数理解析研究所講究録
第558巻 1985年 64-95

パラメータ付きFourier超函数の理論

東大 理 日笠貴司 (Takashi Hikasa)

§0 はじめに

Fourier超函数の基本的な概念は佐藤[10]による。そこでは1変数の場合について、劣指数型整型函数の境界値としてFourier超函数を定義している。Kawai[6]は多変数のFourier超函数を増大度付き整型函数の層の相対コホモロジーとして定義し、定数係数線型偏微分方程式に応用した。しかしそこではFourier超函数は$\mathbb{D}^n$上の層であり、$\mathbb{D}^n$は、超平面$\{x_1 = \mathrm{const}\}$がすべて同一の無限遠($n-2$次元)球面を共有するなど、変数の分離について都合の良くない構造を持っている。そこでこれを改良して、たとえば$\mathbb{D}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$の上の層を考えれば、第一変数についての制限とか、残りの変数に関する部分Fourier変換についてより自然な対象となるであろう。また、$\{x_1 = \mathrm{const}\}$の近傍のみならば、むしろ$\mathbb{R}^1 \times \mathbb{D}^{n-1}$の上で考えたほうが自然であろうし、これを貼りあわせれば、実解析多様体Mに対して、$M \times \mathbb{D}^n$の上の“Mの超函数をパラメ

ータとして持つ$\mathbb{D}^n$上のFourier超函数”も考えられるであろう。

以下この小文では、$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$（mは多重指数）の上の超函数パラメータを持つFourier超函数$\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|}$の理論の基礎的部分について述べる。§1で言葉の準備をしたあと、§2で必要な増大度付き整型函数に関する諸定理を引用し、双対性の方法で部分Fourier変換を定義する。§3では境界値表示について述べ、緩増加実解析的函数の層$\mathcal{P}^m\mathcal{A}^{n-|m|}$を$\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|}$に埋め込む。とくに、$\mathcal{QB}(\Omega)/\mathcal{PA}(\Omega)=\mathcal{QB}/\mathcal{PA}(\Omega)$および$\mathcal{QB}/\mathcal{PA}$が脆弱なことが示される。§4ではRadon変換の方法により、基本的な楔の刃定理、特異性分解定理を証明する。§5では双対性の具体的表示など、若干の例をあげる。

なお、通常の超函数あるいはFourier超函数と同様にすれば良いところでは、記述の膨大になるのと繰り返しを避けて、かなり引用ですませた。§2の諸定理は主にNagamachi［7］からの引用であり、また§3、§4は金子［3］［4］の方法の逐語訳であることを明記しておく。

そもそものアイデアをくださった上、いろいろとご教示くださった金子晃先生、多くの問題点を鋭く指摘し、また怠慢な筆者をつねに叱咤激励してくださった小松彦三郎先生に、

深く感謝いたします。

§1　準　　備

定義1．1　$\mathbb{R}^n$の方向別コンパクト化を$\mathbb{D}^n$とする。すなわち、まず集合として、

$$\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{S}^{n-1} \tag{1.1}$$

$\mathbb{S}^{n-1}$を無限遠球面、その点を無限遠点と呼ぶ。これに対して$\mathbb{R}^n$の点を有限の点と呼ぶ。また$\mathbb{S}^{n-1}$を$(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+$と同一視して，$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$で代表される$\mathbb{S}^{n-1}$の点を$x\infty$と書く。

$\mathbb{D}^n$の位相は次のように定める。$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \leqq 1\}$とおくとき，$\mathbb{B}^n$から$\mathbb{D}^n$への全単射

$$\mathbb{B}^n \ni x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|^2} & (|x| < 1) \\ x\infty & (|x| = 1) \end{cases} \tag{1.2}$$

が同相写像になるように$\mathbb{D}^n$の位相を決める。(1.2)により$\mathbb{R}^n (\subset \mathbb{D}^n)$には通常と同じ位相が与えられるから，位相空間$\mathbb{R}^n$を$\mathbb{D}^n$の部分空間とみなす。

定義1．2　$m = (m_1, \cdots, m_k)$，各m_kを自然数とする。また、$|m| = m_1 + \cdots + m_k$とおく。　$\mathbb{D}^m = \mathbb{D}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{D}^{m_k}$　と定義する。$\mathbb{R}^{m_j}$ $(j = 1, \cdots, k)$を$\mathbb{D}^{m_j}$の部分空間とみなすのに従い，$\mathbb{R}^{|m|} = \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k}$を自然に$\mathbb{D}^m$の部分空間とみなす。

位相空間　$\mathbb{D}^m \times (i\mathbb{R}^{|m|})$をとくに$\mathbb{D}^m + i\mathbb{R}^{|m|}$と書き，上の同

一視から導かれる自然な埋め込み：$\mathbb{C}^{|m|}=\mathbb{R}^{|m|}+i\mathbb{R}^{|m|}\hookrightarrow \mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ によって、以下つねに $\mathbb{C}^{|m|}$ を $\mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ の部分空間とみなす。

またさらに $n>|m|$ のとき、$(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|})\times(i\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$ と書き、同様にして $\mathbb{C}^n$ をこれの部分空間とみなす。——

つぎに、以上のような位相空間の上に、増大度つき整型函数の層を定義しよう。

<u>定義1．3</u>　$\mathbb{C}^n$ の上の整型函数の層を $\mathcal{O}$ とするとき、$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$ 上の層 $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$ を次のように定義する。

$U\subset\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$ を開集合とするとき、その上の $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$ の断面（の全体）を次のように定める：

$$\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(U)=\{f(z)\in\mathcal{O}(U\cap\mathbb{C}^n);$$
$$\forall\varepsilon>0\ \forall K\subset\subset U\ \sup_{z\in K\cap\mathbb{C}^n}|f(z)e^{-\varepsilon|z|}|<\infty\}\quad(1.\ 3)$$

m, n を明記する必要のない時は $\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}$ と略記する。また $n=|m|$ のときの $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$ は単に $\tilde{\mathcal{O}}^m$ と書く。$m=(m_1)$ のときこれは通常の定義と一致する。

実際(1.3)で与えられる前層が層となることは明らかであろう。また、$\mathbb{C}^{n-|m|}$ の変数を z' と書くとき、$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合K上では $e^{\varepsilon|z'|}$ も $e^{-\varepsilon|z'|}$ も有界になることに注意すれば、(1.3) がはじめの$|m|$個の変数だけについて緩増加な函数の層であることもわかる。

さて、次に $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$ 上の層 $\underset{\sim}{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$ を定義する：

$$\underset{\sim}{\mathcal{O}}^{m}\mathcal{O}^{n-|m|}(U)=\{f(z)\in\mathcal{O}(U\cap\mathbb{C}^n)\,;$$
$$\forall K\Subset U\ \exists\varepsilon>0\ \sup_{z\in K\cap\mathbb{C}^n}|f(z)e^{\varepsilon|z|}|<\infty\}\qquad(1.4)$$

略記法について．また通常の定義との一致など，$\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}$ の場合と同様である。

<u>注意1．4</u>　$z\in\mathbb{C}^n$ のとき，茎 $\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}_z$，$\underset{\sim}{\mathcal{O}}\mathcal{O}_z$ はいずれも $\mathcal{O}_z$ と一致することに注意する。また $\mathbb{D}^{(m,n-|m|)}$ の点 z で $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ の点でもあるものについては，$\tilde{\mathcal{O}}^{(m,n-|m|)}{}_z$ と $\tilde{\mathcal{O}}^{m}\mathcal{O}^{n-|m|}{}_z$ が一致することにも注意する。——

