数理解析研究所講究録
第 557 巻 1985 年 95-112

区間解析について

千葉大教養　田川　正二郎（Shojiro Tagawa）

§1. はじめに

本研究の発端は、集合値関数の微分を研究しているうちに、凸集合の差の問題にぶつかり、凸集合の具体的な例である区間について調べてみようと思ったことにある。数値解析の分野の中に区間解析（または区間数学）とよばれているものが従来からあるので、それとの関連を調べるのが本報告の目的である。

§2. 区間のベクトル空間について

微分を定義するために必要な、区間のベクトル空間について述べる。

実数空間Rの有界閉区間全体の集合を$\mathcal{B}$とする。$\mathcal{B}$の元とスカラー倍は通常のものを考える。すなわち，

$$[a_1,a_2]+[b_1,b_2]=\{x+y \mid x\in[a_1,a_2],\ y\in[b_1,b_2]\},$$

$$\alpha[a_1, a_2] = \{\alpha x \mid x \in [a_1, a_2]\}, \quad \alpha \in R$$

とする。$\mathcal{B}^2$の2元(A, B), (C, D)に対し、同値関係$\sim$を

$$(A, B) \sim (C, D) \iff A + D = B + C$$

で定義し、$\mathcal{B}^* = \mathcal{B}^2/\sim$とする。$\mathcal{B}^*$の任意の元を

$$A \divideontimes B$$

のように書くことにすれば、

$$A \divideontimes B = C \divideontimes D \iff A + D = B + C$$

である。さて、この同値類に対し、一般の凸集合では成立しないが、区間の場合には成立する次のような性質がある。

命題1. 任意の$A \divideontimes B \in \mathcal{B}^*$に対し、次のいずれか1つの場合だけが必ず起こる。

1) ある元$C \in \mathcal{B}$が存在して、$A \divideontimes B = C \divideontimes [0, 0]$となる.

2) ある元$D \in \mathcal{B}$が存在して、$A \divideontimes B = [0, 0] \divideontimes D$となる。

証明.
$$A = [a_1, a_2] \quad (a_1 \leqq a_2)$$
$$B = [b_1, b_2] \quad (b_1 \leqq b_2)$$

とおく。$a_1 - b_1$と$a_2 - b_2$の大小関係により場合を分ける。

i) $a_1 - b_1 \leqq a_2 - b_2$のとき

$$c_1 = a_1 - b_1, \quad c_2 = a_2 - b_2$$

として、区間$C = [c_1, c_2]$を考えれば、

$$A = B + C$$

すなわち、

$$A \circledast B = C \circledast [0,0]$$

となる。

ii) $a_1 - b_1 > a_2 - b_2$ のとき

$$d_1 = -(a_1 - b_1), \quad d_2 = -(a_2 - b_2)$$

として、区間$D = [d_1, d_2]$を作れば

$$A + D = B$$

すなわち、

$$A \circledast B = [0,0] \circledast D$$

となる。

$a_1 - b_1$と$a_2 - b_2$の大小関係は、上の２つの場合のどちらか1つだけが必ず起こるので、命題の中の1)の場合か、または2)の場合のいずれか1つの場合だけが必ず起こることになる。

□

この命題が成立しない一般の凸集合の例をあげてみよう。

空間R^2において

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \mid |x| \leqq \tfrac{1}{2}, |y| \leqq \tfrac{1}{2}\}$$

とする。このとき、

$$B \subset A$$

だから

$$A + D = B$$

となるようなDは明らかに存在しない。そこで可能性があるのは

$$A = B + C$$

となるCの存在であるが、この例では、このようなCもない。なぜなら、

$$B + C = \bigcup_{c \in C} (B + c)$$

と考えれば、この和はBを平行移動したものの和集合であり、回転は表わせない。Bは正方形であり、Aは円であるから、Bを用いてAに一致させることはできない。

さて、$\mathcal{B}^*$がベクトル空間になることを示そう。加法$\overset{*}{+}$を

$$(A \overset{*}{-} B) \overset{*}{+} (C \overset{*}{-} D) = (A + C) \overset{*}{-} (B + D)$$

