

グラフパッキング問題の計算複雑度 (Computational complexity of Graph Packing Problems)

増山 繁 (京都大学工学部)
張 澤増 (西北電訊工程学院、西安)
茨木俊秀 (豊橋技術科学大学)
三根 久 (京都大学工学部)

あらまし 本稿では、グラフのピンパッキング問題を辺パッキング問題と節点パッキング問題とに分けて定義し、その計算の複雑さを明らかにする。一般のグラフを箱とし、その部分グラフを品物とすると、節点パッキング問題については、既に強NP完全であることが知られているが、辺パッキング問題も強NP完全であることを示す。更に、箱が一樣(d,H)木の場合も一般には辺パッキング問題も節点パッキング問題も強NP完全であることを示す。一方、箱が一樣(d,H)木で品物の種類が定数とした場合に対しては、動的計画法に基づく効率のよいアルゴリズムを求めた。特に、品物も一樣(k,d)木一種の場合等に対しては、箱の必要数をk,d,Hで陽に表現する式を求めた。

1. まえがき

ピンパッキング問題は、長さ p_i ($1 \leq i \leq n$) の品物を全長 B の箱に詰めるときに必要な箱の個数 k を最小にする問題である。この問題は強NP完全であることが知られており、[JOHN 74]以来、主に各種近似解法の性能評価の観点から精力的に研究されてきた(要約 [COFF 84]等参照)。さらに、[BAKE 80]以来、長方形の品物を長方形の箱に詰める二次元パッキング問題に対する各種近似解法の性能評価に関する研究も活発になされてきている(やはり、要約 [COFF 84]参照)。

ところが、規格品のパッケージを用いて回路を実現する場合のように、現実の問題には箱や品物にグラフ等の何等かの構造をもたせて定式化すべき問題が少なからずある。そこで本稿では、ピンパッキング問題で、箱も品物もグラフである場合を、箱に詰める際に品物の間で節点の重なりは許すが辺の重なりは許さない辺パッキング問題と、辺も節点も重なりを許さない節点パッキング問題とに分けて定義し、その計算の複雑さを明らかにする。

第2節では以下の議論に必要な範囲で定義を与える。節点パッキング問題に関しては、[KIRK 83]の結果から、品物が一種類の場合でも、品物が節点数3以上の連結成分を含めば、強NP完全であることが直ちに分るが、第3節では、辺パッキング問題も、品物を一種類 K_3 に限り、しかも箱を平面グラフに限っても強NP完全であることを示す。さらに、箱が

一様 (d, H) 木で、品物もすべて (d, h_i) 木 $(i=1, 2, \dots, k)$ の場合も、辺パッキング問題、節点パッキング問題の何れも、一般には強NP完全であることを示す。一方、第4節では、箱が一様 (d, H) 木の場合、品物の数を定数とすると、動的計画法に基づき、効率良く解けることを示す。特に、品物も一様 (d, h) 木一種の場合等に対しては、箱の必要数を h, d, H で表現する式を求める。

2. 諸定義

グラフ $G = (V, E)$ (但し、 V, E はそれぞれ節点と辺の集合) を箱、 G の部分グラフ G_i $(1 \leq i \leq n)$ にそれぞれ同型な G の部分グラフ $G' = (V', E')$ $(1 \leq i \leq n)$ が存在して、

$$\bigcup_i E'_i \subset E, E'_i \cap E'_j = \emptyset \text{ for } i \neq j \quad (2.1)$$

が成り立つとき、辺パッキング可能であるという。さらに、式(2.1)とともに、

$$\bigcup_i V'_i \subset V, V'_i \cap V'_j = \emptyset \text{ for } i \neq j \quad (2.2)$$

も成り立つとき、節点パッキング可能であるという。グラフ G を箱とし、その部分グラフ $(1 \leq i \leq n)$ を品物とする辺(節点)パッキング問題は、 n 個すべての品物を辺(節点)パッキングするのに必要な箱の個数 k を最小にする問題である。両者を併せてグラフパッキング問題と呼ぶ。たとえば、図1(a)の箱に品物 K_3 (節点数3の完全グラフ) が3個辺パッキング可能であるのに対し、節点パッキングは1個しか可能でない(図1(b), (c)参照)。従っ

