数理解析研究所講究録
第 557 巻 1985 年 153-163

2タイプの応募者を考慮した秘書問題

追手門学院大学経済　玉置光司(Mitsushi Tamaki)

1. 序

秘書問題(secretary problem)は結婚の問題とも呼ばれ，Gilbert and Mosteller [1] の労作以来，幾多の研究者により興味深い論文が多数発表されている。概略を述べれば次のようになる。

N人の応募者はその能力に従って(絶対)順位がつけられ，最も有能なものの順位を1とする。そして彼女等は全くランダムな順序で我々の前に出現する。すなわち$N!$個の順列は等確率であると仮定する。n番目の女性に直面して，彼女を採用するか，または将来さらに有能な女性が出現することを期待して彼女を採用しないで，$(n+1)$番目の女性と面接するかを決めなければならない。ここで注意したいのは，n番目の女性に直面した時，我々の知ることのできるものは彼女の真の順位(絶対順位)ではなくて，すでに

出現したn人の中での見かけの順位（相対順位）にすぎないということである。

上の設定では，応募者は必ず採用に応じるとしているが，Smith [5] は必ずしも採用に応じるとは限らない場合を取り扱った。すなわち各応募者が順位と独立に確率 $p(>0)$ で採用に応じ，残りの確率 $q(=1-p)$ で採用に応じないという状況下で，全体（N人）のベストを選ぶための最適政策を求めた。この場合，明らかに目的を達成する確率は p 以下であり，p が小さくなれば，当然この確率も小さくなる。これはあまり実際的でない。実際問題としては全体（N人）の中でのベストを選ぶというよりは，むしろ採用に応じる者の中のベストを選ぶことで良しとすべきであろう。

この論文では，これを少し一般化して次のような問題を考察する。各応募者は，その順位と独立に確率 $p(>0)$ でタイプ1であり，確率 $q(=1-p)$ でタイプ2であるものとする。この時，タイプ1の中のベストを選ぶ確率を最大にする政策を求めたい。ただし，各応募者のタイプは出現時に直ちに識別されるものとする。以後，簡単の為に，上記の目的が達成されることを成功と呼ぶ。

2. 本論

今，n 人目の応募者に直面していて，彼女がタイプ 1 であり，さらに，その時点までのタイプ 1, 2 の応募者数がそれぞれ n_1, n_2 $(n_1+n_2=n)$ であったとする。この女性の採否が問題となるのは彼女がタイプ 1（n_1 人の中）で相対順位が 1 となる場合である。この時，さらに彼女の全体（n 人）での相対順位が k $(1 \leqq k \leqq n)$ であれば，彼女を k −候補者と呼び，この状態を (n, k) で表わす。k の値を特に問題としない時は単に候補者と呼ぶ。我々の目的はタイプ 1 の中でベストを選ぶことであるから，いま

$f(n, k)$：状態 (n, k) で最適に振る舞った時，成功する確率。

$g(n, k)$：状態 (n, k) で，この女性を採用した時，成功する確率。

$v(n, k)$：状態 (n, k) で，この女性を流し以後最適に振る舞った時，成功する確率。

を定義すると，明らかに

$$f(n, k) = \max\{g(n, k), v(n, k)\} \qquad (1)$$

である。

ところで，$p(l|n,k)$を，n番目の女性の相対順位がkである時，彼女の全体(N人)での順位がl ($l \geqq k$) である条件付確率とすると，よく知られている（たとえば，坂口[4], P.86）ように

$$p(l|n,k) = \frac{\binom{l-1}{k-1}\binom{N-l}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k \leqq l \leqq N-n+k \qquad (2)$$