つぎに $\underset{\sim}{\mathcal{O}}\mathcal{O}(K)$ の位相を定義しよう。

<u>定義1．5</u>　K を $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とする。$U_1\supset U_2\supset\cdots\supset K$ を外側からの K の近似開集合列として，$f(z)\in\mathcal{O}(U_j\cap\mathbb{C}^n)$ に対して次のようにおく。

$$\|f\|_j=\sup_{z\in U_j\cap\mathbb{C}^n}|f(z)e^{\frac{1}{j}|z|}|\qquad(1.6)$$

$$X_j=\{f\in\mathcal{O}(U_j\cap\mathbb{C}^n)\,;\ \|f\|_j<\infty\}\qquad(1.7)$$

は $\|\cdot\|_j$ をノルムとする Banach 空間となる。$U_j\supset U_{j+1}$ から

$$X_1\to X_2\to X_3\to\cdots\qquad(\text{写像は自然な制限})\qquad(1.8)$$

はコンパクトな帰納系をなし，$\underset{\sim}{\mathcal{O}}\mathcal{O}(K)$ は線型空間としてこの系の帰納極限となる。そこで $\underset{\sim}{\mathcal{O}}\mathcal{O}(K)$ に (1．8) の帰納極限位相を入れる。この位相が U_j の取り方によらないことは明らかであろう。$\underset{\sim}{\mathcal{O}}\mathcal{O}(K)$ はこの位相により DFS 空間になる。

<u>定義1．6</u>　層 $\tilde{\mathcal{O}}^{m}\mathcal{O}^{n-|m|}$ の実軸 $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ への制限を $\mathcal{P}^m\mathcal{A}^{n-|m|}$ と

書く。また$\underset{\sim}{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$については$\mathcal{P}_*^m\mathcal{A}^{n-|m|}$と書く：

$$\mathcal{P}^m\mathcal{A}^{n-|m|} := \tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{n-|m|}\,\Big|_{\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}} \qquad (1.9)$$

$$\mathcal{P}_*^m\mathcal{A}^{n-|m|} := \underset{\sim}{\mathcal{O}}\mathcal{O}^{n-|m|}\,\Big|_{\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}} \qquad (1.10)$$

とくに$n=|m|$のとき、次のように書く。

$$\mathcal{P}^m := \tilde{\mathcal{O}}^m|_{\mathbb{D}^m} \quad ; \quad \mathcal{P}_*^m := \underset{\sim}{\mathcal{O}}^m|_{\mathbb{D}^m} \qquad (1.11)$$

明記する必要のない時はm, $n-|m|$は省略する。——

最後に擬凸性を定義する。まず、

定義 1.7 $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$の開集合$U$が次の条件をみたすとき、$U$を虚方向に有界という。

p_2を、$(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|})+i\mathbb{R}^n \ni (x,y) \mapsto y \in \mathbb{R}^n$なる射影とするとき、$p_2(U)$が$\mathbb{R}^n$で相対コンパクト

定義 1.8 $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$の開集合$U$が次の条件をみたすとき、$U$を$\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$-擬凸という。

1) Uは虚方向に有界

2) $U\cap\mathbb{C}^n$上のC^∞で強多重劣調和な函数$p(z)$があって、

$$\text{i)}\ \ {}^\forall K \Subset U \quad \sup_{z\in K\cap\mathbb{C}^n} |p(z)| < \infty \qquad (1.12)$$

$$\text{ii)}\ \ {}^\forall c \in \mathbb{R} \quad \{z\in U;\ p(z)<c\} \Subset U$$

注意 1.9 $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$の開集合$U$が$\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$-擬凸であることと、$U$を$\mathbb{D}^{(m,n-|m|)}+i\mathbb{R}^n$の開集合とみなした時$\tilde{\mathcal{O}}^{(m,n-|m|)}$-擬凸であることは同値である。

また、$m=(m_1,\cdots,m_k)$, $m'=(m_1,\cdots,m_\ell)$ $(\ell<k)$とするとき、

U の一部の変数を有限なところに制限したもの：

$$U \cap \mathbb{D}^{m'} \times \mathbb{R}^{n-|m'|} + i\mathbb{R}^n = U' \qquad (1.\ 13)$$

は $\tilde{\mathcal{O}}^{m'}\mathcal{O}^{n-|m'|}$-擬凸である。実際 $m_1+\cdots+m_\ell+1$ 番目から $m_1+\cdots+m_k$ 番目までの変数を z' と書くとき、

$$p(z) + |z'|^2 \qquad (1.\ 14)$$

で $P(z)$ を取り替えればよい。——

以下、擬凸領域の例を挙げよう。

例 1. 10　$\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|} + i\mathbb{R}^n$ の座標を (x, t, y, s) と書くことにする。ただし $x \in \mathbb{D}^m$, $t \in \mathbb{R}^{n-|m|}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $s \in \mathbb{R}^{n-|m|}$ で $(x, t) \in \mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|}$, $i(y, s) \in i\mathbb{R}^n$ とする。次の例は基本的である。

$$\begin{aligned} &\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|} \times i\{(y, s) \in \mathbb{R}^n ;\ |y|^2 + |s|^2 < 1\} \\ &\quad P(x, t, y, s) = (1 - (|y|^2 + |s|^2))^{-1} \end{aligned} \qquad (1.\ 15)$$

つぎに $D' = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{|m|} \times \mathbb{R}^{n-|m|} ;\ x_1 > 0\}$; $D = \mathrm{Int}(\overline{D'})$
（ここに、閉包、内部は $\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|}$ における意味）とすれば、

$$\begin{aligned} &D \times i\{(y, s) \in \mathbb{R}^n ;\ |y|^2 + |s|^2 < 1\} \\ &\quad (\ P(x, t, y, s) = x_1^{-1} + (1 - (|y|^2 + |s|^2))^{-1}\ ) \end{aligned} \qquad (1.\ 16)$$

も $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$-擬凸である。$D'$ は $\mathbb{R}^n$ の一次変換で自由に移せるので、これに対応して無数の例が得られる。

例 1. 11　$\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \neq 0$ とするとき、次の領域は $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$ 擬凸である：　$\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|} + i\{(y, s) \in \mathbb{R}^n ;\ |y|^2 + |s|^2 < 1,\ \lambda \cdot (y, s) > 0\}$
実際、対応する函数は、$(1 - (|y|^2 + |s|^2))^{-1} + (\lambda \cdot (y, s))^{-1}$

§2　基礎となる諸定理

さて、はじめに述べたように、以下ではパラメータ付きFourier超函数

$$\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|} := \mathcal{H}^n_{\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}}(\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|})|_{\mathbb{D}^n\times\mathbb{R}^{n-|m|}} \tag{2.1}$$

の理論を展開したい。ところが、基礎となる層係数コホモロジーに関する定理については、Fourier超函数、すなわち(2.1)で $n=|m|$ の場合についてだけ証明すればよいことがわかる。

実際、注意1.4により、

$$\tilde{\mathcal{O}}^{(m,n-|m|)}|_{\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n} = \tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|} \tag{2.2}$$

であるから、$\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$ の局所的性質は、すべて $\tilde{\mathcal{O}}^{(m,n-|m|)}$ の局所的性質から導かれる。また擬凸領域に対する大域的なコホモロジーの消滅は注意1.9により、$\tilde{\mathcal{O}}^{(m,n-|m|)}$ の場合だけ証明すればよい。したがって、この節ではまず $n=|m|$ の場合に限定し、以下必要になる諸定理を引用することから始める。

定理2.1　S を $\mathbb{D}^m$ の開集合、U を $\mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ におけるその開近傍とすると、$\tilde{\mathcal{O}}^m$-擬凸領域 V で $V\subset U$ かつ $S=V\cap\mathbb{D}^m$ となるようなものが存在する。

証明　Nagamachi [7] 定理5.3を見よ。なお、Kawai [6] は $m=(m_1)$ の場合しか扱っていないので、一部孫引きのようになるがここでは一応 Nagamachi [7] を引用することにする。そこでは一般に混合Fourier超函数を扱っているが、上の場合は

その特別な場合になる。

系2．2 S を $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ の開集合，U を $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$ における その開近傍とすると、$\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$-擬凸領域 V で $V\subset U$ かつ $S=V\cap(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|})$ となるものが存在する。

証明 前定理と注意1.9から明らかである。以下このような $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$ に関する定理はいちいち掲出しないことにする。