て、品物 K_3 が5個あるとき、箱を図1(a)のグラフとする辺パッキング問題と節点パッキング問題の解はそれぞれ2と5である。

次に、根付き木で、ある節点の深さとは、根からその節点までの道上の辺数である。さらに、最も深さの大きい葉の深さをその根付き木の高さという。正則 (d, h) 木とは、葉以外の節点すべてが d 個ずつ子をもつ高さ H の根付き木である。また、一様 (d, H) 木とは、すべての葉の深さが H である正則 (d, H) 木である。さらに、櫛形 (d, H) 木とは、根からの深さが等しい節点の各集合 S_i (i は深さ) に対して、 S_i $(1 \leq i \leq H-1)$ に属する節点のうち、最も左の節点のみが子をもつ正則 (d, H) 木である。

3. グラフパッキング問題の計算の複雑さ

本節では、グラフパッキング問題の計算の複雑さを明らかにする。まず、辺パッキング問題が強NP完全であることを示そう。

定理3. 1. 箱を平面グラフ、品物を K_3 に限っても辺パッキング問題は強NP完全である。

(証明) この問題がクラスNPに属することは明らかである。そこで、平面Cubicグラフ (即ち、各節点の次数がすべて3のグラフ) の独立集合問題 [GARE 79] からの多項式時間の帰着を行う。但し、グラフの独立集合問題 とは、整数 k に対し、 k 以上の要素からなる互に辺で接さない節点の集合が存在するかどうかを決定する問題であり、既にNP完全であることが知られている [GARE 79]。

さて、平面Cubicグラフ G に対し、その双対グラフ G^* を考える。すると、 G の各節点と G^* の部分グラフとしての K_3 とが1対1に対応することに着目すると (図2参照)、

G が k 個以上の節点からなる独立集合をもつ

<=====>

G^* に k 個以上の K_3 が辺パッキングできる

となる。これで、平面Cubicグラフ G の独立集合問題からの多項式時間の帰着が示せ、辺パッキング問題の強NP完全性が示せた。□

一方、節点パッキング問題に関しては、[KIRK 83] が既に次の一般的な結果を得ている。

定理3. 2 [KIRK 83]. G をグラフ、 G_1 を G の部分グラフとする。 G の G_1 による 因子分解

問題、すなわち、 G を箱とし、 G_1 を品物とする辺パッキングで、 G のすべての節点が被覆されるものがあるかどうかを決定する問題は G_1 がその部分グラフとして K_1 , K_2 のみを含む場合を除き強NP完全である。□

次に、箱を楕形 (d, H) 木や一様 (d, H) 木に限っても辺パッキング問題が共に強NP完全であることを、何れも3分割問題 [GARE 79] からの多項式時間の帰着で示そう。

定義3. 1. 3分割問題 とは、 $3m$ 個の要素から成る集合 A と正整数 B 、および、 $B/4 < s(a) < B/2$ かつ $\sum_{a \in A} s(a) = mB$ を満たす大きさ $s(a)$ が各 $a \in A$ に与えられたとき、 A の要素の3

個ずつの組(計 m 組)で、それぞれの和が丁度 B になるものが存在するかどうかを決定する問題である。□

これは強NP完全であることが知られている[GARE 79]。

定理3.3. 辺パッキング問題は箱を楕形 (d, H) 木や一様 (d, H) 木に限っても強NP完全である。

(証明)何れもクラスNPに属することは明らかである。まず、箱が楕形の場合について、3分割問題から多項式時間の帰着が出来ることを示す。定義3.1の3分割問題に対し、箱を楕形 (d, B) 木、また、定義3.1の各 $a \in A$ に対し、楕形 $(d, s(a))$ 木を一個ずつ品物とすると(図3参照)、

