数理解析研究所講究録
第558巻 1985年 127-140

Lerch's theorem for analytic functionals with unbounded carrier

吉野邦生(Kunio Yoshino)
上智大理工(Sophia University)

§0. 問題の背景

有界閉区間 $[0, T]$ 上の連続関数 $f(t)$ が、次の条件

$$(*) \quad \int_0^T f(t) e^{nt} dt = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満たす時、$f(t) \equiv 0$ となる事は、例えば、古典的な Weierstrass の多項式近似定理から判る。ここで、上の条件(*)を次の条件(☆)

$$(☆) \quad \left| \int_0^T f(t) e^{nt} dt \right| \leqq M \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

(M は、定数)

に変えた時、$f(t) \equiv 0$ は、結論できるであろうか？

答は、yes である。この事実は、"Lerch の定理" として知られていて、演算子法の出発点である。([4])

Mikusiński の演算子法の教科書 [4] では、非常に tricky な証明が与えられている。ここでは、hyperfunction

的な証明を与えてみる。先ず，

$$G_f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^T \frac{f(t)}{1-we^t}\,dt$$

という函数を考える。$G_f(w)$は次の性質を持つ。

(i) $G_f(w) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus[e^{-T},1])$

(ii) $G_f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n \frac{1}{2\pi i}\int_0^T f(t)e^{nt}\,dt$

$(|w|<e^{-T})$

ここで，条件(＊)を用いると，

(ii)の巾級数展開は，実は，$|w|<1$で成立していることが判る。この事と(i)を考え合わせて，$G_f(w)\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\{1\})$となる。

$G_f(w)$の定義式において，$s=e^{-t}$と変数変換をすると，

$$G_f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{e^{-T}}^{1} \frac{f(-\log s)}{s-w}\,ds$$

となる。従がって，$G_f(w)$は，$f(-\log s)$の"標準定義函数"である事により，境界値を取ると，

$$f(-\log u) = G_f(u+i0) - G_f(u-i0)$$
$$= 0 \qquad (u \neq 1)$$

故に，$f(t)=0$ on $[0,T]$が，fの連続性から判る。//

以上の様ないわゆる Moment Problem の一意性は、非有界区間では、一般には、成り立たない。例えば、Stieltjes が、Hermite にあてた手紙の中で言っている

$$\int_0^\infty e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})\, x^n\, dx = 0 \qquad (n=0,1,2\cdots)$$

という例がある。（一松信：解析学序説．下巻）

この小文では、非有界区間の場合も含めた Moment Problem の一意性、更に、Lerch の定理を論ずる。主な道具は、非有界な台を持つ解析汎函数、それの Fourier-Laplace (Borel) 変換、Avanissian-Gay 変換、強漸近展開である。以下、次のプログラムに沿って進行していく。

§1. 関数空間 $Q(L:b')$ の定義とその双対空間 $Q'(L:b')$

§2. 解析汎函数 T の Fourier-Laplace 変換、Avanissian-Gay 変換、

§3. 整函数の逆 Mellin 変換とその強漸近展開

§4. 主要結果

§1. 関数空間 $Q(L:k')$ の定義とその双対空間 $Q'(L:k')$

Lを次の様な複素平面上の帯状(半)領域とする。

$$L=[a,\infty)+i[-k,k] \qquad a\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{R},\ k>0.$$

関数空間 $Q(L:k')$ を次の様に定義する。

$$Q(L:k') = \lim_{\varepsilon>0,\ \varepsilon'>0} \mathrm{ind}\ Q_b(L_\varepsilon : k'+\varepsilon')$$

但し、
$$Q_b(L_\varepsilon : k'+\varepsilon') = \left\{ f(\zeta)\in\mathcal{O}(\mathring{L}_\varepsilon)\cap C(L_\varepsilon) : \sup_{\zeta\in L_\varepsilon}\left|e^{(k'+\varepsilon')\zeta} f(\zeta)\right| < +\infty \right\}$$

ここで、L_ε は L の ε-近傍を表わしている。つまり、

$$L_\varepsilon = [a-\varepsilon,\infty)+i[-k-\varepsilon,\ k+\varepsilon].$$

又、$\mathcal{O}(\mathring{L}_\varepsilon)$, $C(L_\varepsilon)$ は、それぞれ $\mathring{L}_\varepsilon$ 上の正則関数の空間、L_ε 上の連続関数の空間を表わす。
$Q(L:k')$ の双対空間を $Q'(L:k')$ で表わし、$Q'(L:k')$ の元を L を支台に持つタイプ k' の

解析汎函数と呼ぶ。

§2. 解析汎函数 T の Fourier-Laplace, Avanissian-Gay 変換

$T \in Q'(L; b')$ とする。

$$\tilde{T}(z) = \langle T_\zeta, e^{\zeta z} \rangle$$

とおき、T の Fourier-Laplace (Borel) 変換と呼ぶ。

$\mathrm{Re}\, z < -b'$ の条件の下に一般には定義できる。

次の事が知られている。($z = x + iy$ とする。)

「$\forall \varepsilon > 0$, $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists C_{\varepsilon, \varepsilon'} > 0$,

(1) $$|\tilde{T}(z)| \leqq C_{\varepsilon, \varepsilon'} e^{(a-\varepsilon)x + (b+\varepsilon)|y|}$$