で定義する。さらに、スカラー倍を

i) $\alpha \geqq 0$ のとき

$$\alpha * (A \overset{*}{-} B) = \alpha A \overset{*}{-} \alpha B$$

ii) $\alpha < 0$ のとき

$$\alpha * (A \overset{*}{-} B) = |\alpha| B \overset{*}{-} |\alpha| A$$

と定義する。

命題2. $\mathcal{B}^*$に加法$\overset{*}{+}$とスカラー倍$*$を上のように定義すれば、$\mathcal{B}^*$は$\mathcal{B}$を含む最小のベクトル空間になる。

証明. Rådström の定理[2]を用いればよい。 □

このとき、$\mathcal{B}^*$の中の減法を$\overset{*}{-}$とすれば、

$$(A \ast B) \overset{*}{-} (C \overset{*}{-} D) = (A+D) \overset{*}{-} (B+C)$$

となることを注意しておこう。

$\mathcal{B}$を$\mathcal{B}^*$に埋め込むときは、$C \in \mathcal{B}$ に対し、$C \overset{*}{-} [0,0] \in \mathcal{B}^*$を対応させるから、$C \overset{*}{-} [0,0]$ は普通の区間Cと同一視できる。ところで、命題1によれば、$\mathcal{B}^*$の元は普通の元か、または、$[0,0] \overset{*}{-} D$ のタイプしかない。そこで、

$$D = [d_1, d_2], \quad d_1 < d_2$$

としたとき、

$$[0,0] \overset{*}{-} [d_1, d_2]$$

を

$$[-d_1, -d_2], \qquad -d_1 > -d_2$$

と書き表わすことにすれば、$\mathcal{B}^*$の任意の元は

$$[a_1, a_2] \quad (a_1 \leqq a_2 \quad \text{または} \quad a_1 > a_2)$$

と簡単に表わすことができる。そして、$[a_1, a_2]$は $a_1 \leqq a_2$ のとき実区間、$a_1 > a_2$のとき虚区間とよぶことにする。

命題3. 上の記法を用いれば、$[a_1, a_2] \in \mathcal{B}^*$, $[b_1, b_2] \in \mathcal{B}^*$, $\alpha \in R$ に対し

$$[a_1, a_2] \overset{*}{+} [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$
$$[a_1, a_2] \overset{*}{-} [b_1, b_2] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$$
$$\alpha \ast [a_1, a_2] = [\alpha a_1, \alpha a_2]$$

となる。

証明.

1) 加法$\overset{*}{+}$

実区間と虚区間の場合に分けて考える。

a) $a_1 \leqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$ のとき

$$[a_1, a_2] \overset{*}{+} [b_1, b_2]$$

$$= [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

b) $a_1 > a_2$, $b_1 \leqq b_2$ のとき

$$[a_1, a_2] \overset{*}{+} [b_1, b_2]$$

$$= ([0,0] \overset{*}{-} [-a_1, -a_2]) \overset{*}{+} ([b_1, b_2] \overset{*}{-} [0,0])$$

$$= [b_1, b_2] \overset{*}{-} [-a_1, -a_2]$$

もしこの元が

$$[c_1, c_2] \overset{*}{-} [0,0]$$

のタイプのとき，命題1の証明より

$$c_1 = b_1 - (-a_1) , \quad c_2 = b_2 - (-a_2)$$

であるから

$$[a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

と表現できる。また、

$$[0,0] \overset{*}{-} [d_1, d_2]$$

のタイプのとき、命題1の証明から

$$d_1 = -(b_1 - (-a_1)) , \quad d_2 = -(b_2 - (-a_2))$$

だから

$$[0,0] \divideontimes [-(a_1+b_1), -(a_2+b_2)]$$

となり、この元を

$$[a_1+b_1, a_2+b_2] \qquad a_1+b_1 > a_2+b_2$$

と書くことにしたのである。

c) $a_1 \leqq a_2$, $b_1 > b_2$ のときは、b) の場合と同様に示される。

d) $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$ のとき

$$[a_1, a_2] \dotplus [b_1, b_2]$$

$$= ([0,0] \divideontimes [-a_1, -a_2]) \dotplus ([0,0] \divideontimes [-b_1, -b_2])$$