3分割問題が解をもつ \iff 丁度 m 個の箱で $3m$ 個のすべての品物が
詰められる

がなりたつ。これで、3分割問題から箱を楕形 (d, H) 木とした場合の辺パッキング問題の強NP完全性が示せた。

次に、上記の帰着において、 $3m$ 個の品物の他に更に一様 (d, H) 木 $(1 < h < H-1)$ をそれぞれ m 個ずつ用意すると

3分割問題が解を持つ \iff 丁度 m 個の箱で $3m+(d-1)m$ 個の品物すべて
が詰められる

が成り立ち、箱が一様 (d, H) 木の場合の強NP完全性も示せる。□

今の定理の証明で、箱を楕形 $(d, B+2)$ 木とすると、箱を楕形木としたときの節点パッキング問題の強NP完全性も示せる。また、箱を一様 $(d, B+2)$ 木とし、品物としてさらに一様 (d, h) 木 $(1 \leq h \leq H)$ をそれぞれ $d(d-1)m$ 個ずつ用意すると、箱が一様 (d, H) 木の場合の強NP完全性も同様に示せる。

定理3.4. 節点パッキング問題は箱が楕形 (d, H) 木や一様 (d, H) 木に限っても強NP完全である。□

以上に見るように、辺パッキング問題、節点パッキング問題の何れも多くの場合強NP完全となり、それを解く効率のよいアルゴリズムは望めそうにないが、次節では、箱を一様 (d, H) 木とし、品物の種類を定数とした場合に対し、動的計画法に基づく効率の良いアルゴリズムを与える。

4. 箱が一様 (d, H) 木で、品物の種類を定数とした場合に対する効率よい解法

本節では、箱が一様 (d, H) 木の場合、品物の種類を定数とすると、動的計画法に基づき効率よく解けることを示そう。なお、節点パッキング問題も同様に出来るので、辺パッキング問題のみ扱う。

グラフパッキング問題を解くため、まず、それにある意味で双対な、品物すべてを詰めるのに必要な一様 (d, H) 木の最小の高さ H を求める問題を考える。簡単のため、箱は一様

(2,H)木、品物は一様(2,1)木が m 個、一様(2,2)木が n 個ある場合で説明する。品物を全て詰めるのに必要な木の高さを $h(m,n)$ とすると、動的計画法が適用でき、再帰的に

$$\begin{aligned}
 h(m,n) = & \min_{0 \leq i \leq m-1} \max\{h(i,j), h(m-i-1, n-j)\} + 1, \\
 & 0 \leq j \leq n \\
 & \min_{0 \leq i \leq m} \max\{h(i,j), h(k,t), h(p,q), h(m-i-k-p, n-j-t-q)\} + 2 \quad (4.1) \\
 & 0 \leq j \leq n \\
 & 0 \leq k \leq m-i \\
 & 0 \leq t \leq n-j \\
 & 0 \leq p \leq m-i \\
 & 0 \leq q \leq n-j-t
 \end{aligned}$$

と表される。なお、右辺の \min 中の前半部と後半部は、それぞれ、一様(2,1)木である品物と、一様(2,2)木である品物とを、箱の根と品物の根が重なるように詰めた場合の、箱の必要な最小の高さである(図4参照)。これは $m+n$ の小さい順に計算できる。一般の場合も同様に出来るが、表現が繁雑になるので詳細は略す。

今の解法を利用して、箱が一様(d,H)木で品物の種類を定数とする場合、品物 j を n_j 個詰めるのに必要な箱の最小数を $b(n_1, n_2, \dots, n_k)$ とすると、動的計画法に基づき次式が得られる。

$$b(n_1, n_2, \dots, n_k) = \begin{cases} 1 & \text{全部の品物が一個の箱に入る場合} \\ [\min_{0 \leq x_1 \leq n} b(n_1 - x_1, n_2 - x_2, \dots, n_k - x_k)] + 1 & (4.2) \\ \vdots \\ 0 \leq x_k \leq n & \text{かつ、}(x_1, x_2, \dots, x_k) \text{は一つの箱に入る} \\ k \\ 0 \leq \sum_{i=1}^k x_i \end{cases}$$

これは $\sum_{i=1}^k n_i$ の小さいほうから順に解ける。その際、品物が箱に入るかどうか、(4.1)式を

用いて、それらを詰めるのに必要な箱の最小の高さを求めて判定する。計算時間は $O(k^k) \times$ (与えられた品物の集合が箱に入るかどうかの判定時間) である。ここで、 $n = \max n_k$ である。

