数理解析研究所講究録
第555巻 1985年 85-92



# $\mathbb{Q}_p$ 上の概均質ベクトル空間の相対不変式の複素巾のフーリエ変換について

阪大理　村上 順

序　[J. Igusa] により，p進体上の概均質ベクトル空間の相対不変式の複素巾のフーリエ変換に対しても [M. Sato - T. Shintani] と同様の結果が示された。そしていくつかの例について実際にΓ-因子を計算している。ここでは [M. Sato - T. Kimura] の分類での [1], [2], [3], [13], [15] の概均質ベクトル空間についてフーリエ変換を計算した結果を述べる。

1. 記号　$p$ を奇素数とし，$\mathbb{Q}_p$ を p進体，$\mathcal{O}$ をその整数環とする。また，$\psi$ を $\mathbb{Q}_p$ から $\mathbb{C}$ への加法的指標で，$\psi|_{\mathcal{O}} \equiv 1$，$\psi|_{p^{-1}\mathcal{O}} \not\equiv 1$ となるものを1つ固定し，$\chi$ を $\mathbb{Q}_p^{\times}$ から $\mathbb{C}^{\times}$ への乗法的指標とする。ここで，$\chi(0)=0$ と定義することにより，$\chi$ を $\mathbb{Q}_p$ から $\mathbb{C}$ への写像に拡張しておく。$\omega_s$ は $\omega_s|_{\mathcal{O}^{\times}} \equiv 1$，$\omega_s(p) = p^{-s}$ で定まる乗法的指標とし，$\omega_1(\cdot)$ のことを $|\cdot|$ とも書く。

$(G, V)$ を $\mathbb{Q}_p$ 上の既約正則概均質ベクトル空間

とし，$f$ をその相対不変式とする。$V$ 中の $G$ の open orbits を $Z_1, Z_2, \cdots, Z_\ell$ で表わす。$\check{V}$ を $V$ の dual space とすると，$\check{V}$ も $G$ に関する概均質ベクトル空間になり，$V$ との間に cannonical な同型写像があるので，それを $\varphi$ とする。このとき，$[u, v]$ : $V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ を $[u, v] = \varphi^{-1}(u)v$ で定義すると，これは対称双一次形式となる。$V$ 上の加法に関する不変測度 $du$ で $\psi([\ ,\ ])$ と $du$ に関するフーリエ変換を2回繰り返すともとにもどるように正規化されたものを1つ固定する。超函数としての $\chi(f(\cdot))$ のフーリエ変換

$$g(\chi)(v) = \int_V \chi(f(v))\psi([u, v])\,du$$

について考える。

2. 定理 (J. Igusa [1]) $v \in Z_i$ に対し

$$g(\chi)(v) = \gamma_i(\chi)(\chi_{-1}\omega_{-\frac{n}{d}})(f(v))$$

が適当な $\chi$ に対して成り立つ。

但し，$n = \dim V$，$d = \deg f$ とする。

(正確な statement は [1] を見て下さい。)

以下では，この $\gamma_i(\chi)$ を計算した結果を述べる。

3. $G \times GL_m(\mathbb{Q}_p)$ が $M_m(\mathbb{Q}_p)$ に作用する場合 ([S.-K.] [1])

$M_m(\mathbb{Q}_p)$ 中の $GL_m(\mathbb{Q}_p)$ の open orbit は唯一つ.

$f = \det$ である。 $v \in Z_1$ に対し.

$$g(\chi)(v) = \gamma \cdot \chi^{-1}(f(v))\,|f(v)|^{-m}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)\,|x|^{k-1}\,\psi(x)\,dx$$

4. $GL_m(\mathbb{Q}_p)$ が $Sym_m(\mathbb{Q}_p)$ ($m$ 次対称行列全体) に作用する場合 ([S.-K.] [2]) $(m \geq 2)$

$f = \det$ である。

$v$ が $\begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_m \end{pmatrix}$ $\delta_1\delta_2\cdots\delta_m \neq 0$ の入っている orbit

に入る場合.