$$= [0,0] \divideontimes [-(a_1+b_1), -(a_2+b_2)]$$

$$= [a_1+b_1, a_2+b_2]$$

以上より

$$[a_1, a_2] \dotplus [b_1, b_2] = [a_1+b_1, a_2+b_2]$$

が示された。

2) 減法 $\divideontimes$

この場合も、実区間と虚区間に分けて考えてみればよい。

a) $a_1 \leqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$ のとき

$$[a_1, a_2] \divideontimes [b_1, b_2]$$

$$= ([a_1, a_2] \divideontimes [0,0]) \divideontimes ([b_1, b_2] \divideontimes [0,0])$$

$$= ([a_1, a_2] + [0,0]) \divideontimes ([b_1, b_2] + [0,0])$$

(∵ 減法の性質 p.3 より)

$$= [a_1, a_2] \divideontimes [b_1, b_2] \qquad \text{(この } \divideontimes \text{ は減法ではない)}$$

$$= \begin{cases} [a_1 - b_1, a_2 - b_2] * [0,0] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2] \\ [0,0] * [-(a_1 - b_1), -(a_2 - b_2)] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2] \end{cases}$$

（∵ 命題1の証明より）

b) $a_1 > a_2$, $b_1 \leqq b_2$ のとき

$$[a_1, a_2] * [b_1, b_2]$$
$$= ([0,0] * [-a_1, -a_2]) * ([b_1, b_2] * [0,0])$$
$$= [0,0] * ([-a_1, -a_2] + [b_1, b_2])$$
$$= [0,0] * [-(a_1 - b_1), -(a_2 - b_2)]$$
$$= [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$$

c) $a_1 \leqq a_2$, $b_1 > b_2$ のとき

$$[a_1, a_2] * [b_1, b_2]$$
$$= ([a_1, a_2] * [0,0]) * ([0,0] * [-b_1, -b_2])$$
$$= ([a_1, a_2] + [-b_1, -b_2]) * ([0,0] + [0,0])$$
$$= [a_1 - b_1, a_2 - b_2] * [0,0]$$
$$= [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$$

d) $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$ のとき

$$[a_1, a_2] * [b_1, b_2]$$
$$= ([0,0] * [-a_1, -a_2]) * ([0,0] * [-b_1, -b_2])$$
$$= ([0,0] + [-b_1, -b_2]) * ([-a_1, -a_2] + [0,0])$$
$$= [b_1 - b_2] * [-a_1, -a_2]$$
$$= \{ [a_1 - b_1, a_2 - b_2] * [0,0] = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$$

$$[0,0] \underline{*} [-(a_1-b_1), -(a_2-b_2)] = [a_1-b_1, a_2-b_2]$$

（∵ 命題1の証明より）

3) スカラー倍 *

α の符号と実区間か虚区間の場合に分ける。

a) $\alpha \geqq 0$, $a_1 \leqq a_2$ のとき

$$\alpha * [a_1, a_2] = \alpha[a_1, a_2] = [\alpha a_1, \alpha a_2]$$

b) $\alpha < 0$, $a_1 \leqq a_2$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha * [a_1, a_2] &= \alpha * ([a_1, a_2] \underline{*} [0,0]) \\ &= (-\alpha)[0,0] \underline{*} (-\alpha)[a_1, a_2] \\ &= [0,0] \underline{*} [-\alpha a_1, -\alpha a_2] \\ &= [\alpha a_1, \alpha a_2]\end{aligned}$$

c) $\alpha \geqq 0$, $a_1 > a_2$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha * [a_1, a_2] &= \alpha * ([0,0] \underline{*} [-a_1, -a_2]) \\ &= [0,0] \underline{*} \alpha[-a_1, -a_2] \\ &= [0,0] \underline{*} [-\alpha a_1, -\alpha a_2] \\ &= [\alpha a_1, \alpha a_2]\end{aligned}$$

d) $\alpha < 0$, $a_1 > a_2$ のとき

$$\begin{aligned}\alpha * [a_1, a_2] &= \alpha * ([0,0] \underline{*} [-a_1, -a_2]) \\ &= (-\alpha)[-a_1, -a_2] \underline{*} (-\alpha)[0,0] \\ &= [\alpha a_1, \alpha a_2] \underline{*} [0,0] \\ &= [\alpha a_1, \alpha a_2]\end{aligned}$$