特に、箱が一様 (d, H) 木で品物も一様 (d, h) 木 ($h \leq H$) の場合等に対して、それぞれ箱の必要な最小数を H, d, h 等の陽な関数として表すことを考えよう。

まず、箱が一様 (d, H) 木で品物も一様 (d, H) 木の場合、その箱に辺パッキング出来る品物の最大数 $f(H, h, d)$ を求める。

補題4. 1. $f(H, h, d)$ は次の漸化式を満たす。

$$f(H, h, d) = d^{H-h} + f(H-h, h, d) \quad (4.3)$$

(証明) まず、

$$f(H, h, d) \geq d^{H-h} + f(H-h, h, d) \quad \text{但し、} f(H, h, d) = 0 \text{ for } H \leq h - 1 \quad (4.4)$$

を示す。 $H = h$ のとき、 $d^{H-h} + f(H-h, h, d) = 1$ だから明らか。 $H \geq h + 1$ のとき、一様 (d, d^{H-h}) 木の葉の数が d^{H-h} であることに注意すると、図5のように式(4.4)が成り立つ。

次に、

$$f(H, h, d) \leq d^{H-h} + f(H-h, h, d) \quad (H \geq h) \quad (4.5)$$

を示そう。最大個数の品物が詰まる詰め方において、そのどの葉も子孫を持たない品物

の集合 $T_1^0, T_2^0, \dots, T_k^0$ を考える。但し、ある節点が子孫に品物を持たないとは、その節点から

葉に至るどの道も、その節点を含むもの以外の品物に出会わないことをいう。 $T_1^0, T_2^0, \dots, T_k^0$

の根 r_1, r_2, \dots, r_k 及び、 $T_1^0, T_2^0, \dots, T_k^0$ 以外の品物の葉で子孫に品物をひとつも持たないも

のを葉とし、根は箱の根である箱の部分木 T_0 を考える(図6参照)。

一方箱で、根から $H-h$ にある節点を葉とする部分木 T と、それ以外の部分を考える。 r_1, r_2, \dots, r_k のなかに、少なくともひとつ h よりも高いものがあること、及び、それらの高さが少なくとも h 以上であることに注意すると $T_0 = T$ だから、 i を T_0 に詰まっている品物数

$$\text{とすると、} \quad i \leq f(H-h, h, d) \quad (4.6)$$

である。また、

$$k \leq 2^{H-h} \quad (4.7)$$

でもある。従って

$$f(H, h, d) = i + k \leq f(H-h, h, d) + 2^{H-h} \quad (4.8)$$

となり、式(4.5)式が示せた。式(4.4), (4.5)を併せて式(4.3)が成り立つ。□

この漸化式(4.3)は陽に解ける。

$$\text{定理4.2. } f(H, h, d) = d^r (d^{r^q} - 1) / d^r - 1 \quad (4.9)$$

但し、 $H = qh + r$, $0 \leq r \leq h - 1$ 。□

この結果を用いて、 n 個の一樣 (d, H) 木である品物をすべて詰めるのに必要な一樣 (d, H) 木の箱の必要数 B は

$$B = \lceil n(d^h - 1) / d^r (d^h - 1) \rceil \quad (4.10)$$

である。節点パッキングの場合も同様であるので結果のみ示す。

箱が一樣 (d, h) 木で、品物も一樣 (d, H) 木の場合、その箱に節点パッキング出来る品物の最大数を $g(H, h, d)$ とすると、

$$g(H, h, d) = d^r (d^{(h+1)q} - 1) / d^{h+1} - 1 \quad (4.11)$$

但し、 $H = qh + r$, $0 \leq r \leq h - 1$ 。また、 n 個品物があるときの箱の必要数は

$$B = \lceil n(d^{h+1} - 1) / d^r (d^{h+1} - 1) \rceil \quad (4.12)$$

5. あとがき

本稿では、グラフのパッキング問題を辺パッキング問題と節点パッキング問題に分けて定義しその計算の複雑さを明らかにした。また、幾つかの部分クラスに対して効率のよいアルゴリズムを求めた。

