数理解析研究所講究録
第 558 巻 1985 年 1-4

無限階方程式の最近の話題から

近畿大理工　青木貴史
AOKI Takashi

無限階擬微分作用素の可逆性定理（[1], Théorème 5.1）の応用として正則函数のgermsの空間において指数（index）が有限となるような無限階微分作用素の存在がわかる．以下ではこのことについて述べる．詳しくは[2]を参照されたい．

1. 可逆性定理の書きかえ．　表象 $P(z,\zeta)$ により定義される擬微分作用素 $:P(z,\zeta):$ は $1/P(z,\zeta)$ がまた表象となるとき $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ で可逆となる（[1], Théorème 5.1）．ここに仮定した条件は $P(z,\zeta)$ の下からの評価 $\forall\varepsilon>0\ \exists C_\varepsilon>0\ |P(z,\zeta)|\geq C_\varepsilon\exp(-\varepsilon|\zeta|)$ と同値であるが $P(z,\zeta)$ が ζ について entire のとき，すなわち $:P(z,\zeta): = P(z,D_z)$ が微分作用素の場合には表象 $P(z,\zeta)$ の零点分布についての条件に書きかえることができる（[5], Lemma 4.1.3 参照）．従って [5], Theorem 4.1.8 の変数係数への拡張が得られる：

定理 1. z^* を $\dot{T}^*\mathbb{C}^n$ の点, U を z^* の錐近傍とする. $P(z, D_z)$ を $\pi(U)$ ($\pi: T^*\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 射影) で定義された微分作用素(無限階でもよい), $P(z, \zeta)$ をその表象とする. 正定数 R が存在して $\{(z,\zeta)\in U; |\zeta|>R\}$ 上 $P(z,\zeta)\neq 0$ となるならば $P(z, D_z)$ は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n, z^*}$ において可逆である.

2. 指数が有限となるための条件

補題 2. $P(z, D_z)$ を $\mathbb{C}^n$ の原点 0 の近傍で定義された(有限階または無限階)微分作用素とする. 0 に十分近い任意の $z\neq 0$ に対して P は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,(z,\bar{z})}$ において可逆と仮定すると

$$\dim \operatorname{Ker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

$$\dim \operatorname{Coker}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

従って $\operatorname{ind}(P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) = \dim \operatorname{Ker} P - \dim \operatorname{Coker} P < \infty$ となる. 特に $P: \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ は of closed range である. ここに $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ は $\mathbb{C}^n$ における正則函数の層 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ の 0 における germ を表わす.

証明の方針 $t>0$ に対して $\Omega_t = \{z\in\mathbb{C}^n \mid t-|z|^2>0\}$ とおくと $z\in\partial\Omega_t$ における $\partial\Omega_t$ の conormal は $(z,\bar{z})\in\dot{T}^*\mathbb{C}^n$ である. 仮定より $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}\otimes\mathcal{M}:\ 0\leftarrow\mathcal{E}^{\mathbb{R}}\xleftarrow{P}\mathcal{E}^{\mathbb{R}}\leftarrow 0$ は $(z,\bar{z})$ にて exact となる. 従って柏原-Schapira の接続定理 ([4], Theorem 4.5.1) が適用でき十分小さな任意の t と任意の j について同型

$$\operatorname{Ext}^j_{\mathcal{D}^\infty}(\bar{\Omega}_t; \mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^j_{\mathcal{D}^\infty}(\Omega_t; \mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$$

が得られる. ただし $\mathcal{M} = \mathcal{D}^{\infty}_{\mathbb{C}^n} / \mathcal{D}^{\infty}_{\mathbb{C}^n} P$, $\bar{\Omega}_t$ は Ω_t の閉包を表わす. 特に $j=0,1$ のときを書きかえると

$$\mathrm{Ker}\,(P : \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t) \to \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,(P : \mathcal{O}(\Omega_t) \to \mathcal{O}(\Omega_t)),$$

$$\mathrm{Coker}\,(P : \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t) \to \mathcal{O}(\bar{\Omega}_t)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}\,(P : \mathcal{O}(\Omega_t) \to \mathcal{O}(\Omega_t))$$

がわかり compact perturbation についての古典的結果 (Bony-Schapira [3] 参照) により上のふたつの空間は有限次元となる. 任意の $t>0$ について成り立つので帰納極限をとれば

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}\,(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}\,(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

がわかる.

上の補題2と定理1を組みあわせると次の定理が得られる. これは Bony-Schapira による指数有限性の定理 ([3], Théorème 5) の無限階への自然な拡張を与える.

<u>定理 3</u>　$P(z, D_z)$ を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍で定義された (有限階または無限階) 微分作用素とする. 任意の十分小さな定数 $c>0$ に対しある正定数 δ, R が存在し $P(z, D_z)$ の表象 $P(z,\zeta)$ は

$$\left\{ (z,\zeta) \in T^*\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n - \{0\}) \;\middle|\; \frac{c}{2} < |z|^2 < \frac{3}{2}c,\ |\zeta| > R,\ \left| \frac{\zeta}{|\zeta|} - \frac{z}{|z|} \right| < \delta \right\}$$

で消えないと仮定する. このとき

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}\,(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}\,(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$$

従って $\mathrm{ind}\,(P : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}) < \infty$ となる.

実際，上の仮定と定理1を組合わせると原点に十分近い任意の $z \neq 0$ と $\zeta = \bar{z}$ に対して P は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathbb{C}^n,(z,\zeta)}$ で可逆であることがわかり補題2の仮定がみたされ定理3の結論がただちに得られる.

定理3の条件をみたす作用素が存在することも知られている([2], Proposition 1 参照).

文献

[1] T. Aoki, Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, II, à paraître.

[2] T. Aoki, M. Kashiwara & T. Kawai, On a class of linear differential operators of infinite order with finite index, to appear.

[3] J. M. Bony & P. Schapira, Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, Inventiones math, 17 (1972), 95-105

[4] M. Kashiwara & P. Schapira, Microhyperbolic systems, Acta Math., 142 (1979), 1-55.

[5] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA, 17 (1970), 467-517.