数理解析研究所講究録
第556巻 1985年 219-230

低いレベルの同時計算量について

電気通信大学　関口正裕（Masahiro Sekiguchi）

I．はじめに

本稿では，時間と領域が同時に限定されたチューリング機械によって受理される言語のクラスについて研究する。興味の対象は，決定性の多項式時間と対数多項式領域で同時に受理されるクラス（ＳＣと呼ばれることがある）や，対応する非決定性のクラスが中心である。この種のクラスは実際的計算可能性の立場などからも重要であるが，あまり多くは知られていない。

P≠NP予想を持ち出すまでもなく，決定性と非決定性の計算の能力の比較は重要な問題である。最近になってPaulら[3]や筆者［5]が計算資源を同じくする計算で，決定性と非決定性のチューリング機械に能力の差があることを示した。しかし，どちらもある意味で特別な場合を扱っており，一般的な場合に成立する定理は得られていない。

Kanann [2] は，より広い場面での分離を目指して関連した結果を示している。そこでは有限回のオルタネーションを行なうチューリング機械と，時間と領域を同時に限定した決定性チューリング機械が基本的な道具として用いられる。本稿では，時間と領域が同時に限定された有限回のオルタネーションを行なうチューリング機械を用いて，同時計算量のクラスに関する結果を示す。結果は，Kanannによる定理を改良するものなどを含む。

本稿の主な結果は次のようなものである。

$$NTISP(poly, polylog) \subset \bigcup_i \Sigma_i TISP(n, n^{\varepsilon})$$

$$DTISP(n^a, \log^i n) \subsetneq NTISP(n^a, \log^{i+\varepsilon} n)$$

ここでεは正の，a, iは1より大きい任意の数である。

II. 定義と記法

計算モデルはオルタネイティングオフライン多テープチューリング機械である。これを単にTMと書く。初期状態が存在的なものをσTM，全称的なものをπTMと呼ぶ。本稿で扱うTMは有限回のオルタネーションを行なうものである。オルタネーションが高々 $i-1$ 回しか起きないようなσTM，又はπTM をそれぞれ σ_iTM，π_iTM と言う。つまり全ての状態が存在的なTMは σ_1TM である。σ_1TM を特に非決定性TMと呼ぶ。

TMがあって，どの様相もそれに続く様相への遷移が一意的ならば<u>決定性</u>であると言う。便宜上，決定性TMを<u>σ_0TM</u>とか<u>π_0TM</u>で表わす。

作業用テープがk本のものを<u>kテープ</u>TMと言う。

TとSは自然数上の関数とする。あるTMが<u>T時間S領域限定</u>であるとは，長さnの任意の入力に対する全ての計算がT(n)ステップ以内に停止し，かつS(n)個を越えるテープセルを使用しないことである。T時間S領域限定TMのことを，tisp(T, S)TMと書く。

TとSに対して言語のクラスを次のように定める。

$$\Sigma_i TISP_k(T, S) = \{L \mid L\text{を受理する}k\text{テープ}\sigma_i\ tisp(O(T), O(S))\ \text{TMが存在する。}\}$$

$$\Sigma_i TISP(T, S) = \bigcup_k \Sigma_i TISP_k(T, S)$$

$\Pi_i TISP_k$, $\Pi_i TISP$も同様とする。ここでクラスを定義するTMがtisp(O(T), O(S))として，定数倍を含んでいることに注意。これは本稿の条件では線型加速定理が知られていないためである。$\Sigma_1 TISP$, $\Sigma_0 TISP$を特に$NTISP$, $DTISP$と書く。関数の位置に関数の集合が書かれた場合には例えば，

$$DTISP(\mathcal{T}, \mathcal{S}) = \bigcup_{T\in\mathcal{T}, S\in\mathcal{S}} DTISP(T, S)$$

を表わすものとする。関数の集合として，

$$poly = \{n^k \mid k \geq 1\}$$

$$\mathrm{polylog} = \{\log^l n \mid l \geq 1\}$$

と定める。

ある関数fが<u>構成可能</u>であるとは，xの2進数表示を入力として，適当な作業テープ上に$f(x)$の2進数表示を書き出して止まる$\sigma_0\mathrm{tisp}(n^k, n)$ TMが存在することである。入力xの長さnは$\Theta(\log x)$であるから，xから見ると$o(x)$時間$\Theta(\log x)$領域で$f(x)$が求まる。この条件は通常使われるものよりも強い。しかし本稿では多項式より大きな関数は必要ないので，たいていの場合にこれで十分である。