今後の課題としては、

(1) NP完全であると分った各場合に対する、よい近似アルゴリズムの開発とその性能評価

(2) 本稿で扱った以外の、多項式で解ける部分クラスを求めることなどが挙げられる。(2)について、箱を無向木、品物を長さ一定の鎖とした場合などに対し、既に幾つかの成果を得ており、別の機会に報告する予定である。

謝辞 日頃御指導賜る、京都大学の長谷川利治教授に深謝の意を表する。

参考文献

- [BAKE 80] Baker, B. S., Coffman, E. G., Jr., and Rivest, R. L., "Orthogonal packings in two dimensions", SIAM J. Compt. 9, pp.846-855, 1980.
- [COFF 84] Coffman Jr., E. G., Garey, M.R., and Johnson, D. S., "Approximation algorithms for bin packing-an updated survey", working paper, 1984.
- [GARE 79] Garey, M., R. and Johnson, D.S., Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W.H., Freeman and Company, San Fransisco, 1979.
- [JOHN 74] Johnson, D.S., Demers, A., Ullman, J.D., Garey, M.R. and Graham, R.L., "Worst-case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms", SIAM J. Compt., Vol.3, No.4, pp.601-609, 1983.
- [KIRK 83] Kirkpatrick, D. G. and Hell, P., "On the complexity of general graph factor problems", SIAM J. Compt. Vol.12, No.3, pp.601-609, 1983.

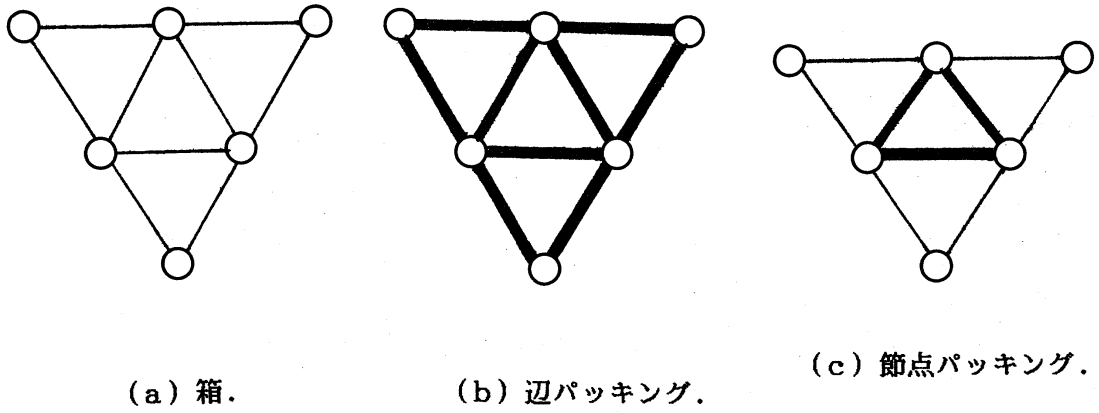


図1. グラフパッキング (品物は K_3 , 但し、品物は連結でなくても良い.)