定理2．3 $U\subset\mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ を $\tilde{\mathcal{O}}^m$-擬凸な開集合とするとき、

$$H^p(U,\ \tilde{\mathcal{O}}^m)=0\qquad(p\geqq 1)\tag{2.3}$$

証明 Nagamachi［7］定理5．9を見よ。

定理2．4 K を $\mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ のコンパクト集合で，$\tilde{\mathcal{O}}^m$-擬凸な開集合から成る基本近傍系をもつものとすれば、

$$H^p(K,\ \underset{\sim}{\mathcal{O}}^m)=0\qquad(p\geqq 1)\tag{2.4}$$

証明 Nagamachi［7］ 系5．10 を見よ。

定理2．5 U を $\mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ の虚方向に有界な開集合とすれば、

$$H^{|m|}(U,\ \tilde{\mathcal{O}}^m)=0\tag{2.5}$$

証明 Nagamachi［7］定理5．11を見よ。

定理2．6 K を $\mathbb{D}^m$ のコンパクト集合とすれば，$\mathcal{P}_*^m(\mathbb{D}^m)$ は $\mathcal{P}_*^m(K)$ で稠密である。

証明 Nagamachi［7］定理3．1を見よ。なお Saburi［9］定理2.3.1. のあとの注意も参照

系2．7 K を $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ のコンパクト集合とすれば，

$P_*{}^m\mathcal{A}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|})$ は $P_*{}^m\mathcal{A}^{n-|m|}(K)$ で稠密である。

証明 K は $\mathbb{D}^{(m,n-|m|)}$ の集合とみてもコンパクトであり、また $P_*{}^{(m,n-|m|)}(K)=P_*{}^m\mathcal{A}^{n-|m|}(K)$ となる。一方 $P_*{}^{(m,n-|m|)}(\mathbb{D}^{(m,n-|m|)})$ は $P_*{}^m\mathcal{A}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|})$ の部分空間であることに注意すれば、系は前定理からただちに従う。

定理2．8 K を $\mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ のコンパクト集合、U を K を含む $\tilde{\mathcal{O}}^m$-擬凸領域とし、$H^p(K,\underset{\sim}{\mathcal{O}}^m)=0\ (p\geq 1)$ が成立しているとする。このとき、

$$H_K{}^p(U,\tilde{\mathcal{O}}^m)=0\quad(p\neq|m|)\ ;\quad H_K^{|m|}(U,\tilde{\mathcal{O}}^m)=[\underset{\sim}{\mathcal{O}}^m(K)]' \tag{2.6}$$

証明 Nagamachi [7] 定理 5.12 を見よ。

定理2.1、定理2.4、定理2.8 から、

定理2.9 K を $\mathbb{D}^m$ のコンパクト集合、U を $\mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ におけるその開近傍とすれば、

$$H_K{}^p(U,\tilde{\mathcal{O}}^m)=0\quad(p\neq|m|)\ ;\quad H_K^{|m|}(U,\tilde{\mathcal{O}}^m)=[P_*{}^m(K)]' \tag{2.7}$$

この定理と定理2.5から、よく知られているように、$\tilde{\mathcal{O}}^m$ の $\mathbb{D}^m$ に関する純 $|m|$ 余次元性が導かれる：

定理2.10 Ω を $\mathbb{D}^m$ の開集合、U を $\mathbb{D}^m+i\mathbb{R}^{|m|}$ におけるその近傍とすれば、

$$H^p_\Omega(U,\tilde{\mathcal{O}}^m)=0\qquad(p\neq|m|) \tag{2.8}$$

以上により、Fourier超函数が定義される。

定義と定理2．11 $\mathbb{D}^m$ 上の層 $\mathcal{Q}^m$ を

$$\mathcal{Q}^{m} = \mathcal{H}^{|m|}_{\mathbb{D}^m}(\tilde{\mathcal{O}}^{m})|_{\mathbb{D}^m} \tag{2.9}$$

で定義する。$\mathcal{Q}^m$は$\mathbb{D}^m$上の脆弱層となり、$z \in \mathbb{R}^{|m|}$に対しては、$\mathcal{Q}^m{}_z = \mathcal{B}^{|m|}{}_z$ となる。（ただし $\mathcal{B}^{|m|}$ は $\mathbb{R}^{|m|}$ 上の超函数の層）

また$\mathbb{D}^m$のコンパクト集合Kに対して、

$$\mathcal{Q}^m[K] = [\mathcal{P}_*^m(K)]' \tag{2.10}$$

この節の最初に書いた注意により、上記の諸定理はパラメータ付きの場合についてもそのまま成立するので、パラメータ付きFourier超函数が定義できる。

<u>定義と定理 2.12</u>　$\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|}$の上の層 $\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|}$ を

$$\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|} = \mathcal{H}^{n}_{\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}}(\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|})|_{\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}} \tag{2.11}$$

で定義する。$\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|}$ は $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ 上の脆弱層となり、また $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ のコンパクト集合 K に対して

$$\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|}[K] = [\mathcal{P}_*^m\mathcal{A}^{n-|m|}(K)]' \tag{2.12}$$

そして、$m=(m_1,\cdots,m_k)$, $m'=(m_1,\cdots,m_\ell)$ $(\ell<k)$ とするとき、$z\in\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ かつ $z\in\mathbb{D}^{m'}\times\mathbb{R}^{n-|m'|}$ となる点 z に対しては、

$$\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|}{}_z = \mathcal{Q}^{m'}\mathcal{B}^{n-|m'|}{}_z$$

――

この節を終える前に、双対性の応用として、パラメータ付きFourier超函数の部分Fourier変換を定義しよう。

<u>補題 2.13</u>　Kを$\mathbb{R}^{n-|m|}$のコンパクト集合とする。$\mathcal{P}_*^m\mathcal{A}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m\times K)$ からそれ自身への写像 $\mathcal{F}_x$：

$$f(x,t) \longmapsto \int e^{-ix\xi} f(\xi,t)\,d\xi \tag{2.13}$$

はうまく定義されて．位相線型空間の自己同型を与える。

$$\mathcal{F}_x^{*}:\quad f(x,t)\longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{ix\xi}f(\xi,t)\,d\xi \qquad (2.14)$$

は $\mathcal{F}_x$ の逆写像を与える。

<u>証明</u>　K の $\mathbb{C}^{n-|m|}$ における近似開集合列 $U_1 \supset\supset U_2 \supset\supset \cdots \supset\supset K$ を取ろう。$z=x+iy,\ \tau=t+is$ をそれぞれ x,t の複素化として，

$$X_j=\{f(z,\tau)\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^{|m|}\times i\{|y|<\tfrac{1}{j}\}\times U_j)\ ;\ \sup|f(z,\tau)e^{\frac{1}{j}|z|}|<\infty\} \quad (2.15)$$

と置けば，X_j は

$$\|f\|_j=\sup_{(z,\tau)\in\mathbb{R}^{|m|}\times i\{|y|<\frac{1}{j}\}\times U_j}|f(z,\tau)e^{\frac{1}{j}|z|}| \qquad (2.16)$$

をノルムとする Banach 空間となり，

$$P_*^{m}\mathcal{A}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m\times K)=\lim_{\substack{\longrightarrow\\ j}}\operatorname{ind} X_j \qquad (2.17)$$

となる。さて，いま $f(x,t)\in P_*^{m}\mathcal{A}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m\times K)$ を取ろう。f はある X_j の元である．いま $\mathcal{F}_x f$ は次のように書かれる：

$$(\mathcal{F}_x f)(x+iy,\tau)=\int_{\eta=\eta_0}e^{-i(x+iy)(\xi+i\eta)}f(\xi+i\eta,\tau)\,d\xi \qquad (2.18)$$

ここで f が $|\eta|<\frac{1}{j}$ で整型で，$e^{\frac{1}{j}|\xi|}$ を掛けても有界であることに注意すれば，$j'>j$ に対して $\mathcal{F}_x f\in X_{j'}$ となることがわかる。$\mathcal{F}_x^{*}$ についても同様だから，これらはうまく定義されて互いに他の逆写像を与えることは周知の結果である。連続性については，$P_*\mathcal{A}$ が DFS 空間だから列的連続性を示せば十分だが，収束列は有界集合なので，ある X_j に含まれることに注意すれば，これは明らかである。——

これを用いて $\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|}$ における部分 Fourier 変換を定義しよう。

