$ の各 irreducible component Λ_α に対して $\coprod_{j \in J_\alpha} \Lambda_{\alpha j} = \widehat{\Lambda}_\alpha \cap \Lambda_\alpha^\circ$ を $\widehat{\Lambda}_\alpha \cap \Lambda_\alpha^\circ$ の connected component 分解とする。このとき，Prop. 3.2. によって，各 connected component $\Lambda_{\alpha j}$ 上では $\mathfrak{M}$ の microfunction 解は，その real principal symbols で決定される。我々がここでやろうとしている $\mathfrak{M}$ の超函数解の決定方法は $\{\Lambda_{\alpha j}\}_{\substack{\alpha \in C \\ j \in J_\alpha}}$ の各 Component 上に real principal symbol の section を与えて（つまり $\mathfrak{M}$ の microfunction solution を与えて）それがどのような時に $T^*X_{\mathbb{R}}$ 全体にまで $\mathfrak{M}$ の microfunction solution として延長されるかを調べたうえで，結果として超函数解をすべて決定してしまうという方法である。ここでは技術的な詳しいことにはふれられないので，次節で実例によって実際に相対不変超函数を決定して説明にかえることにする。

4 実例

概均質ベクトル空間 $(G_\mathbb{C}, \rho, V_\mathbb{C})$ として,

$$
\begin{aligned}
(4.1) \qquad & G_\mathbb{C} = GL_n(\mathbb{R})^+ \times SL_n(\mathbb{R}) \ni g = (g_1, g_2) \\
& V_\mathbb{C} = M_n(\mathbb{C}) \ni x \\
& \rho(g) : x \longmapsto g_1 x\, {}^t g_2
\end{aligned}
$$

となる場合を考える。$\chi(g) = \det g_1$ とおく。$\chi(g)$ に対応する相対不変式は $P(x) = \det x$ である。$\chi(g)^s$ $(s \in \mathbb{C})$ に対する相対不変超函数を決める holonomic system は,

$$(4.2) \qquad \mathfrak{M}_s \; ; \; \left(\left\langle d\rho(A)x, \frac{\partial}{\partial x}\right\rangle - s\,\delta\chi(A)\right) u = 0$$

である。これの characteristic variety は,

$$(4.3) \qquad ch(\mathfrak{M}_s) = \bigcup_{i=1}^{n} T^*_{S_{i\mathbb{C}}} V_\mathbb{C} = \bigcup_{i=0}^{n} \overline{T^*_{S_{i\mathbb{C}}} V_\mathbb{C}} \,,$$

で与えられる。ただし $S_{i\mathbb{C}} = \{ x \in M_n(\mathbb{C}) ; \operatorname{rank} x = n-i \}$ であり各 $S_{i\mathbb{C}}$ は $G_\mathbb{C}$ の作用でひとつの orbit になっており, $\{S_{i\mathbb{C}}\}_{i=0,1,\cdots n}$ は $V_\mathbb{C} = M_n(\mathbb{C})$ の stratification をなしている。

$$(4.4) \qquad \Lambda_{i\mathbb{C}} = \overline{T^*_{S_{i\mathbb{C}}} V_\mathbb{C}}$$

とおくと, これは Lagrangian subvariety になっている。そして $\widetilde{\Lambda}_{i\mathbb{C}} = T^*_{S_{i\mathbb{C}}} V_\mathbb{C}$ である。

相対空間 $V_{\mathbb{C}}^*$ 上への反傾表現 ρ^* を考えると $(G_{\mathbb{C}}, \rho^*, V_{\mathbb{C}}^*)$ も正則概均質ベクトル空間になる。特に $V_{\mathbb{C}}$ 上の内積 $\langle x, y\rangle = tr(x\,{}^t y)$ によって，$V_{\mathbb{C}}$ と $V_{\mathbb{C}}^*$ を同一視するとき，$V_{\mathbb{C}}$ と $V_{\mathbb{C}}^*$ の $G_{\mathbb{C}}$-orbit 分解は全く同じであることがわかる。そこで $V_{\mathbb{C}}^*$ 内の $G_{\mathbb{C}}$-orbit も同じ $S_{i\mathbb{C}}$ と書くことにする。$T^*V_{\mathbb{C}}$ は自然に $V_{\mathbb{C}}\times V_{\mathbb{C}}^*$ とみなすことができるから $T^*V_{\mathbb{C}}^*$ も同じく $V_{\mathbb{C}}\times V_{\mathbb{C}}^*$ とみなすことができる。そこで $\Lambda_{i\mathbb{C}}^* = \overline{T^*_{S_{i\mathbb{C}}}V_{\mathbb{C}}^*}$ とするとき，$\Lambda_{i\mathbb{C}} = \Lambda_{n-i\mathbb{C}}^*$ となる。$\widetilde{\Lambda_{i\mathbb{C}}^*} = T^*_{S_{i\mathbb{C}}}V_{\mathbb{C}}^*$ であって，