で与えられる。この時，この女性を採用して成功するには以後出現する ($l-k$) 人のベターな応募者がすべてタイプ2とならなければならない。この確率は q^{l-k} であるから，直ちに

$$g(n,k) = \sum_{l=k}^{N-n+k} q^{l-k} p(l|n,k) \qquad (3)$$

を得る。n番目の女性を流した時，($n+1$)番目の女性の採否が問題となるのは，彼女が，i－候補者 ($1 \leqq i \leqq k$) となる場合である。($n+1$)番目の女性の相対順位は等確率 $1/(n+1)$ で，$1, 2, \cdots, n+1$ の値をとるから，$v(n,k)$ は

$$v(n,k) = \frac{1}{n+1}\left\{p\sum_{i=1}^{k} f(n+1,i) + qk\,v(n+1,k+1) + (n+1-k)v(n+1,k)\right\} \qquad (4)$$

$$(0 \leqq n \leqq N-1,\ v(N,k) \equiv 0)$$

を満足する。(3), (4) を(1)に代入して(1)を逐次解けば解が求まるが，最適政策の性質を解析的に調べてみよう。

補題1. $g(n,k)$ は k に関して非増加であり，n に関して非減少である。

(証明) (3)から直接証明することもできるが，煩雑だからそれを避ける。$g(n,k)$ は意味の上から明らかに次の再帰関係式

$$g(n,k)=\frac{1}{n+1}\{\beta k\, g(n+1,k+1)+(n+1-k)g(n+1,k)\} \qquad (5)$$

を満足するから，これを利用して帰納法で示そう。

(i) k に関する非増加性。

$n=N$ の時は自明。$n+1$ での成立を仮定して，n での成立を示す。しかるに，これは(5)より

$$\begin{aligned} g(n,k-1)-g(n,k)=\frac{1}{n+1}\Big[&\beta k\{g(n+1,k)-g(n+1,k+1)\}\\ &+(n+1-k)\{g(n+1,k-1)-g(n+1,k)\}\\ &+\{g(n+1,k-1)-\beta g(n+1,k)\}\Big]\end{aligned}$$

と書けるから明らか。

(ii) nに関する非減少性

(5)より

$$g(n,k)-g(n+1,k)=-\frac{k}{n+1}\{g(n+1,k)-q\,g(n+1,k+1)\}$$

となるから明らか。

補題2. $1 \leqq n \leqq N-1$の時，$v(n,k)$はkに関して増加である。

(証明) (4)より直ちに$v(N-1,k)=kp/N$となり，$n=N-1$では確かに成立。$n+1$での成立を仮定してnでの成立を示す。しかるに，これは(4)より

$$\begin{aligned} v(n,k)-v(n,k-1)=\frac{1}{n+1}\Big[&p\{f(n+1,k)-v(n+1,k)\} \\ &+qk\{v(n+1,k+1)-v(n+1,k)\} \\ &+(n+2-k)\{v(n+1,k)-v(n+1,k-1)\}\Big] \end{aligned}$$

と書けるから明らか。

補題1,2より直ちに次の定理が得られる。

定理1. $k^*(n)=\max\{k: g(n,k) \geqq v(n,k)\}$が存在して

状態 (n, k) での最適決定は，$k \leqq k^*(n)$ の時に限り，n 人目の女性を採用することである。

又，成功確率は

$$\sum_{n=1}^{N} q^{n-1} p \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(n, k) \right\}$$

で与えられる。

次に $k^*(n)$ の性質を調べよう．

補題3.　$k^*(n)$ は n に関して非減少である。

（証明）　$k^*(n)$ の定義より，$k \leqq k^*(n+1)$ の時，$v(n, k) \geqq v(n+1, k)$ を示せば十分である。しかるに (4) は

$$v(n,k) - v(n+1,k) = \frac{1}{n+1}\Big[p \sum_{i=1}^{k} \{ f(n+1,i) - v(n+1,k+1) \} + k\{ v(n+1,k+1) - v(n+1,k) \} \Big] \tag{6}$$

と書かれ，$i \leqq k \leqq k^*(n+1)$ の時，$f(n+1, i) = g(n+1, i)$ であることを考慮すると，(6) は $k \leqq k^*(n+1)$ の時，

$$v(n,k) - v(n+1,k) = \frac{1}{n+1}\Big[p \sum_{i=1}^{k} \{ g(n+1,i) - v(n+1,k+1) \}$$

$$+k\{v(n+1,k+1)-v(n+1,k)\}] \tag{7}$$

となる。2つの場合に分けて示す。

(i) $k \leqq k^*(n+1)-1$ の時,

任意の $i \leqq k$ について $g(n+1,i) \geqq v(n+1,k+1)$ であるから,補題2を考慮すれば(7)より直ちに $v(n,k) \geqq v(n+1,k)$ が得られる。