<u>定義2.14</u>　Ω を $\mathbb{R}^{n-|m|}$ の開集合とする。$Q^m B^{n-|m|}(\mathbb{D}^m \times \Omega) \ni f$ の部分 Fourier 変換 $\mathcal{F}_x f$ を次のように定義する。$\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ を Ω のコンパクト集合の局所有限和による分解とする。これに応じて $f = \sum_\lambda f_\lambda$ を $\operatorname{supp} f_\lambda \subset \mathbb{D}^m \times K_\lambda$ なる局所有限和に分解する。脆弱性からこのような分解はつねに可能である。さて、いま

$$f_\lambda \in QB[\mathbb{D}^m \times K_\lambda] = (P_*A(\mathbb{D}^m \times K_\lambda))' \qquad (2.19)$$

であるから、補題2.13 の写像（K_λ を明示するため $\mathcal{F}_{x,K_\lambda}$ と書こう）の双対写像 $\mathcal{F}_{x,K_\lambda}'$ による像があり，$QB[\mathbb{D}^m \times K_\lambda]$ の元になる。このとき

$$\mathcal{F}_x f := \sum_\lambda \mathcal{F}_{x,K_\lambda}'(f_\lambda) \qquad (2.20)$$

と定義する。右辺は局所有限和の意味である。$\overline{\mathcal{F}}_x$ も同様に定義する。

<u>定理2.15</u>　上の定義は well-defined であり，$\mathcal{F}_x$ は $\mathbb{R}^{n-|m|}$ 上の層：

$$\mathbb{R}^{n-|m|} \supset \Omega \mapsto QB(\mathbb{D}^m \times \Omega) \qquad (2.21)$$

の自己同型を与える。$\overline{\mathcal{F}}_x$ はこれの逆写像を与える。

もし $Q^m B^{n-|m|}(\mathbb{D}^m \times \Omega) \ni f$ の台が $\mathbb{D}^m \times \Omega$ でコンパクト，すなわち $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{D}^m \times K \Subset \mathbb{D}^m \times \Omega$ ならば，定義2.14による f の Fourier 変換 $\mathcal{F}_x f$ は $f \in QB[\mathbb{D}^m \times K]$ とみた Fourier 変換 $\mathcal{F}_{x,K}' f$ と一致する。

<u>証明</u>　f の $\sum f_\lambda$ への分解の取り方によらず $\mathcal{F}_x f$ が定まることを証明すれば，well-defined であることがわかる。（最後の主

張はその特別な場合である）そのためには、次の補題を証明すればよいことは明らかであろう。

補題 2.16 $f \in \mathcal{QB}[\mathbb{D}^m \times K_1]$, $K_1 \subset K_2 \Subset \Omega$ とすると、

$$\mathcal{F}'_{x,K_1} f = \mathcal{F}'_{x,K_2} f \qquad (2.22)$$

補題の証明 双対写像の定義により明らか。——

したがって $\mathcal{F}_x$ は well-defined であり、しかも上補題により(2.21)の対応による層の台を増やさないからこの層の自己準同型である。そして $\bar{\mathcal{F}}_x$ が $\mathcal{F}_x$ の逆であることは明らかだから、自己同型にもなる。

§3 境界値表示

前§で一応パラメータ付きFourier超函数を定義することができたが、このままではまだその性質は十分にはわからない。そこでこの節ではパラメータ付きFourier超函数を（部分）緩増加整型函数の境界値として表現し、あわせてその特異スペクトルを定義する。方法はすべて金子[3][4]による。

定義3.1 Ω を $\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|}$ の開集合、Γ を $\mathbb{R}_y^n$ の開錐とする。$\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|} + i\mathbb{R}^n$ の開集合 U は、次の条件をみたすとき、$\Omega + i\Gamma 0$ 型の無限小楔という。

1) $U \subset \Omega + i\Gamma$

2) ${}^\forall \Gamma' \Subset \Gamma$, ${}^\forall K \Subset \Omega$ に対し、${}^\exists \varepsilon > 0$ があって $K + i(\Gamma' \cap \{|y| < \varepsilon\}) \subset U$

なお，以下の節では簡単のため，$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n=\{z;\ z=x+iy$
$x\in\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|},\ y\in\mathbb{R}^n\}$ として，変数の記号に x,y を使う。

定義3.2 $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ 上の前層 $\check{Q}^m\check{B}^{n-|m|}$ を次のように定義する。

$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ の開集合 Ω に対し，

$$\check{Q}^m\check{B}^{n-|m|}(\Omega)=\{\sum_{j=1}^{N}F_j(x+i\Gamma_j0)\ (\text{可換形式和});\ F_j\in\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(\Omega+i\Gamma_j0)\}/\sim \qquad (3.1)$$

ここに $\sim$ は以下で定義される同値関係，また $F_j\in\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(\Omega+i\Gamma_j0)$ は F_j がある $\Omega+i\Gamma_j0$ 型の開集合 U に対して $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(U)$ の元であることを意味している。

同値関係 $\sim$ は次の 1)，2) から生成されるものである。

1) $F_1,F_2\in\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma0)\Rightarrow F_1(x+i\Gamma0)+F_2(x+i\Gamma0)\sim(F_1+F_2)(x+i\Gamma0)$

2) $F\in\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma_10),\ \Gamma_1\supset\Gamma_2\quad\Rightarrow F(x+i\Gamma_10)\sim F(x+i\Gamma_20)$

さて，上で定義した $\check{Q}\check{B}$ はじつは前層として QB と同型であることが，普通の超函数の場合と同様にして証明される。そのためにはつぎの補題に注意すればよい。

補題3.3 Ω を $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ の開集合，U を $\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$ におけるその $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$-擬凸な近傍で $\Omega=U\cap\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$ とする。いま，$\eta\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対し $E_\eta=\{y\in\mathbb{R}^n;\ \eta\cdot y>0\}$ とおけば，$U_\eta=(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+iE_\eta)\cap U$ は $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$-擬凸である。とくに $\eta^0,\eta^1,\cdots,\eta^n\in\mathbb{R}^n$ を

$$E_{\eta^0}\cup E_{\eta^1}\cup\cdots\cup E_{\eta^n}=\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \qquad (3.2)$$

が成立するように選べば、$\mathcal{U}=\{U, U_{\eta^0}, U_{\eta^1}, \cdots, U_{\eta^n}\}$, $\mathcal{U}'=\{U_{\eta^0}, U_{\eta^1}, \cdots, U_{\eta^n}\}$ は開集合対 $(U, U \setminus \Omega)$ の $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}$ コホモロジーに関する相対 Leray 被覆となる。

証明 例1.11，定理2.3（の$\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}$版）から明らかである。

注意3.4. 上補題と同様にして別の相対 Leray 被覆を得ることもできる。すなわち，$\nu_j=(0, 0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0)$ として，

$$U_j=\{z\in U, \operatorname{Im} z_j\neq 0\}=U\cap(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}\times i(E_{\nu_j}\cup E_{-\nu_j})) \qquad (3.3)$$

と置けば，$\mathcal{U}=\{U, U_1, \cdots, U_n\}$, $\mathcal{U}'=\{U_1, \cdots, U_n\}$ はやはり $(U, U\setminus\Omega)$ の相対 Leray 被覆となる。

定理3.5 $\check{\mathcal{Q}}\check{\mathcal{B}}$ と $\mathcal{Q}\mathcal{B}$ は前層として同型であり，したがって $\check{\mathcal{Q}}\check{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{Q}\mathcal{B}$ の別の表現を与える。

証明 金子[4] 定理7.1.7の証明と全く同様である。 ——

上定理と金子[4]系7.1.8を注意3.4と考えあわせれば，次のような$\mathcal{Q}\mathcal{B}$の元の具体的表示を得る。

命題3.6 注意3.4.の被覆による Čech コホモロジーで $\mathcal{Q}\mathcal{B}(\Omega)$ を表現するとき，

$$\{F_\sigma(z)\}, \quad \sigma\in\{\pm 1\}^n, \ F_\sigma\in\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}(U\cap\bigcap_j(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}\times iE_{\sigma_j\nu_j}))$$

を代表元とする $\mathcal{Q}\mathcal{B}(\Omega)$ の元は，定理3.5の同型で

$$\sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\, F_\sigma(x+i\Gamma_\sigma 0) \qquad (3.4)$$

に移る。ただし $\Gamma_\sigma=\bigcap_j E_{\sigma_j\nu_j}=\{y\in\mathbb{R}^n; \sigma_j y_j>0\}$ ——