$$
(4.5)\qquad \begin{aligned}
\Lambda_{i\mathbb{C}}^{\circ} &= \widetilde{\Lambda_{i\mathbb{C}}} \cap \widetilde{\Lambda_{n-i\mathbb{C}}^*} \\
\Lambda_{i\mathbb{C}}^{*\circ} &= \widetilde{\Lambda_{n-i\mathbb{C}}} \cap \widetilde{\Lambda_{i\mathbb{C}}^*}
\end{aligned}
$$

と書くことができることが示される。

ここで $\Lambda_{i\mathbb{C}}^{\circ}$ は $\Lambda_{i\mathbb{C}}$ 内の open dense subset である。$V_{\mathbb{C}}\times V_{\mathbb{C}}^*$ には自然に $G_{\mathbb{C}}$ が作用して $\Lambda_{i\mathbb{C}}$ はこの $G_{\mathbb{C}}$ の作用で不変である。特に $\Lambda_{i\mathbb{C}}^{\circ}$ はひとつの $G_{\mathbb{C}}$-orbit になっている。この orbit を生成する点は

$$
(4.6)\quad \left(\begin{bmatrix} I_{n-i} & \\ & O_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O_{n-i} & \\ & I_i \end{bmatrix} \right) \in V_{\mathbb{C}}\times V_{\mathbb{C}}^*
$$

である。今の場合 $\widetilde{\Lambda_{i\mathbb{C}}} \cap \Lambda_{i\mathbb{C}}^{\circ} = \Lambda_{i\mathbb{C}}^{\circ}$ である。

今度は実領域で相対不変超函数を考える。$G_{\mathbb{R}}^+ = GL_n(\mathbb{R})^+ \times SL_n(\mathbb{R})$，$V_{\mathbb{R}} = M_n(\mathbb{R})$，とおくとこれは $(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ のひと

つの real form となる。この $V_{\mathbb{R}}$ 上での holonomic system $\mathfrak{M}_s$ の超函数解を決定しよう。まず characteristic variety $ch(\mathfrak{M}_s)$ の各 irreducible component $\Lambda_{i\mathbb{C}}$ の real locus $\Lambda_{i\mathbb{R}} = \Lambda_{i\mathbb{C}} \cap T^*V_{\mathbb{R}}$ は $T^*V_{\mathbb{R}}$ 内の real Lagrangian subvariety であり，この点では <u>仮定 1</u> をみたしている。(3.6)。

各 $\tilde{\Lambda}_{i\mathbb{R}} = \tilde{\Lambda}_{i\mathbb{C}} \cap T^*V_{\mathbb{R}}$ の各点の近傍では holonomic system $\mathfrak{M}_s$ は，

$$\mathfrak{M}_{(\lambda_i, 1)} \; ; \quad \begin{aligned} &(x_1 D_{x_1} - \lambda_i)\, u = 0 \\ &D_{x_2} u = \cdots = D_{x_m} u = 0 \end{aligned} \qquad (m = n^2)$$

ただし $\quad \lambda_i = is + \frac{i^2}{2} - \frac{i}{2}$,

と同型である。だから <u>仮定 2</u> (3.7) もみたされる。

$\Lambda_{i\mathbb{R}}^{\circ} = \Lambda_{i\mathbb{R}} \cap \tilde{\Lambda}_{i\mathbb{R}}$ は 2つの connected components に分かれる。各 components は $G_{\mathbb{R}}^{+}$ の作用によってひとつの orbit になっており，それらは

$$P_{i\varepsilon} = \left(\begin{bmatrix} I_{n-i} & \\ & O_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} O_{n-i} & \\ & \varepsilon I_{i-1} \end{bmatrix} \right) \in V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^{*} \qquad (\varepsilon = \pm)$$

によって生成される。そこで P_{i+} (resp. P_{i-}) によって生成される $G_{\mathbb{R}}^{+}$-orbit を Λ_i^{+} (resp. Λ_i^{-}) とおく。