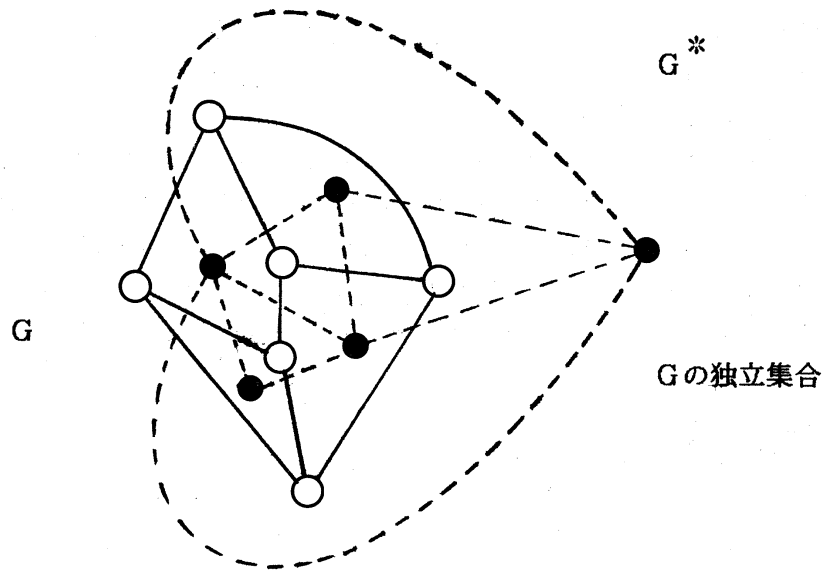
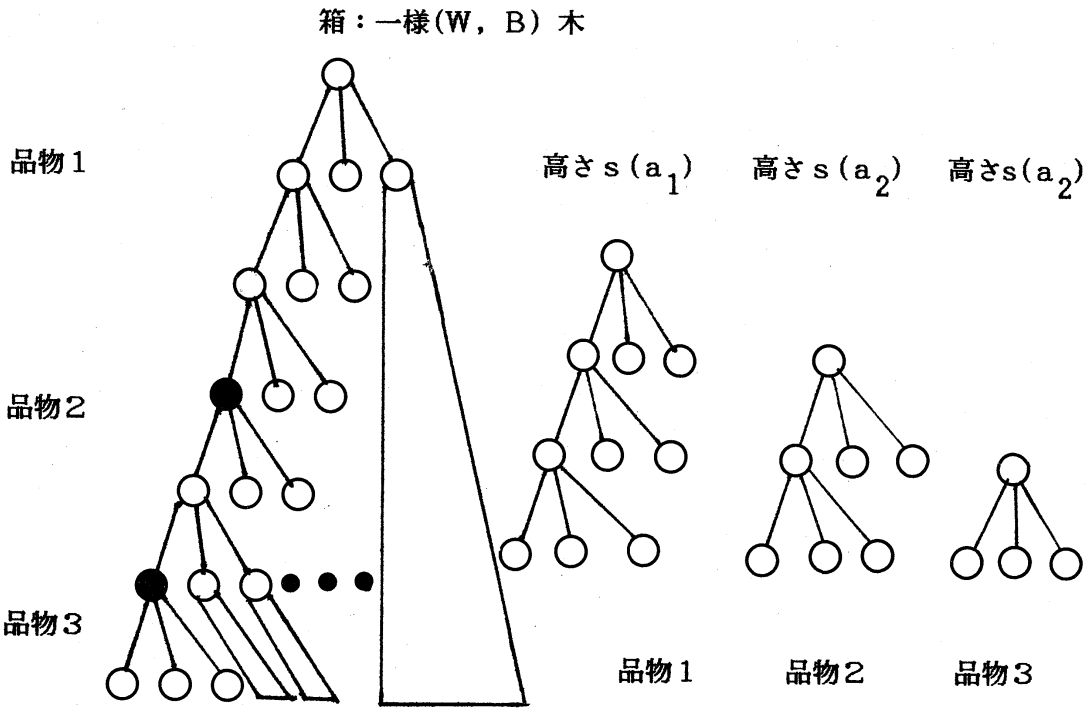
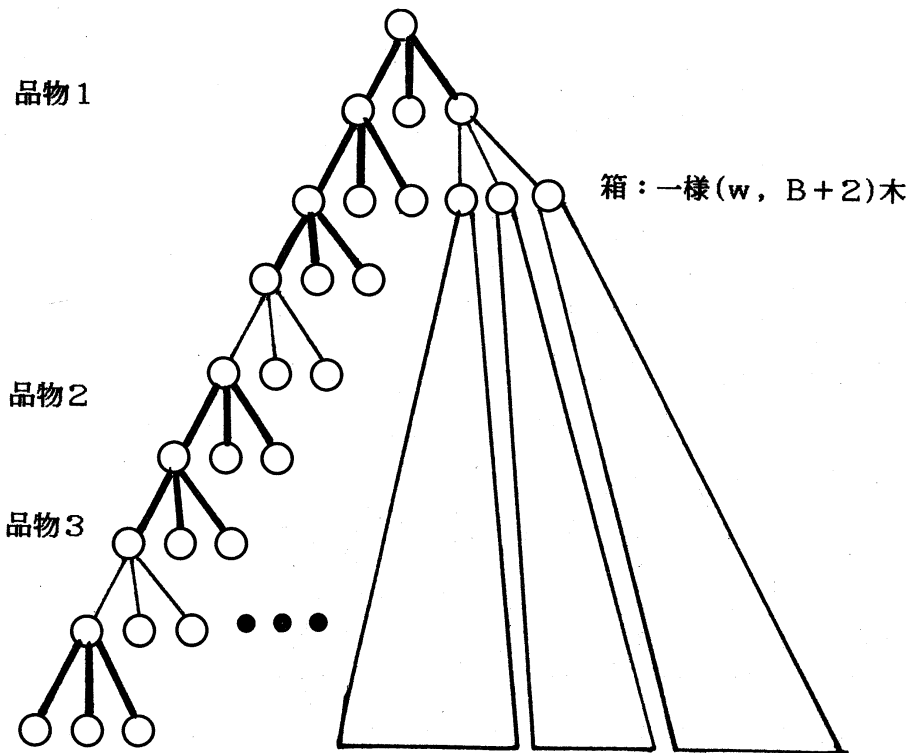