(ii) $k=k^*(n+1)$ の時,

$k^*=k^*(n+1)$ と略すと(7)は

$$v(n,k^*)-v(n+1,k^*)=\frac{1}{n+1}\left[p\sum_{i=1}^{k^*}\{g(n+1,i)-v(n+1,k^*)\}\right.$$

$$\left.+qk^*\{v(n+1,k^*+1)-v(n+1,k^*)\}\right]$$

となり,k^*の定義と補題2より,$v(n,k^*) \geqq v(n+1,k^*)$ が得られる。

$N\to\infty$ とした時の関数の挙動を調べるために,$n/N=x$ とおいて,$N, n\to\infty$ とする。この時,$g(n,k)$, $v(n,k)$ の値を,それぞれ $g_k(x)$, $v_k(x)$ と記すと,(3)より

$$g_k(x)=\left(\frac{x}{p+qx}\right)^k, \qquad 0<x<1,\ k=1,2,\cdots \tag{8}$$

δ

が得られる。又，(6)にMucci [3]流の考え方を適用すると，

$$
\begin{aligned}
v_k'(x) = -\frac{1}{x}\Big[\, & p\sum_{i=1}^{k}\{g_i(x)-v_i(x)\}^+ \\
& + qk\,v_{k+1}(x) - k\,v_k(x) + p\sum_{i=1}^{k} v_i(x)\Big]
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

$$
\left(\begin{array}{l} 0<x<1 \\ k=1,2,\cdots \end{array}\right)
$$

が得られる。(8)，(9)から漸近的な挙動が調べられるが，これを解くのは非常に困難である。しかし，Gianini and Samuels [2]流のアプローチを用いれば，$p\,(>0)$の値の如何にかかわらず，最適政策の下で成功する確率がe^{-1}以上となることを示すことができる。Gianini and Samuels流のアプローチは最初から無限人の応募者を考える。すなわち，絶対順位1，2，3，$\cdots$の無限人の応募者が，それぞれ独立に(0，1)上の一様分布に従って我々の前に出現するものと仮定して解を求める。Gianini and Samuelsはこれが有限問題の極限と一致することを示した。今，時刻$x\in(0,1)$以前に到着する応募者をすべて流し，それ以後最初の候補者を採用する政策を，x-level政策と呼ぶと，次の補題が成立する。

補題4.　x-level 政策の下での成功確率は$p\,(>0)$に無関係に$-x\log x$である。故に，この政策の範囲ではe^{-1}-level 政策が最適で，この時，成功

確率も e^{-1} となる。

（証明） 到着の一様性を考慮すると，$(0,x)$ でのタイプ1のベストが時刻 x で相対順位 i である確率は pq^{i-1} である。又，時刻 x での相対順位 i が，時刻 $y\,(>x)$ で相対順位 j である確率は

$$\binom{j-2}{i-1}\left(\frac{x}{y}\right)^{i}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{j-i-1}$$

である。故に(8)を利用すると，x-level 政策の下で成功する確率は

$$\int_x^1 \sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1}\left\{\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j-1} pq^{j-i-1}\binom{j-2}{i-1}\left(\frac{x}{y}\right)^{i}\left(1-\frac{x}{y}\right)^{j-i-1}\frac{1}{y}\,g_k(y)\,dy\right\}$$

$$= -x\log x\,。$$

参考文献

[1] Gilbert, J.P., and F. Mosteller., "Recognizing the maximum of a sequence", Journal of American Statistical Association, 61 (1966), 35–73.

[2] Gianini, J., and S.M. Samuels., "The infinite

secretary problem", Ann. Prob., 4 (1976), 418-432.
[3] Mucci, A.G., "Differential equations and optimal choice problems", Ann. Statist., 1 (1973), 104-113.
[4] 坂口実,「経済分析と動的計画」,東洋経済新報社,(1970).
[5] Smith, M.H., "A secretary problem with uncertain employment", J. Appl. Prob., 12 (1975), 620-624.