$$g(\chi)(v) = \gamma_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m}\,\chi^{-1}(f(v))\,|f(v)|^{-\frac{m+1}{2}}$$

$$\gamma_{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m} = \frac{\chi^{-1}(\delta_1\delta_2\cdots\delta_m)}{|\delta_1\delta_2\cdots\delta_m|^{\frac{m+1}{2}}} \prod_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)\,|x|^{\frac{m-k}{2}} \prod_{j=k+1}^{m} \mu\!\left(\frac{\delta_j}{\delta_k}x\right)\left|\frac{\delta_j}{\delta_k}\right|^{-\frac{1}{2}} dx$$

但し. $\mu(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{Q}_p} \psi(x a^2)\,da^2$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \chi_p(x) + g_2(p)\,\chi_2(x) + g_2(p)\,\chi_2\chi_p(x)\right)$$

ここで $x = u p^k$ , $u \in \mathcal{O}^\times$ とすると

$$\chi_p(x) = \begin{cases} 1 & k:\text{偶数} \\ -1 & k:\text{奇数} \end{cases} \qquad g_2(p) = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \pmod 4 \\ i & p \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

$$\chi_2(x) = \begin{cases} 1 & u\text{が平方元} \\ -1 & u\text{が平方元でない。} \end{cases}$$

5. $GL_{2m}$ が $Alt_{2m}$ (2m次交代行列の全体) に作用する場合 ([S.-K.][3]) $(m \geqq 3)$

open orbit は唯一つで、$f = Pff$ である。

$$g(\chi)(v) = \gamma \cdot \chi^{-1}(f(v))\, |f(v)|^{-2m+1}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)\, |x|^{2k-2}\, \psi(x)\, dx$$

6. $Sp_{2n} \times GL_{2m}$ が $M_{2n,2m}$ に作用する場合 ([S.-K.][13]) $(n \geqq 2m \geqq 2)$

open orbit は唯一つ

$$f(v) = Pff({}^t v J v) \qquad J = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & n \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{smallmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{smallmatrix} \\ \hline \begin{smallmatrix} & & -1 \\ & \iddots & \\ -1 & & \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$g(\chi)(v) = \gamma\, \chi^{-1}(f(v))\, |f(v)|^{-4n}$$

$$\gamma = \prod_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)\, |x|^{\frac{k-1}{2}}\, \psi(x)\, dx \quad \prod_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)\, |x|^{2n-2i+1}\, \psi(x)\, dx$$

7. $GO_n \times SL_m$ が $M_{n,m}$ に作用する場合

([S-K][15])　$(n \geqq 3,\ \frac{n}{2} \geqq m \geqq 1)$

a). $n$: odd の場合

open orbit は唯一つ.

$f(v) = \det(vQ\,{}^t v)$　但し. $Q = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,n}$

$GO_n$ は $Q$ を scalar 倍を除いて不変にするものとする。

$$g(\chi)(v) = \gamma \cdot \chi^{-1}(f(v))\,|f(v)|^{-n}$$

$$\gamma = \int_{\mathbb{Q}_p^m} \Big( \prod_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)|x|^{\frac{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \mu\big(x\tfrac{y_j}{y_i}\big)\,\psi(x)\,dx \Big)$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \chi(y_i)|y_i|^{\frac{n-i-1}{2}} \mu(y_i)^{m-i+1} \psi(y_i)\,dy_1\cdots dy_m$$

但し. $\mu(x)$ の定義は §4 にある。

b). $n$: even. $GO_n$: split の場合.

open orbit は唯一つ.

$f(v) = \det(vQ\,{}^t v)$　$Q = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \end{pmatrix} \in M_{n,n}$

$GO_n$ は $Q$ を scalar 倍を除いて不変にするもの.

$$g(\chi)(v) = \gamma \cdot \chi^{-1}(f(v))\,|f(v)|^{-n}$$

$$\gamma = \int_{\mathbb{Q}_p^m} \prod_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)|x|^{\frac{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \mu\big(x\tfrac{y_j}{y_i}\big)\,\psi(x)\,dx$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \chi(y_i)\,|y_i|^{\frac{n-i-1}{2}} \mu(y_i)^{m-i} \psi(y_i)\,dy_1\cdots dy_m.$$

c). $n$: even $GO_n$: non-split の場合

$f(v) = \det({}^t v\, Q\, v)$

$\delta \in \mathcal{O}^\times \setminus (\mathcal{O}^\times)^2$

$$Q = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & 0 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & \delta & 0 & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & 0 & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