図2. 平面cubicグラフGとその双対グラフG* (Gは白丸が節点、実線が辺、G*は黒丸が節点、破線が辺).

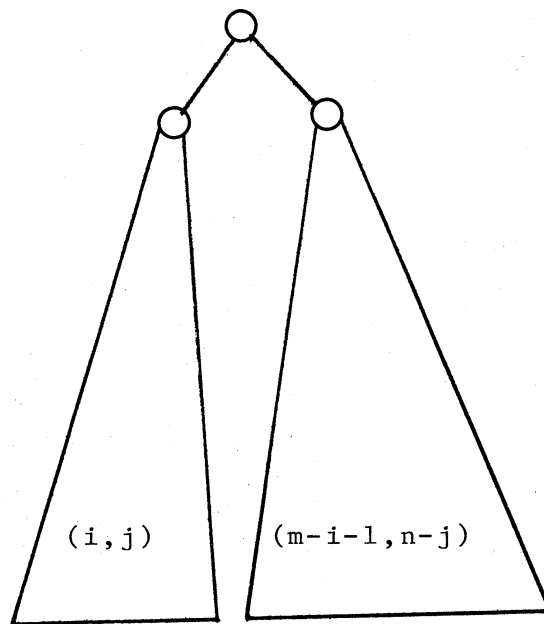


(a) 辺パッキング (●は二つの品物の節点が重なっていることを示す).

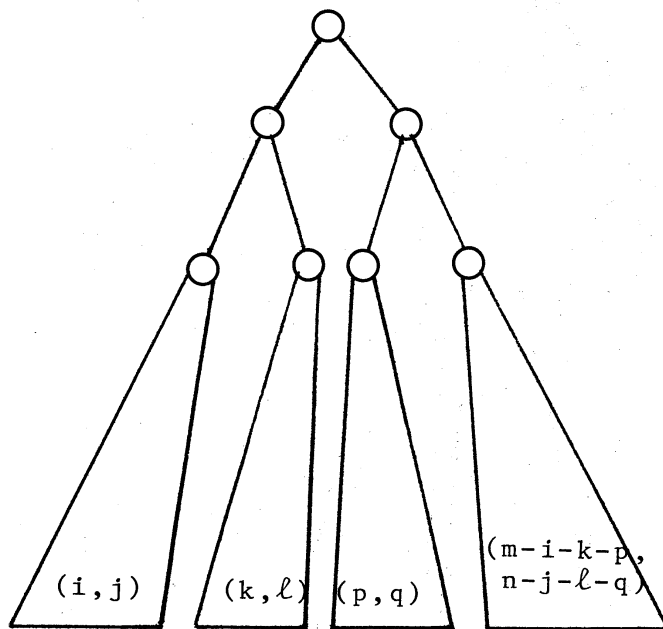


(b) 節点パッキング.

図3. 3分割問題から箱が一様(d, H)木の場合のグラフパッキング問題への多項式時間帰着.



(a) 根に一様(2, 1)木を詰める場合.



(b) 根に一様(2, 2)木を詰める場合.

図4. 式(4.1)の説明.