□

したがって、この記法を用いれば、区間のベクトル空間$\mathcal{B}^*$の上の計算が簡単にできる。

さて、$\mathcal{B}^*$にさらにノルム $\|\cdot\|$ を

$$\|[a_1, a_2]\| = \max\{|a_1|, |a_2|\}$$

で定義すれば、$\mathcal{B}^*$はノルム空間になることもわかる。

この$\mathcal{B}^*$を用いれば、$\Omega : I \to \mathcal{B}^*$ $(I \in \mathcal{B})$ なる（集合値）関数の微分は、通常の意味で考えることができる。例えば

$$\Omega(t) = [a(t), b(t)], \quad t \in I$$

$$a : I \to R, \quad b : I \to R$$

としたとき、$a(t)$, $b(t)$ が共に $t_0 \in I$ で微分可能ならば、$\Omega(t)$ も t_0 で微分可能で

$$D\Omega(t_0)(\Delta t) = [a'(t_0)(\Delta t), b'(t_0)(\Delta t)]$$

となることがいえる。

§3. 区間解析について

それでは、区間解析を考察してみよう。（例えば、[1] を見よ。） 区間の演算は4種類あり、○を＋、－，・，／のいずれか1つを表わすものとして、

$$[a_1, a_2] \circ [b_1, b_2] = \{x \circ y \mid a_1 \leqq x \leqq a_2,\ b_1 \leqq y \leqq b_2\}$$

と定義する。そのとき、

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\},$$
$$\max\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}]$$

$$[a_1, a_2]/[b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot [\tfrac{1}{b_2}, \tfrac{1}{b_1}] \quad (0 \notin [b_1, b_2] \text{のとき})$$

となるものである。退化した区間$[a, a]$は実数aと同一視する。区間算の性質として

$$I + (J + K) = (I + J) + K$$
$$I \cdot (J \cdot K) = (I \cdot J) \cdot K$$
$$I + J = J + I$$
$$I \cdot J = J \cdot I$$
$$0 + I = I + 0 = I$$
$$1 \cdot I = I \cdot 1 = I$$

がある。ところが、分配法則は成立しない。すなわち、

$$I \cdot (J + K) \subset I \cdot J + I \cdot K$$

と包含関係になる。さらに、$-$は$+$の逆演算ではない。2つの区間の距離dは次のように定義される。

$$d([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

このように、区間算は我々が慣れている実数の体とはかなり異なった性質を持っているので、計算は大変めんどうである。

§4. $\mathcal{B}^*$ の積

$\mathcal{J}^*$にはまだ積が定義されていないが、この積はスカラー倍と両立したものでなければならない。というのは、スカラーは退化した区間と考えられるからである。この意味で、区間算の積を採用することはできない。なぜならば、例えば、$-1=[-1,-1]$を考えれば、

$$(-1)*[a_1,a_2]=[-a_1,-a_2]$$

$$(-1)\cdot[a_1,a_2]=[\min\{-a_1,-a_2\},\ \max\{-a_1,-a_2\}]$$

となり、$a_1<a_2$ のとき、両者は異なるからである。そこで、$\mathcal{J}^*$の積として考えられるものの中で簡単なものは、

$$[a_1,a_2]*[b_1,b_2]=[a_1b_1,\ a_2b_2]$$

であろう。

命題4. $\mathcal{J}^*$から、どちらかの端点が0になる区間の集合を除いた集合（すなわち、$[a_1,a_2]$, $a_1\neq 0$ かつ $a_2\neq 0$ なる区間の集合）において、積$*$は群を作る。