さて，$\mathcal{Q}\mathcal{B}$の元が境界値表示されたので，金子[3]と同様

にして、特異スペクトルを定義することができる。

<u>定義3．7</u>　$\check{\mathcal{Q}}^m\check{\mathcal{B}}^{n-1|m|}(\Omega) \ni f$ を取る。f が集合 $\Omega \times S_\xi^{n-1}$ の一点 (x,ξ) でミクロ解析的であるとは、ある x の近傍 U と、そこでの f の表示 $f|_U = \sum_j F_j(x+i\Gamma_j 0)$ で、$-\Gamma_j \cap E_\xi \neq \emptyset$ となるものが存在すること、と定義する。

$\Omega \times S_\xi^{n-1}$ の点で、そこで f がミクロ解析的でないものの全体を $S.S.f$ と書き、f の特異スペクトルと呼ぶ。$S.S.f$ は明らかに $\Omega \times S^{n-1}$ の閉集合である。

<u>定義3．8</u> 規準的な層の準同型 $\mathcal{PA} \to \mathcal{QB}$ を次のように定める。

$$\mathcal{PA}(\Omega) \ni f(x) \longmapsto f(x+i\mathbb{R}^n 0) \in \check{\mathcal{Q}}\check{\mathcal{B}}(\Omega) \qquad (3.5)$$

ただし右辺の $\check{\mathcal{Q}}\check{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{QB}$ と規準的に同型とみなしておく。

<u>定理3．9</u>　(3．5) で与えられる写像は単射であり、これにより $\mathcal{PA}$ は $\mathcal{QB}$ に埋め込まれる。

<u>証明</u>　茎について証明すればよいが、x が有限な点ならば $\mathcal{PA}_x = \mathcal{A}_x$, $\mathcal{QB}_x = \mathcal{B}_x$ であるからこれは周知の結果である。x が無限遠点（を成分に持つ点）のとき、$\mathcal{PA}_x$ の 0 でない芽 s_x を取ろう。すると x のある近傍 U と $\varphi \in \mathcal{PA}(U)$ が存在して $\varphi_x = s_x$ となる。いま、U の有限な点から成る点列 $\{x_n\}$ で $\varphi_{x_n} \neq 0$, $x_n \to x$ をみたすものが存在する。実際そうでなければ x の近傍で $\varphi \equiv 0$ となり、$\varphi_x \neq 0$ に反する。有限な点に対する結果から φ_{x_n} は $\mathcal{QB}$ でも 0 ではなく、x は φ の $\mathcal{QB}$ にお

ける台に含まれ，ゆえに φ_x は $\mathcal{QB}$ で 0 でないことがわかる。
以上により示された。

命題 3.10 $\mathcal{PA}$ の断面は $\mathcal{QB}$ の断面とみなしたとき至る所ミクロ解析的である。

証明 定義から明らか。 ——

最後に商層 $\mathcal{QB}/\mathcal{PA}$ の脆弱性を示しておこう。

定理 3.11 $\Omega \subset \mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|}$ を開集合とするとき，

$$0 \to \mathcal{PA}(\Omega) \to \mathcal{QB}(\Omega) \to \mathcal{QB}/\mathcal{PA}(\Omega) \to 0 \qquad (3.6)$$

は完全系列である。そして層 $\mathcal{QB}/\mathcal{PA}$ は脆弱である。

証明 次の層の準同型の完全系列

$$0 \to \mathcal{PA} \to \mathcal{QB} \to \mathcal{QB}/\mathcal{PA} \to 0 \qquad (3.7)$$

から長完全系列に移って，

$$0 \to \mathcal{PA}(\Omega) \to \mathcal{QB}(\Omega) \to \mathcal{QB}/\mathcal{PA}(\Omega) \to H^1(\Omega, \mathcal{PA}) \qquad (3.8)$$

も完全系列であるが，系2.2，定理2.3（の $\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}$ 版）および $\mathcal{PA}$ の定義から直ちに

$$H^p(\Omega, \mathcal{PA}) = 0 \qquad (p \geq 1) \qquad (3.9)$$

が成立するので，あわせて(3.6)を得る。つぎに可換図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{QB}(\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|}) & \to & \mathcal{QB}/\mathcal{PA}(\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|}) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{QB}(\Omega) & \to & \mathcal{QB}/\mathcal{PA}(\Omega) & \to & 0 \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array} \qquad (3.10)$$

を考える。各行は(3.6)から完全で第一列は $\mathcal{QB}$ の脆弱性か

ら完全であるので，第二列も全射でなくてはならないことがわかる。すなわち $\mathcal{QB}/\mathcal{PA}$ は脆弱である。

§4　Radon 変換

前§でパラメータ付きFourier超函数の特異スペクトルが一応定義はされたが，このままではまだその性質は十分わからない。たとえば命題3.10 の逆はすぐには証明できない。そこで，やはり 金子 [3] にならって，Radon 変換の方法により特異性の分解を試みる。まず急減少Radon 核の定義から始める。

__定義4.1__　z, ζ を $\mathbb{C}^n$ の変数として，$(z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta)$

$$\begin{aligned}
\Psi(z,\zeta) &= \zeta + i\left(z\sqrt{\zeta^2} - \zeta(z\cdot\zeta)/\sqrt{\zeta^2}\right)\\
\Phi(z,\zeta) &= z\cdot\Psi(z,\zeta)\\
W(z,\zeta) &= \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n}\,\frac{\det(\partial\Psi/\partial\zeta)}{(\Phi(z,\zeta))^n} \qquad (4.1)\\
\underset{\sim}{W}(z,\zeta) &= e^{-z^2}W(z,\zeta)
\end{aligned}$$

と順次定義する。

__補題4.2__　(4.1) の W および $\underset{\sim}{W}$ は，$\zeta=\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ を固定したとき，

$$\mathbb{R}^n + i\{y\xi > (y^2|\xi| - (y\xi)^2/|\xi|)\} \qquad (4.2)$$

なる半空間の開きをもつ無限小楔で整型であり，さらに $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ の複素近傍

$$|y\xi| + (y^2|\xi| - (y\cdot\xi)^2/|\xi|) < \frac{1}{4}\{|x\xi| + 2(x^2|\xi| - (x\cdot\xi)^2/|\xi|)\} \qquad (4.3)$$

まで解析接続される。

<u>証明</u>　金子[3]補題2.3.4を見よ。

<u>**補題4.3**</u>　$\delta>0$に対し、$R>0$を適当に取れば、$|y|<\delta$かつ$|x|>R$のとき不等式(4.3)が成立する。

<u>証明</u>　両辺はξについて斉次一次であり、右辺が$x=tx_0$, $t\to+\infty$とすれば$+\infty$に発散することに注意すれば明らか。

<u>**補題4.4**</u>　補題4.3.のような領域で$\underset{\sim}{W}$はzについて急減少である。

補題4.3－補題4.4を念頭に置いて金子[3]の議論を$\underset{\sim}{W}$に関するものに書き直せば、必要なRadon変換に関する定理が得られる。$\underset{\sim}{W}$の整型である領域は、(4.2)、(4.3)の(ζ変数に関する)近傍であり、柏原の補題により$2n$次元の無限小楔にまで伸びることにも注意しておく。まず、

<u>**補題4.5**</u>　fを$\mathbb{R}^n$上の局所L^∞函数で、$\mathcal{P}^m\mathcal{A}^{n-|m|}$と同様の緩増加評価：

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists L\Subset\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}\quad \sup_{x\in L\cap\mathbb{R}^n}|f(x)e^{-\varepsilon|x|}|<\infty \tag{4.4}$$

をみたし、かつ台が$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$でコンパクトな集合$K$に含まれるとする。いま、$F$を次のように定義する。

$$F(z;\zeta)=\int_{\mathbb{R}^n}f(w)\underset{\sim}{W}(z-w,\zeta)\,dw \tag{4.5}$$

このとき、

(4.2)で定まるzに関する無限小楔の$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{2n-|m|}+i\mathbb{R}^{2n}$における近傍$U_1$

$\{(x,\xi)\,;\,x\in\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}\setminus K,\ \xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\}$の$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{2n-|m|}+i\mathbb{R}^{2n}$にお