以下では特にことわらない限り全ての関数は単調非減少であるとし，時間は$T(n) \geq n$，領域は$S(n) \geq \log n$と仮定する。

<u>Ⅲ. オルタネーションによる高速化</u>

<u>補題1</u>　任意の構成可能なT, S, fと，任意の整数$k \geq 1$, $l \geq 0$が$S\cdot f = o(T/f^l)$を満たすとき次が成立する。

$$NTISP_k(T,S) \subset \Sigma_{2l+1}TISP_{k+1}(T/f^l, S\cdot f)$$

<u>証明</u>　$L \in NTISP_k(T,S)$と仮定する。ある定数t, sと，Lを受理するkテープ$\sigma_1\mathrm{tisp}(t\cdot T, s\cdot S)$ TM Mが存在する。これをもとにして，Lを受理する$k+1$テープ$\sigma_{2l+1}\mathrm{tisp}(\Theta(T/f^l), \Theta(S\cdot f))$ TM M'を次のように構成する。

まず，$l+1$個のTM $N_0, N_1, \cdots, N_l$を構成する。N_0はMをシミュレートする部分を含み，N_iはN_{i-1}をシミュレートする部

分を含む。各N_i ($0 \le i \le \ell$) は次を満すように構成する。ただし以下で様相は, Mのk本の作業テープの内容と全てのヘッドの位置, 及び有限制御部の状態を$O(S)$の文字列で表わしたもので, 全て同じ長さとする。

<1> N_i は$k+1$テープσ_{2i+1} TMである。

<2> N_i は入力テープにMに対する入力xを, 第1作業テープにMの2つの様相αとβを受け取って動作する。

<3> N_i はMの入力がxで, Mが高々 $t \cdot T(|x|)/f^{\ell-i}(|x|)$ ステップで様相αから様相βへ遷移可能なとき, そのときに限って受理状態に入る。

各N_iは実際には次のように構成する。

N_0は次のように構成する。

(1) N_0は$t \cdot T(|x|)/f^{\ell}(|x|)$ を構成して第1作業テープの余白に書き出す。構成可能性の仮定より, この段は$O(|x|)$時間$O(\log|x|)$領域で可能である。

(2) N_0は第2作業テープ以後のk本の作業テープに様相αの表わす内容を再現し, その後第1テープ上でステップ数を算えながらMを$t \cdot T(|x|)/f^{\ell}(|x|)$ステップ間シミュレートする。この段はMの取り方より$O(S)$領域で可能である。

(3) N_0は様相βと実際のシミュレート後の作業テープの内容を比較し, それらが同じであるとき, そのときのみ受理す

る。　この段に必要な時間と領域は十分小さく無視できる。N_0は全体では，$O(T(|\alpha|)/f^{\ell}(|\alpha|))$時間$O(S(|\alpha|))$領域で停止する。

N_i $(1 \leq i \leq \ell)$ は，N_{i-1}を用いて次のように構成する。

(1) N_iは，まず$f(|\alpha|)$を構成する。以下$u=f(|\alpha|)$とする。

(2) N_iはMの様相を存在的に$u-1$個予想して第2テープ上に順に書き出す。これを$\gamma_1, \cdots \gamma_{u-1}$とする。また$\gamma_0=\alpha$, $\gamma_u=\beta$としておく。各様相は長さ$O(S(|\alpha|))$であるから，この段は時間領域とも$O(f(|\alpha|)\cdot S(|\alpha|))$で可能である。

(3) N_iは$0 \leq v \leq u-1$なるvを全称的に1つ選択する。

(4) N_iは第1作業テープ上にγ_vとγ_{v+1}を書き移し，他を全て消す。その後γ_vをα, γ_{v+1}をβとしてN_{i-1}をシミュレートする。

$N_0, N_1, \cdots, N_\ell$の構成で先に示した条件<1>～<3>が満たされることは，iに関する帰納法より明らかである。また，各N_iがみな$O(T(|\alpha|)/f^{\ell}(|\alpha|))$時間$O(S(|\alpha|)\cdot f(|\alpha|))$領域で停止することも，$i$に関する帰納法で容易に示される。

N_ℓを用いて，M'は次のように構成する。

(1) M'は入力αに対して$s \cdot S(|\alpha|)$を構成し，Mの様相を存在的に2つ予想する。これをα, βとする。

(2) M'は，αがMの初期様相，βがMの受理様相であること

を確認した後，この α, β に対して N_ℓ をシミュレートする。

N_ℓ の性質から，M' が必要な条件を満すことは明らかである。

証明終

系2　補題と同じ条件のFで次が成立する。

$$\mathrm{DTISP}_k(T, S) \subset \Sigma_{2\ell}\mathrm{TISP}_{k+1}(T/f^\ell, S\cdot f)$$

証明　補題と同様の構成を行なうが，Mが σ_0TM になるので N_0 は σ_0TM でよい。よって N_i は σ_{2i}TM になる。証明終

補題1から次の定理が得られる。これはKanann[2] の定理3を改良するものである。

定理3　任意の $\varepsilon>0$ に対して次が成立する。

$$\mathrm{NTISP}(\mathrm{poly}, \mathrm{polylog}) \subset \bigcup_{i\geq 1}\Sigma_i\mathrm{TISP}(n, n^\varepsilon)$$