$m \geqq 2$ の場合

$GO_n$ は $Q$ を scalar 倍を除いて不変にするもの

orbit は

$$v_1 = \begin{array}{r} \\ \frac{n}{2}-m \\ m \\ \\ m \\ \\ \frac{n}{2}-m \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad}^{m} \\ \left(\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \\ \hline & 0 & \end{array}\right) \end{array}, \quad v_2 = \left(\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \hline p & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & & 0 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & \\ \hline & 0 & \end{array}\right)$$

とすると、

$v_1$ を含む $Z_1$ と $v_2$ を含む $Z_2$ とがある。

$v \in Z_1$ に対しては

$$g(\chi)(v) = \gamma_1\, \chi^{-1}(f(v))\, |f(v)|^{-n}$$

$$\gamma_1 = \chi^{-1}(\delta) \cdot \int_{\mathbb{Q}_p^{m-1}} \Big( \prod_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)\, |x|^{\frac{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \mu\Big(x \frac{y_j}{y_i}\Big)\, \psi(x)\, dx \Big)$$

$$\times \prod_{i=1}^{m-1} \chi(y_i)\, |y_i|^{\frac{n-i-1}{2}}\, \mu(y_i)^{m-i}\, \mu(-\delta y_i)\, \psi(y_i)\, dy_1 \cdots dy_{m-1}$$

$$\times \int \chi(a)\, |a|^{\frac{n}{2}}\, \psi(a)\, da \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\delta - b^2)\, |\delta - b^2|^{\frac{m-1}{2}}\, \mu(\delta - b^2)^{m-1}\, db$$

$v \in Z_2$ に対しては

$$g(\chi)(v) = \gamma_2 \cdot \chi^{-1}(f(v))\,|f(v)|^{-n}$$

$$\gamma_2 = \chi^{-1}(p\delta)\, p^{n+\frac{m}{2}-1} \int_{\mathbb{Q}_p^{m-1}} \qquad y_j' = \begin{cases} p\,y_1 & j=1 \\ y_j & j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left( \prod_{i=1}^{m-1} \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(x)\,|x|^{\frac{i-1}{2}} \prod_{j=1}^{i-1} \mu\!\left(x\frac{y_j'}{y_i}\right) \psi(x)\,dx \right)$$

$$\times \prod_{i=1}^{m-1} \chi(y_i)\,|y_i|^{\frac{n-i-1}{2}}\,\mu(y_i)^{m-i}\,\mu(-\delta y_i)\,\psi(y_i)\,dy_1 \cdots dy_{m-1}$$

$$\times \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(a)\,|a|^{\frac{n}{2}}\,\psi(a)\,da \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\delta-b^2)\,|\delta-b^2|^{\frac{m-1}{2}}\,\mu(\delta-b^2)^{m-1}\,db$$

但し、
$$\int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\delta-a^2)\,da = \frac{\chi(\delta)\int \frac{\chi^{-1}(x)}{|x|}\psi(x)\,dx}{\int \frac{\chi^{-1}(x)}{|x|^{\frac{3}{2}}}\,\mu(-\delta^{-1}x)\,\psi(x)\,dx}$$

であり、$\mu(x)$ は乗法的指標の和なので、$\mu(\cdot)$ 達の積を展開して各変数ごとにまとめることにより、上の場合のどれもが、1変数の $\Gamma$-函数を用いて表わされていることがわかる。

c) で $m=1$ の場合、複素中に対しては [J. Igusa] で計算されている。一般の場合には、まだ計算していません。

文献

[1] J. Igusa, Some results on p-adic complex powers, Amer. J. of Math., 106 (1984), 1013-1032.

[2] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J., 65 (1977), 1-155.

[3] M. Sato and T. Shintani, On zeta-functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math., 100, 1 (1974) 131-170.