ける近傍 U_2
があって、F は $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{2n-|m|}(U_1)$ かつ $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{2n-|m|}(U_2)$ の元となる。

さらに f が C^n 級で、n 階までの導函数がすべて評価(4.4)をみたせば、F は $\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ まで連続に延長され、この延長された F について次の式が成立する。

$$\int_{S^{n-1}} F(x;\xi)d\xi = f(x) \qquad (4.6)$$

証明 まず F が U_1, U_2 で整型であることは、補題4.2、補題4.3 および (4.5) からただちにわかる。特に U_2 については、積分領域を K に限ってよいことを使えばよい。次に緩増加性であるが、それぞれ U_1, U_2 内にコンパクト集合を取り、その上で次のように評価できる:

$$\begin{aligned}|e^{-\varepsilon|z|}F(z;\zeta)| &\leqq \int_K e^{-\varepsilon|z|}|f(w)|\,|\underset{\sim}{W}(z-w,\zeta)|\,dw\\ &\leqq \int_K e^{-\varepsilon|z|}|f(w)|e^{-\varepsilon|z-w|}e^{\varepsilon|z-w|}|\underset{\sim}{W}(z-w,\zeta)|\,dw\\ &\leqq {}^{\exists}C_0\int_K e^{-\varepsilon|z|-\varepsilon|z-w|}|f(w)|\,dw\\ &\leqq C_0\int_K e^{-\varepsilon|w|}|f(w)|\,dw < \infty \qquad (4.7)\end{aligned}$$

さて、実軸へ延長するために、まず

$$(\zeta\cdot D_z)^n\log(\Phi(z,\zeta)) = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{(\Phi(z,\zeta))^n}\zeta^{2n} \qquad (4.8)$$

に注意する。ただし $\zeta\cdot D_z = \zeta_1\frac{\partial}{\partial z_1}+\zeta_2\frac{\partial}{\partial z_2}+\cdots+\zeta_n\frac{\partial}{\partial z_n}$ とする。

$$F(z;\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(z-w)^2}f(w)\frac{(-1)^n(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\det(\partial\psi/\partial\zeta)(z-w,\zeta)}{(\Phi(z-w,\zeta))^n}\,dw$$

$$=\frac{-1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(w)e^{-(z-w)^2}\frac{1}{\zeta^{2n}}\det\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)(z-w,\zeta)\,(\zeta\cdot D_{z-w})^n\left(\log(\Phi(z-w,\zeta))\right)dw$$

$$= \frac{-1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\zeta^{2n}} (\zeta \cdot D_{z-w})^n \left\{ f(w) e^{-(z-w)^2} \det\left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\right)(z-w, \zeta) \right\} \log(\Phi(z-w, \zeta)) dw \tag{4.9}$$

ただし $e^{-(z-w)^2}$ の急減少性を利用して部分積分した。ここで $D_{z-w} f(w) = -D_w f(w)$ に注意すれば，(4.9) の被積分函数は，

$\frac{1}{\zeta^{2n}} \log(\Phi(z-w, \zeta)) \cdot e^{-(z-w)^2}$ に，（f の n 階までの導函数）×（$(z-w)$ のたかだか多項式程度の増大度を持つ函数）の形の函数の有限和を掛けたものになる。これは f に関する仮定から，z が実のところまでこめて緩増加連続函数と急減少可積分函数のたたみ込みとみなせるから，結局 F は実軸まで延長される。

最後に (4.6) 式の証明であるが，適当な mollifier，たとえば $\rho_\varepsilon *$；$\rho_\varepsilon \equiv \frac{1}{(\sqrt{\pi}\varepsilon)^n} \exp(-(\frac{z}{\varepsilon})^2)$ を用いることにより，$f \in \mathcal{P}(\mathbb{D}^n)$ のとき（このとき台はコンパクトでなくなるが，(4.5) は意味をもつ）に示しておけば十分である。

積分を 2^n 個に分けて

$$F_\sigma(z) := \int_{\Gamma_\sigma \cap S^{n-1}} F(z, \xi) d\xi \qquad (z \in \mathbb{R}^n + i\Gamma_\sigma 0)$$

とおくと，

$$F_\sigma(z) = \int_{\Gamma_\sigma \cap S^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(w) \underset{\sim}{W}(z-w, \xi) dw \right) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(w) \left(\int_{\Gamma_\sigma \cap S^{n-1}} \underset{\sim}{W}(z-w, \xi) d\xi \right) dw \tag{4.10}$$

ただし，$\underset{\sim}{W}$ の急減少性から積分の順序交換をした。さて，(4.10) の形にしてみれば，$\underset{\sim}{W}$ は通常の δ 函数の曲面波展開に e^{-z^2} を掛けただけのものだから，

$$\sum_{\sigma} F_{\sigma}(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(w)\cdot\delta(z-w)\,dw = f(w)$$

となることは（$f\in P(\mathbb{D}^n)$については）明らかであろう。

補題4.6 $\mathbb{D}^n\setminus\{0\}$の$\mathbb{D}^n+i\mathbb{R}^n$における近傍$U$があって，$U\cap\mathbb{C}^n\ni z$に対し

$$\int_{S^{n-1}} \underset{\sim}{W}(z,\xi)\,d\xi = 0 \qquad (4.11)$$

証明 積分(4.11)が$K\cap\mathbb{C}^n$（$K\Subset U$）で一様収束することは明らかである。そしてその結果はzの整型函数になるはずであるが、その値は通常のRadon核の場合から明らかに0になる。

定理4.7 Dを$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}$のコンパクト領域で$\partial D$が区分的に滑らかとする。（ただし、$\mathbb{D}^m$の無限遠まで伸びている曲面の滑らかさについては，(1.2)を経由して与えられる自然なふちつきC^∞多様体の構造に関して言うものとする）Bを$\mathbb{R}^n$の凸領域で$a\in B$としよう。管状集合$D+iB$の近傍Uを取るとき，$\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(U)$の元$F$に対して次の公式が成立する。

$$F(z,\zeta) = \int_{D+i\{a\}} F(w)\,\underset{\sim}{W}(z-w,\zeta)\,dw \qquad (4.12)$$

とおけば

$$\int_{S^{n-1}} F(z,\xi)\,d\xi = \begin{cases} F(z), & z\in(\mathrm{Int}(D)+i\{a\})\cap\mathbb{C}^n \\ 0, & z\in(\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}\setminus D)+i\{a\}\cap\mathbb{C}^n \end{cases} \qquad (4.13)$$

そして、$F(z,\zeta)$については，次のことが成立する。

$\mathrm{Im}\,\zeta=0$, $\xi\neq0$, $z\in\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\{y\xi>(y^2|\xi|-(y\xi)^2/|\xi|)\}+i\{a\}$の近傍$U_1$があって，$F(z,\zeta)\in\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{2n-|m|}(U_1)$となる。

さらに、$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}\setminus\partial D$の$\mathbb{D}^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}+i\mathbb{R}^n$における近傍$D'$が

存在して、

$\mathrm{Im}\,\zeta=0$, $\xi\neq 0$ かつ $z\in(D'+i\{a\})\cap((D^m\times\mathbb{R}^{n-|m|}\setminus D)+i\mathbb{R}^n)$ の近傍 U_2,

$\mathrm{Im}\,\zeta=0$, $\xi\neq 0$ かつ $z\in(D'+i\{a\})\cap(D+iB)$ の近傍 U_3

が存在して、$F(z,\zeta)\in\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{2n-|m|}(U_2)$ かつ $F(z,\zeta)\in\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{2n-|m|}(U_3)$.