証明　$m > 1/\varepsilon$ を満すよう m を取る。自然数 k について，$T(n)=n^k$, $S(n)=\log^k n$, $f(n)=n^{1/m}$, $\ell=m\cdot k$ と置いて補題1を用いる。すると

$$\begin{aligned}&\mathrm{NTISP}_k(n^k, \log^k n)\\ &\subset \Sigma_{2\ell+1}\mathrm{TISP}_{k+1}(n, n^{1/m}\cdot\log^k n)\\ &\subset \bigcup_i\Sigma_i\mathrm{TISP}_{k+1}(n, n^\varepsilon) \qquad (\because\ n^{1/m}\cdot\log^k n = O(n^\varepsilon))\end{aligned}$$

となる。両辺を，全ての k について和集合を取れば定理が得られる。

証明終

包含の右辺を対数多項式に保てば次の形を得る。

<u>定理4</u>　任意の $l \geqq 0$ について次が成立する。

$$\Sigma_1 TISP(T, polylog) \subset \Sigma_3 TISP(T/log^l, polylog)$$

$$\Sigma_0 TISP(T, polylog) \subset \Sigma_2 TISP(T/log^l, polylog)$$

ただしTは任意の構成可能関数である。

<u>証明</u>　$S(n)=log^i n$, $f(n)=log\ n$, $l=1$ として補題1及び系2を用い，後に全ての i について両辺の和集合を作れば定理が得られる。　<u>証明終</u>

Ⅳ. クラス間の分離

前半では「含む」という形の命題を考えた。後半では，「真に含む」という形の命題を示す。まず補題を1つ示す。これはオルタネーションの回数を「引き移す」ものである。

<u>補題5</u>　ある構成可能で $S=o(n)$ なる T, S と，$i>j\geqq 0$ なる i, j について，もし

$$\Sigma_i TISP(T, S) = \Sigma_j TISP(T, S)$$

であれば，任意の $l \geqq j$ について

$$\Sigma_l TISP(T, S) = \Sigma_j TISP(T, S)$$

<u>証明</u>　$\Sigma_j TISP(T, S) \subset \Sigma_l TISP(T, S)$ は $l \geqq j$ より明らかである。そこで $\Sigma_l TISP(T, S) \subset \Sigma_j TISP(T, S)$ であることをPaulとReischuk[4]の補題1と類似の，l に関する帰納法で示す。

$l=j$ では明らか。

$l>j$ を考える。$L \in \Sigma_l TISP(T, S)$ だとする。Lを受理する

σ_ℓ tisp$(t_1 \cdot T, s_1 \cdot S)$TM M_1 が存在する。M_1を次のように修正してM_2とする。M_2は初めてのオルタネーションを行なうときに以下が成立するようにする。

〈1〉全てのヘッドは各テープの左端にある。

〈2〉第1作業テープをのぞき，他の全ての作業テープはみな空白である。

M_2はM_1と同じくLを受理するσ_ℓ tisp$(t_2 \cdot T, s_2 \cdot S)$TMである。

このようなM_2は次のように構成することができる。初めはM_1をシミュレートし，初めてのオルタネーションを行なう段になると，各作業テープ上のヘッド位置に印を付け，全ての作業テープの内容を第1作業テープ上に転送し，入力ヘッドの位置を第1作業テープ上に2進数で記録する。次にM_2はオルタネーションを行なう。そして各テープの内容とヘッドの位置をもとにもどした後で，M_1のシミュレーションを再開する。

M_2の動作を，初めてのオルタネーションで2つに分けて，次のように考えることができる。前半は入力xを長さ高々$s_1 \cdot S(|x|)$の列に存在的に写像するσ_1TM，後半は入力xと，前半が書き出した列yとの対を受理する$\sigma_{\ell-1}$TMである。

次のような言語L'を考える。

$L' = \{x\#y \mid |y| \leq s_2 \cdot S(|x|)$，$M_2$の最初のオルタネーショ

ンの際に入力がx，第1テープがyであれば

M_2 はxを受理する。}

ここで#は新らしい文字である。L'はM_2 の後半を用いて受理できるので$\Pi_{\ell-1}TISP(T,S)$ の元である。よって

$$
\begin{aligned}
& L' \in \Pi_{\ell-1}TISP(T,S) \\
\Rightarrow\ & \overline{L'} \in \Sigma_{\ell-1}TISP(T,S) \\
\Rightarrow\ & \overline{L'} \in \Sigma_{j}TISP(T,S) \qquad \text{（帰納法の仮定より）} \\
\Rightarrow\ & L' \in \Pi_{j}TISP(T,S)
\end{aligned}
$$