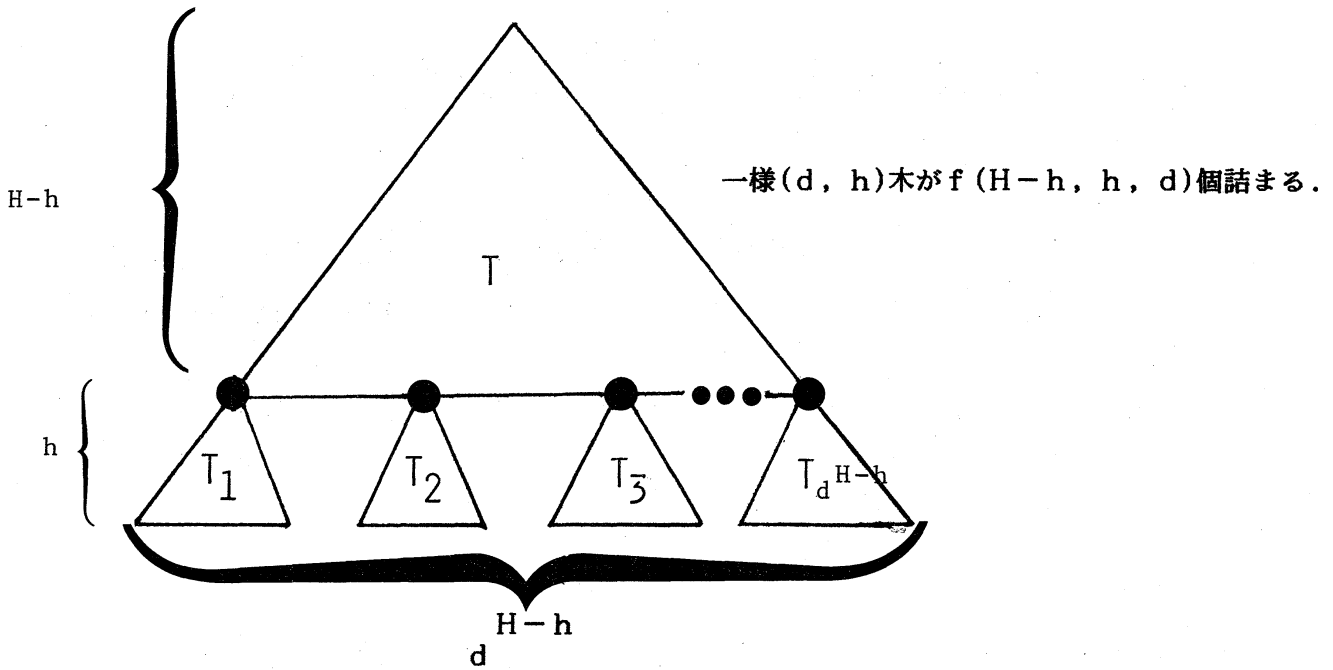


図5. 補題4.1、式(4.4)の証明(●がTの葉).

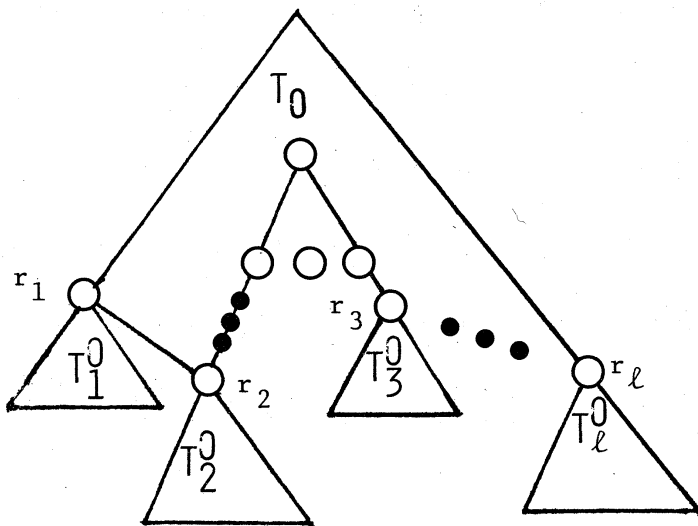


図6. 補題4.1、式(4.5)の証明(●が T_0 の葉).