証明 平行移動により $a=0$ とする。D'としては、(4.3) の原点を ∂D の各点に平行移動したもの全部の共通部分を取ったものを使えばよい。さて、U_1, U_2 での整型性は補題4.5と同様にして証明される。U_3 での整型性は、Poincaréの定理により、積分路を

$$\begin{cases}(w,t)\longmapsto w+itb & 0\le t\le 1,\ w\in\partial D\\ w\longmapsto w+ib & w\in \mathrm{Int}\,(D)\end{cases}\qquad(4.14)$$

ただし $b\in B$ に変形してみればわかる。(金子[3] 定理2.3.7の証明参照) 緩増加評価は (4.7) と同じである。(4.13) の後半は補題4.6からわかる。前半は次のようにしてわかる。まず x を固定し、$C_0^\infty(D)\ni\varphi$ で x の近傍で恒等的に1に等しいものを取り、$F(z,\zeta)$ を次のように分解する。

$$F_1(z,\zeta)=\int_D\varphi(w)F(w)\underset{\sim}{W}(z-w,\zeta)\,dw$$

$$F_2(z,\zeta)=\int_D(1-\varphi(w))F(w)\underset{\sim}{W}(z-w,\zeta)\,dw$$

補題4.5により $\int_{S^{n-1}}F_1(x,\xi)\,d\xi$ は $\varphi(x)F(x)$ に等しく、また補題4.6. により、$\int_{S^{n-1}}F_2(x,\xi)\,d\xi$ は x の近傍で 0 に等しい。以上により定理はすべて示された。 ——

つぎの補題が以下の諸定理の基礎となる。

補題4.8 $D \subset \mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|}$ を区分的に滑らかな境界を持つコンパクト領域とし，$f = F(x+i\Gamma 0)$ を D の近傍で定義されたパラメータ付きFourier超函数とする。このとき D の内部に含まれるコンパクト集合 K に対し，$a \in \Gamma$ を選んでつぎのようにできる。

$$F(z,\zeta) = \int_{D+i\{a\}} F(w) \underset{\sim}{W}(z-w,\zeta)\,dw \qquad (4.15)$$

は $\eta = 0$, $\xi \neq 0$, $z \in K + i\{y\xi > y^2|\xi| - (y\xi)^2/|\xi|\}$ のある近傍 U に対して $\tilde{\mathcal{O}}^m \mathcal{O}^{2n-|m|}(U)$ の元となり，かつ $\xi \notin \Gamma^\circ$ となる ξ の近傍 V に対して，$F \in \tilde{\mathcal{O}}^m \mathcal{O}^{2n-|m|}((K+i\mathbb{R}^n 0) \times V)$；すなわち V からは K の近傍まで解析接続される。そして $\Delta \Subset \Gamma$ とおくとき，

$$F(z,\Delta^\circ) = \int_{\Delta^\circ \cap S^{n-1}} F(z,\xi)\,d\xi \in \tilde{\mathcal{O}}^m \mathcal{O}^{n-|m|}(K+i\Delta 0) \quad (4.16)$$

と置けば，$\tilde{\mathcal{O}}^m \mathcal{O}^{n-|m|}(K+i\Delta 0)$ の元 $F(z)|_{K+i\Delta 0} - F(z,\Delta^\circ)$ はまた $\tilde{\mathcal{O}}^m \mathcal{O}^{n-|m|}(K+i\mathbb{R}^n 0)$ の元まで接続される。

証明 金子[3] 補題3.3.1 を見よ。$\mathbb{D}^m \times \mathbb{R}^{n-|m|} + i\mathbb{R}^n$ の位相は実部と虚部の直積で与えられているので，そこの証明がそのまま通用する。必要な緩増加評価は定理4.7と補題4.4からただちにわかる。

定理4.9 Dを前補題と同様とし，$f = \sum_{j=1}^{N} F_j(x+i\Gamma_j 0)$ を D の近傍で定義されたパラメータ付きFourier超函数とする。

Dの内部の点 x に対し，$(x,\xi) \notin S.S.\,f$ であることは，次と同値：

$a_j \in \Gamma_j$ を原点に十分近く選んで

$$F(z,\zeta) = \sum_j \int_{D+i\{a_j\}} F_j(w) \underset{\sim}{W}(z-w,\zeta)\,dw \qquad (4.17)$$

が点 (x,ξ) で $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{2n-|m|}$ の芽を定めるようにできる。

証明　金子[3] 定理3.3.2 の証明と全く同様である。

補題4.10　$f(x)\in Q^mB^{n-|m|}(\Omega)$ は $f(x)=F(x+i\Gamma 0)$ と表示されているとする。このとき f が Ω で 0 (resp. $f\in PA$) であることは $F=0$ (resp. $F\in\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(\Omega+i\mathbb{R}^n 0)$) と同値である。

証明　$f\in PA$ ならば $S.S.f=\phi$ だから前定理により

$$F(z,\xi)=\int_{D+i\{a\}}F(w)W(z-w,\xi)\,dw \tag{4.18}$$

は $D\Subset\Omega$ なる任意の D について $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{2n-|m|}(D\times S^{n-1})$ の元を定める。ゆえにこれを ξ で S^{n-1} 上積分して得られる F は $\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(D)$ の元になる。D は任意ゆえ、$F\in\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(\Omega+i\mathbb{R}^n 0)$ が示された。

特に $f=0$ のとき、$f\in PA$ ゆえ、$F(x)\in PA$ でもあり、QB の元として $F(x)=0$。ところが定理3.9よりこのとき $F=0$ である。

以上の逆は明らかである。

定理4.11　Γ を開凸錐とする。$f\in QB(\Omega)$ が $S.S.f\subset\Omega\times\Gamma^\circ$ をみたせば、$F(z)\in\tilde{\mathcal{O}}\mathcal{O}(\Omega+i\Gamma 0)$ で $f=F(x+i\Gamma 0)$ となるものが存在する。とくに $S.S.f=\phi\Rightarrow f\in PA$.

証明　金子[3] 定理3.1.7の証明と同様である。

系4.12 (Epstein型 楔の刃定理)　$BQ(\Omega)$ の元として $F_1(x+i\Gamma_1 0)=F_2(x+i\Gamma_2 0)$ ならば、これらはある $F(x+i(\Gamma_1+\Gamma_2)0)$ と等しくなり、かつ F_1, F_2 は F の制限になる。特に $\Gamma_1^\circ\cap\Gamma_2^\circ=\phi$ ならば、これらは $PA(\Omega)$ の元となる。

証明 金子[3] 系3.1.11の証明と同様である。

定理4.13（特異性分解定理） $f \in QB(\Omega)$, $S.S.f \subset \Omega \times \mathrm{Int}(\Gamma_1^\circ \cup \cdots \cup \Gamma_N^\circ)$ とする。また $K \Subset \Omega$ を取る。このとき $K \subset \Omega' \subset \Omega$ なる Ω' および $F_j(z) \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega' + i\Gamma_j 0)$ で

$$f|_{\Omega'} = \sum_j F_j(x + i\Gamma_j 0) \qquad (4.19)$$

かつ $S.S.f \cap \{x\} \times \Gamma_j^\circ = \phi$ なる点 x では F_j は PA の芽を定めるようなものが存在する。

証明 金子[3] 定理3.2.3の証明と同様である。

定理4.14（Martineau型局所的楔の刃定理の弱形）
コンパクト集合 $K \subset D^m \times R^{n-|m|}$ の近傍で

$$\sum_{j=1}^N F_j(x + i\Gamma_j 0) = 0 \qquad (4.20)$$

が QB の切断として成立しているとする。このとき任意の $\Delta_{jk} \Subset \Gamma_j + \Gamma_k$ に対し、$H_{jk}(z) \in \tilde{\mathcal{O}}(K + i\Delta_{jk}0)$, $j, k = 1, \cdots, N$ かつ $H_{kj}(z) = -H_{jk}(z)$ を満たすものを選んで

$$F_j(z) = \sum_{k=1}^N H_{jk}(z) \qquad j = 1, \cdots, N \qquad (4.21)$$

が共通の定義域の上で成立するようにできる。さらにコンパクト集合 $L \subset K$ を固定するとき、F_j あるいは F_k が L の各点で PA の芽を定めるとき、H_{jk} も L の各点で PA の芽を定めるようになる選び方が存在する。

証明 金子[3] 補題3.2.7と同様である。

§5 若干の例

§4までで一応かなり自由にパラメータ付きFourier超函数を取り扱えるようになった。以下では今までの理論を使って証明できる二三の例をあげる。

例5.1 定理4.13, 定理4.14から, 通常の超函数の場合と同様, 積の定義可能性についてつぎのことがわかる。

$f, g \in \mathcal{Q}\mathcal{B}(\Omega)$ が $S.S.f \cap (S.S\,g)^a = \phi$ をみたせば積 $f \cdot g$ が定義されて $\mathcal{Q}\mathcal{B}(\Omega)$ の元となる。この定義は局所的である。台や特異スペクトルの相互関係についても通常と同様である。