となってL'を受理する$\pi_j tisp(t_3 \cdot T, s_3 \cdot S)$ TM M_3 が存在する。

M_3 を用いて，Lを受理する$\sigma_{j+1}\ tisp(t_4 \cdot T, s_4 \cdot S)$ TM M_4 を構成する。M_4 は初めはM_2 の前半の動作をシミュレートする。M_2 がオルタネーションを行なって後半に入る段になると，M_4 は以後はM_3 のシミュレーションを行なう。このときM_4 への入力をx，そこまでのM_2 の第1作業テープの内容をyとしたときに，M_3 への入力は$x\#y$ であるとしてシミュレートする。シミュレートの速度を落とさないように，M_4 はM_3 よりも1本多いテープを持ち，そこにyを置くようにする。

以上から$L \in \Sigma_{j+1}TISP(T,S)$となり

$$\Sigma_{\ell}TISP(T,S) \subset \Sigma_{j+1}TISP(T,S)$$

を得る。$i \geqq j+1$であるから補題の仮定より

$$\Sigma_\ell \mathrm{TISP}(T,S) \subset \Sigma_j \mathrm{TISP}(T,S)$$

となる。　証明終

次の補題は我々のモデルでの標準的な階層定理である。

補題6　T_1, T_2, S_1, S_2 が皆構成可能であって，$T_1 \cdot \log T_1 = o(T_2)$，$S_1 = o(S_2)$，$S_1 = O(T_1)$，$S_2 = O(T_2)$ならば，任意の$i$について次が成立する。

$$\Sigma_i \mathrm{TISP}(T_1, S_1) \subsetneq \Sigma_{i+1} \mathrm{TISP}(T_2, S_2)$$

略証　BrussとMeyer[1]の定理1，Paulら[3]の補題4.1と同様に容易に証明可能である。　証明終

以上と補題1を用いて次の定理を得る。

定理8　任意の$a>1$, $i \geqq 1$, $\varepsilon > 0$について次が成立する。

$$\mathrm{DTISP}(n^a, \log^i n) \subsetneq \mathrm{NTISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n)$$

$$\mathrm{NTISP}(n^a, \log^i n) \subsetneq \Sigma_2 \mathrm{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n)$$

証明　ここでは前者だけを証明する。後者も同様に証明できる。

まず，$0 < 1/r < \varepsilon$ なる自然数rを適当に選んで固定する。$T(n) = n^a$, $S(n) = \log^i n$, $f(n) = \log^{1/r} n$, $\ell = r+1$ として系2を用い，

$$\Sigma_0 \mathrm{TISP}(n^a, \log^i) \subset \Sigma_{2r+2} \mathrm{TISP}(n^a/\log^{1+1/r} n, \log^{i+1/r})$$

を得，$(n^a/\log^{1+1/r} n) \cdot \log(n^a/\log^{1+1/r} n) = o(n^a)$ なので補題6によって，

$$\Sigma_0\mathrm{TISP}(n^a, \log^i n) \subsetneq \Sigma_{2r+3}\mathrm{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) \qquad \langle 1 \rangle$$

を得る。ここで定理の逆，つまり

$$\Sigma_0\mathrm{TISP}(n^a, \log^i n) = \Sigma_1\mathrm{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) \qquad \langle 2 \rangle$$

を仮定して矛盾を導く。<2>から明らかに

$$\Sigma_0\mathrm{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) = \Sigma_1\mathrm{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) \qquad \langle 3 \rangle$$

となるので，これに補題5を用いると

$$\Sigma_0\mathrm{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n) = \Sigma_{2r+3}\mathrm{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n)$$

が得られる。これに<3>,<2> を順に使って

$$\Sigma_0\mathrm{TISP}(n^a, \log^i n) = \Sigma_{2r+3}\mathrm{TISP}(n^a, \log^{i+\varepsilon} n)$$

が得られ<1>と矛盾する。よって定理は成立する。<u>証明終</u>

参考文献

[1] A.R.Bruss and A.R.Meyer: ‘On time-space classes and thier relation to the theory of real addition,’ Theoret. Comp. Sci., 11, 59-69, 1980

[2] R.Kanann: ‘Towards separating nondeterminism from determinism,’ Math. Syst. Theory, 17, 29-45, 1984

[3] W.J.Paul, N.Pippenger, E.Szemeredi and W.T.Trotter: ‘On determinism versus non-determinism and related problems,’ Proc. 24th IEEE FOCS, 429-438, 1983

[4] W.Paul and R.Reischuk: ‘On alternation II,’ Acta Inform., 14, 391-403, 1980

[5] 関口正裕: ‘低いレベルの同時計算量について,’ 信学技報, AL-84-8, 1984