証明. 結合律が成立することを示すのは容易である。単位元は退化した区間 $1=[1,1]$ である。任意の区間$[a_1,a_2]$（$a_1\neq 0$ かつ $a_2\neq 0$）の逆元は

$$[a_1,a_2]*[x_1,x_2]=1$$

より

$$a_1x_1=1 \quad かつ \quad a_2x_2=1$$

よって

$$x_1 = \frac{1}{a_1} \quad かつ \quad x_2 = \frac{1}{a_2}$$

したがって、$[a_1, a_2]$ の逆元は

$$\left[\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\right]$$

であることがわかる。 □

さらに、分配法則

$$[a_1, a_2] * ([b_1, b_2] \overset{*}{+} [c_1, c_2]) = [a_1, a_2] * [b_1, b_2] \overset{*}{+} [a_1, a_2] * [c_1, c_2]$$

も成立することがわかるから、$\mathcal{B}^*$ はほとんど体であるが、零元以外の元（端点の一方だけが0になる元）も除いて乗法群になる点が、体とは異なっている。

積の逆演算を $\overset{*}{\underset{*}{-}}$ と書くことにすれば

$$[a_1, a_2] \overset{*}{\underset{*}{-}} [b_1, b_2] = [a_1/b_1,\ a_2/b_2]$$

である。

§5. $\mathcal{B}^*$ と区間算との比較

はじめに、$\mathcal{B}^*$ の距離と、区間解析における距離とは同一のものであることに注意しよう。$\mathcal{B}^*$ での距離は、実区間 $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$ に対しては

$$\begin{aligned} \|[a_1, a_2] \overset{*}{-} [b_1, b_2]\| &= \|[a_1 - b_1,\ a_2 - b_2]\| \\ &= \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\} \end{aligned}$$

となるから、

$$d([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

と等しい。それに対して、区間算とß*の演算はかなり異なる。

区間算とß*の演算との相異を調べるために、例を考えてみよう。次の連立方程式を考える。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

ここで、$a_{ij} \in A_{ij}$, $b_j \in B_j$ $(i, j = 1, 2)$ (A_{ij}, B_j は区間)とする。

まず、区間算を用いずに解いてみよう。普通に(例えば、Gaußの消去法などで)解くと

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$
$$x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0)$$

である。そこで、区間解 X_1, X_2 は

$$X_1 = \left\{ \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{12}a_{22} - a_{12}a_{21}} \;\middle|\; a_{ij} \in A_{ij},\ b_j \in B_j,\ i, j = 1, 2 \right\}$$
$$X_2 = \left\{ \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \;\middle|\; a_{ij} \in A_{ij},\ b_j \in B_j,\ i, j = 1, 2 \right\}$$

となる。さらに、具体的に

$$A_{11} = A_{21} = 1,\ A_{12} = 2,\ A_{22} = [10, 12],\ B_1 = 1,\ B_2 = 0$$

と与えてみよう。すると、

$$X_1 = \left\{ \frac{a_{22}}{a_{22} - 2} \;\middle|\; a_{22} \in [10, 12] \right\},$$
$$X_2 = \left\{ \frac{-1}{a_{22} - 2} \;\middle|\; a_{22} \in [10, 12] \right\}$$

となる。関数 $a_{22}/(a_{22} - 2)$ は $[10, 12]$ 上で単調減少だから、

$$X_1 = \left[\frac{12}{10}, \frac{10}{8}\right] = \left[\frac{6}{5}, \frac{5}{4}\right]$$

また、X_2に対しては

$$X_2 = [-\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}]$$

と求まる。

さて、区間算を用いるために、次のような区間方程式(?)を考えてみよう。

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 = 1 & (1) \\ X_1 + [10, 12]X_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

方程式(2)より

$$X_1 = -[10, 12]X_2$$

方程式(1)に代入して

$$-[10, 12]X_2 + 2X_2 = 1$$

ここで、

$$X_2 = [x_2^1, x_2^2]$$

とおくと、

$$[-12, -10][x_2^1, x_2^2] + [2x_2^1, 2x_2^2] = 1$$

となる。期待される解は$[-\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}]$だから、

$$x_2^1 \leqq x_2^2 < 0$$

と考えれば、

$$[-10x_2^2, -12x_2^1] + [2x_2^1, 2x_2^2] = 1$$

したがって

$$[2x_2^1 - 10x_2^2, -12x_2^1 + 2x_2^2] = 1$$

となる。そこで、

$$\begin{cases} 2x_2^1 - 10x_2^2 = 1 \\ -12x_2^1 + 2x_2^2 = 1 \end{cases}$$

として解を求めれば

$$x_2^1 = -\frac{6}{29}, \quad x_2^2 = -\frac{7}{29}$$

となり、$x_2^1 > x_2^2$ だから、実区間としては求まらない。このように、区間算を最初から用いることはできないことがわかる。すなわち、区間方程式のようなものは考えられないようである。