例5.2 $f(x,t) \in \mathcal{Q}^m \mathcal{B}^{n-|m|}(\Omega)$ が

$$S.S.f \cap (\{(x^0, t^0)\} \times (\{0\} \times S^{n-|m|-1})) = \phi \qquad (5.1)$$

をみたすとき, fは (x^0, t^0) でtを実解析パラメータとして含むという。このとき制限 $f|_{t=t_0}$ は点 x^0 で $\mathcal{Q}^m$ の芽を定める。 逆に$\mathcal{Q}^m$の部分の変数について, あるいはその一部について制限したりすることもできる。ただし§0に述べたように, 無限遠点では変数の直積型構造が崩れる場合があるので注意を要する。——

さて, §2では双対性を用いて部分Fourier変換しか定義しなかったが, それは双対を与える内積がexplicitに書けていなかったので, たとえ定義してみても具体性に欠けると思われたからであった。以下この問題について少し考える。まず,

補題 5.3 $\mathcal{Q}^n(\mathbb{D}^n)$ と $\mathcal{P}_*^n(\mathbb{D}^n)$ の元の内積は、$\mathcal{Q}^n(\mathbb{D}^n)$ の元を命題 3.6. のように表現するとき、

$$\mathcal{Q}^n(\mathbb{D}^n) \ni f = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma\, F_\sigma(x + i\Gamma_\sigma 0) \quad ; \quad \mathcal{P}_*^n(\mathbb{D}^n) \ni \varphi \tag{5.2}$$

に対して、次式で与えられる。

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \int_{y=y_\sigma} \varphi(x+iy) F_\sigma(x+iy)\,dx, \quad y_\sigma \in \Gamma_\sigma \tag{5.3}$$

証明 Kawai [6] 定理 3.2.9 からただちにわかる。

補題 5.4 $\mathcal{P}_*^m(\mathbb{D}^m) \cong \mathcal{P}_*^{|m|}(\mathbb{D}^{|m|})$ (5.4)

証明 $X_j = \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{|m|} + i\{|y| < \frac{1}{j}\})\ ;\ \sup |f(z) e^{-\frac{1}{j}|z|}| < \infty \}$

と置けば、両辺とも $\lim_j \operatorname{ind} X_j$ で表現される。

定理 5.5 $\mathcal{Q}^m(\mathbb{D}^m) \ni \sum_j F_j(x + i\Gamma_j 0)$ と $\mathcal{P}_*^m(\mathbb{D}^m) \ni \varphi$ の内積は次式で与えられる。

$$\sum_j \int_{y=y_j} F_j(x+iy)\varphi(x+iy)\,dx, \quad y_j \in \Gamma_j \tag{5.5}$$

証明 まず、補題 5.4 と同様にして、$\tilde{\mathcal{O}}^m(\mathbb{D}^m + i\Gamma 0) = \tilde{\mathcal{O}}^{|m|}(\mathbb{D}^{|m|} + i\Gamma 0)$ がわかるので、$\mathcal{Q}^m(\mathbb{D}^m)$ と $\mathcal{Q}^{|m|}(\mathbb{D}^{|m|})$ は(局所的性質を考えなければ)同じものとみなしてよい。よって以下では $m = (n)$, $n \in \mathbb{N}$ の場合を考える。さて (5.5) が境界値表示や十分小さい y_j の取り方によらずに定まり、$\mathcal{Q}^m(\mathbb{D}^m)$ と $\mathcal{P}_*^m(\mathbb{D}^m)$ のひとつの双対を与えていることは明らかであろう。ところが補題 5.3 により、$m = (n)$ のときは、まさにこれが規準的な双対になる。

定理 5.6 $\mathcal{Q}^m\mathcal{B}^{n-|m|}[\mathbb{D}^m \times K] \ni f$ と、$\mathcal{P}_*^m\mathcal{A}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m \times K) \ni \varphi$ との内積は次のように与えられる。

f を定理4.13により次のように表現する：

$f=\sum_j F_j(x+i\Gamma_j 0)$; $F_j\in\tilde{\mathcal{O}}^m\mathcal{O}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m\times\Omega+i\Gamma_j 0)$

$K\Subset\Omega$ かつ $\mathbb{D}^m\times K$ の外では F_j は $\mathcal{P}\mathcal{A}$ の芽を定める。

このとき，$K\Subset\Omega'\Subset\Omega$ を取って，

$$\langle f,\varphi\rangle=\sum_j\int_{z=x+iy(x),\ x\in\mathbb{D}^m\times\bar{\Omega}'}F_j(z)\varphi(z)\,dz \qquad (5.6)$$

ここに，積分路は，$x\in\mathbb{D}^m\times\mathrm{Int}(\Omega')$ のとき $y(x)\in\Gamma_j$，$x\in\mathbb{D}^m\times\partial\Omega'$ のとき $y(x)=0$ となるものとする。

証明 まず $\varphi\in\mathcal{P}_*^{(m,n-|m|)}(\mathbb{D}^{(m,n-|m|)})$ の場合を考えよう。$f\in\mathcal{Q}^{(m,n-|m|)}(\mathbb{D}^{(m,n-|m|)})$ でもあるから，定理4.13により，$f=\sum_j F_j(x+i\Gamma_j 0)$; $F_j\in\tilde{\mathcal{O}}^{(m,n-|m|)}(\mathbb{D}^{(m,n-|m|)}+i\Gamma_j 0)$ かつ $\mathbb{D}^m\times K$ の外では F_j は $\mathcal{P}^{(m,n-|m|)}$ の芽を定める，というようにできる。このとき定理5.5により f と φ の内積は(5.5)で与えられるが，ここで K の外のところの積分路を実軸上に変形することができ，そこで $\sum F_j=0$ となっているはずであるから，結局(5.6)のような表現を得る。このような f を固定すると，φ を $\mathcal{P}_*^m\mathcal{A}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m\times K)$ の一般の元にしても(5.6)はひとつの双対を与えていることがわかる。ところが系2.7により $\mathcal{P}_*^{(m,n-|m|)}(\mathbb{D}^{(m,n-|m|)})$ は $\mathcal{P}_*^m\mathcal{A}^{n-|m|}(\mathbb{D}^m\times K)$ で稠密で，しかもそこでは上の議論により規準的な内積が与えられているのだから(5.6)は一般の φ についても成立する。最後に f について同様な議論をくりかえせば，定理5.6にいうすべての場合について(5.6)が規準的な内

積を与えることがわかる。

注意5.7 双対性を用いて，$\mathcal{PA}(\Omega)$と$\mathcal{QB}(\Omega)$の元の積，$\mathcal{QB}$における微分を定義することができる。(5.6)から明らかなように，これらはちょうど，定義函数に$\mathcal{PA}(\Omega)$の元を掛け，あるいは定義函数を微分することに相当する。これらの演算は局所的であり，はじめから定義函数を用いて定義しても良かったのである。

文　献

[1] Ito, Y., Fourier hyperfunctions of general type, preprint.

[2] 金子晃，コホモロジー的境界値に対する位相的考察，数理解析研究所講究録 227 (1975), 12-22.

[3] ──，超函数入門　上，東大出版会，1980.

[4] ──，超函数入門　下，東大出版会，1982.

[5] ──，大域的実解析解に対する河合氏の存在定理の非有界領域への拡張，数理解析研究所講究録 508 (1983), 67-91.

[6] Kawai, T., On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA 17 (1970), 467-517.

[7] Nagamachi, S., The Theory of Vector Valued Fourier Hyper-

functions of Mixed Type I, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 17 (1981), 25-63.

[8] Saburi, Y., Vanishing Theorems of Cohomology Groups with Values in the Sheaves $\mathcal{O}_{inc,\varphi}$ and $\mathcal{O}_{dec}$, Tokyo J. Math. 5 (1982), 225-248.

[9] ——, Fundamental Properties of Modified Fourier Hyperfunctions, to appear.

[10] 佐藤幹夫, 超函数の理論, 数学 10 (1958), 1-27.