Λ_i^{ε} ($\varepsilon = \pm$) 上の任意の $\mathfrak{M}_s$ の microfunction solution u に対して，その principal symbol は

$$(4.7)\quad \sigma_{\Lambda_i^\varepsilon}(u) = C_{\Lambda_i^\varepsilon}(u)\cdot |P_{\Lambda_i}|^s \sqrt{|\omega_{\Lambda_i}|}\,/\sqrt{|dx|}$$

と書くことができる。ここで $c(u)$ は u にのみ depend する定数であり，

$$(4.8)\qquad P_{\Lambda_i} = P\circ\pi|_W/\langle x,y\rangle^i\,\Big|_{\Lambda_i^\circ},$$

$$\omega_{\Lambda_i} = \pi^{-1}(dx)|_W/(\langle x,y\rangle)^{i^2}\,\Big|_{\Lambda_i^\circ},$$

で定義されるものである。ここで $dx=\wedge\, dx_{ij}$ による $V_{\mathbb{C}}$ 上のユークリッド測度，また

$$W = \{(x,y)\in V_{\mathbb{R}}\times V_{\mathbb{R}}^*\ ;\ \langle d\rho(A)x,y\rangle = 0 \text{ for } \forall A\in\mathfrak{g}_0\}$$

$$(\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})\times\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})\subset\mathfrak{g}).$$

である。P_{Λ_i}，ω_{Λ_i} は各々 Λ_i° 上の real analytic な non-zero function 及び non-zero の volume form となる。この $C_{\Lambda_i^\varepsilon}(u)$ を u の Λ_i^ε 上の coefficient と言う。

時に u が $V_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathfrak{M}_s$ の超函数解である場合 各 coefficient $C_{\Lambda_i^\varepsilon}(u)$ の間には次の関係がある。

$$(4.9)\begin{bmatrix} C_{\Lambda_{i+1}^+}(u) \\ C_{\Lambda_{i+1}^-}(u)\end{bmatrix} = \frac{\Gamma(s+i+1)}{\sqrt{2\pi}}\begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(s+i+1)\right), & \exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(s+i+1)\right) \\ \exp\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(s+i+1)\right), & \exp\left(-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(s+i+1)\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{\Lambda_i^+}(u) \\ C_{\Lambda_i^-}(u)\end{bmatrix}$$

この matrix は $s=-i-1, -i-2, \cdots$ においては定義されていないが，逆行列は意味を持つので，すべての s について定義されているとみてよい。逆にこれらの関係式 (4.9) をみたす $\{C_{\lambda_i}^{\varepsilon}(u)\}$ を coefficients に持つような超函数は必ず一意に存在することが示される。

この関係式を利用して次のような結果を得る。

Theorem 4.1.

(4.2) の $\mathfrak{M}_s$ をみたす超函数解は二次元のベクトル空間をなし，次のものによって生成される。

1) $s \neq -1, -2, \cdots$ の場合；

$$(\quad) \qquad |P(x)|_\varepsilon^s = \begin{cases} |\det x|^s & \text{if } \varepsilon(\det x) > 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon(\det x) < 0 \end{cases} \qquad (\varepsilon = \pm)$$

という超函数 $|P(x)|_\varepsilon^s$ が $Re(s) \gg 0$ のところからの解析接続によって，$s \neq -1, -2, \cdots$ を除いて得られる。これが basis となる。

2) $s = -1, -2, \cdots, -(n-1)$ の場合；

ω_s を $\mathfrak{M}_s$ の solution で $supp(\omega_s) = \overline{S_{(-s)}}$ となるものとする。これは定数倍を除いてユニークに存在する。(じつは $\overline{S_{(-s)}}$ 上の $SL_n(R) \times SL_n(R)$-不変測度になっている) また ν_s を $\mathfrak{M}_s$ の solution で $supp(\nu_s) = \overline{S_{(-s-1)}}$ となるものとする。これは

定数倍及び ω_s を modulo にして 一意的に存在する。特に $\widehat{\omega_s} = \int \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle)\, \omega_s(y)\, dy = (\text{const.})\, \omega_{-n-s}$ であり $\widehat{\nu_s} = (\text{const.})\, \nu_{-s-n}$ (modulo. ω_s) が成立する。$\mathcal{M}_s$ の解の basis は ω_s, ν_s である。

3) $s = -1, -2, \cdots$ の場合；

$\mathcal{M}_s$ の解の basis は $\widehat{|P(x)|_\varepsilon^s}$ $(\varepsilon = \pm)$ である。

参考文献

Kashiwara M [1]; Systems of micro differential equations (Birkhäuser) 1983.