そこで、区間算を用いる場合は

$$X_1 = \left\{ \frac{a_{22}}{a_{22}-2} \;\middle|\; a_{22} \in [10, 12] \right\}$$

$$X_2 = \left\{ \frac{-1}{a_{22}-2} \;\middle|\; a_{22} \in [10, 12] \right\}$$

に対して適用することになる。そのとき，X_2 は

$$\frac{-1}{[10,12]-2} = \frac{-1}{[8,10]} = \left[-\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}\right]$$

となり、期待された解が求まる。一方、X_1 は

$$\frac{[10,12]}{[10,12]-2} = \frac{[10,12]}{[8,10]} = \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

だから、期待される解 $\left[\frac{6}{5}, \frac{5}{4}\right]$ とは異なっている。ところが、

$$\frac{a_{22}}{a_{22}-2} = 1 + \frac{2}{a_{22}-2}$$

と変形できるから、これに対して区間算を適用すれば、

$$1 + \frac{2}{[10,12]-2} = 1 + \frac{2}{[8,10]} = 1 + \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{6}{5}, \frac{5}{4}\right]$$

となり、期待された解が求まる。このように、区間算は、い

つ適用するかによって答が違ってくる。

さて、$\mathcal{F}^*$を考えてみれば、代数的には素直な性質を持っているので、区間方程式を考えることができる。すなわち、

$$\begin{cases} A_{11} * X_1 \overset{*}{+} A_{12} * X_2 = B_1 \\ A_{21} * X_1 \overset{*}{+} A_{22} * X_2 = B_2 \end{cases}$$

とすればよい。前の具体的な例では

$$\begin{cases} X_1 \overset{*}{+} 2 * X_2 = 1 & (3) \\ X_1 \overset{*}{+} [10, 12] * X_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

となる。そこで、これを解いてみよう。方程式(3)より、

$$X_1 = 1 \overset{*}{-} 2 * X_2$$

となり、方程式(4)に代入すれば、

$$(1 \overset{*}{-} 2 * X_2) \overset{*}{+} [10, 12] * X_2 = 0$$

$$1 \overset{*}{+} ((-2) * X_2 \overset{*}{+} [10, 12] * X_2) = 0$$

$$1 \overset{*}{+} ((-2) \overset{*}{+} [10, 12]) * X_2 = 0$$

$$1 \overset{*}{+} [8, 10] * X_2 = 0$$

$$[8, 10] * X_2 = -1$$

$$X_2 = (-1) \overset{*}{\div} [8, 10]$$

$$\therefore \quad X_2 = \left[-\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}\right]$$

と期待された解が求まる。X_1は

$$X_1 = 1 \overset{*}{-} 2 * \left[-\frac{1}{8}, -\frac{1}{10}\right]$$

$$= 1 \overset{*}{-} \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}\right]$$

$$= [\frac{5}{4}, \frac{6}{5}]$$

となり、期待される解に近いが、実区間ではなく、虚区間として求まる。

§6. おわりに

今まで見てきたように、区間算の計算は大変にめんどうであるので、区間算のコンピュータ・プログラムを開発する試みもいくつかなされてきたようである。それに対して $\mathcal{I}^*$ の計算は簡単であるが、虚区間の解釈や、区間解析に役立つかどうかは、まだはっきりしていない。

参考文献

[1] Moore, R.E.: Interval Analysis. Prentice-Hall, 1966.

[2] Råtström, H.: An embedding theorem for spaces of convex sets. Proc. Amer. Math. Soc. 3(1952), 165-169.