$(\mathrm{Re}\, z \leqq -b' - \varepsilon')$」

又、Fourier-Laplace 変換は、$Q'(L; b')$ と上の評価を満たす整型函数 ($\mathrm{Re}\, z < -b'$ 上の) の空間 $\mathrm{Exp}((-\infty, -b') + i\mathbb{R}; L)$ との間の線型位相同型を与える。([7] を参照)

次に、Tの Avanissian-Gay 変換 $G_T(w)$ を

$$G_T(w) = \langle T_\zeta, \frac{1}{1-we^\zeta} \rangle$$

と定義する。次の性質を持つことが知られている。
([1], [7] を参照)

(2) $G_T(w) \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \exp(-L))$

(3) $\forall \varepsilon > 0, \forall \varepsilon' > 0, \exists C_{\varepsilon,\varepsilon'} > 0,$

$$|G_T(w)| \leqq C_{\varepsilon,\varepsilon'} |w|^{-k+\varepsilon'} \quad (k+\varepsilon \leqq |\arg w| \leqq \pi)$$

(4) $$G_T(w) = -\sum_{n=1}^{\infty} \hat{T}(-n)\, w^{-n} \qquad (|w| > e^{-a})$$

(5) (反転公式)

$$\langle T, h \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L_\varepsilon} G_T(e^{-\zeta})\, h(\zeta)\, d\zeta,$$

$h \in Q(L ; k')$. (εは、hに依存する)

(6) 特に、(4)より、(或いは、定義式より)

$$\lim_{|w| \to \infty} G_T(w) = 0$$

Avanissian - Gay 変換は、$Q'(L;k')$ と上記の性質 (2), (3), (6) を満たす $\mathbb{C}\setminus\exp(-L)$ 上の正則函数の空間 $\mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus\exp(-L);k')$ の間の線型位相同型を与える。以上の事をまとめると、

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Exp}((-\infty,-k')+i\mathbb{R};L) \arrow[dr, dashed] & \\
Q'(L;k') \arrow[u, "\begin{array}{c}\text{Fourier}\\ \text{-Laplace}\\ \text{変換}\end{array}"] \arrow[r, "\text{Avanissian}", "\text{Gay 変換}"'] & \mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus\exp(-L);k')
\end{tikzcd}
$$

となる。我々の次の目標は、$\mathrm{Exp}((-\infty,-k')+i\mathbb{R};L) \dashrightarrow \mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus\exp(-L);k')$ の変換で、上の図式を可換にするものを具体的に構成する事である。

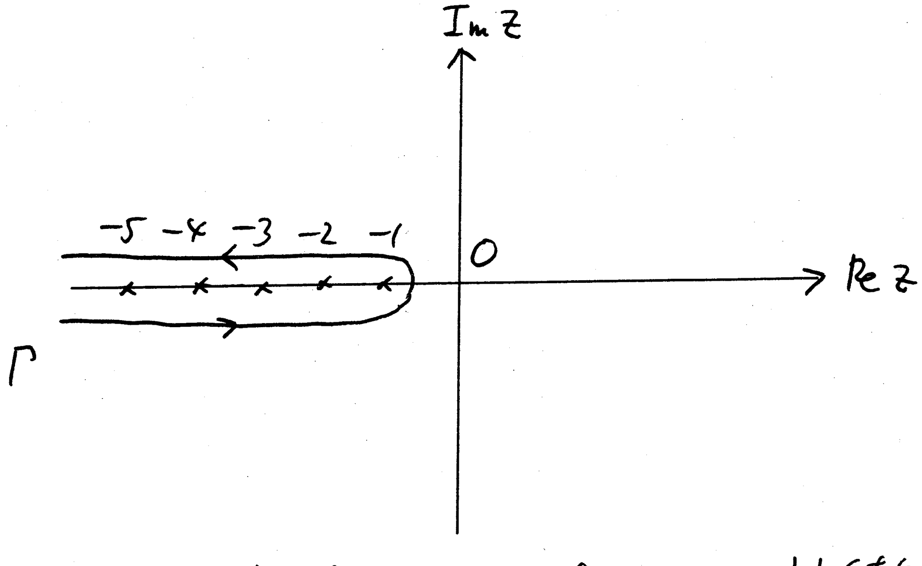
§3. 整函数の逆 Mellin 変換とその漸近展開

$F(z)\in\mathrm{Exp}((-\infty,-k')+i\mathbb{R};L)$ とする。

$F(z)$ の逆 Mellin 変換 $M^{-1}(F)(\omega)$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{M}^{-1}(F)(\omega) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(z)}{\sin(\pi z)}(-\omega)^z\,dz & (\varepsilon<|\arg\omega|<\pi) \\[2ex] \dfrac{-1}{2i}\displaystyle\int_{\Gamma} \frac{F(z)}{\sin(\pi z)}(-\omega)^z\,dz, & (|\omega|>e^{a}) \end{cases}$$

積分路Γは、次の様である。



$F(z)$の満たす評価式(1)を考えに入れて被積分函数の評価を実行する事により、$\mathcal{M}^{-1}(F)(\omega)\in\mathcal{O}_0(\mathbb{C}\setminus\exp(-L))$が判る。（一価性は、Cauchyの積分定理から判る。）

又、$F(z)=\hat{T}(z)$の時には留数計算を実行する事で、(4)により、$\mathcal{M}^{-1}(F)(\omega)=G_T(\omega)$が判る。つまり、我々は、次の可換図式を得たのである。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Exp}((-\infty, -b') + i\mathbb{R} : L) \arrow[drr, "\text{逆 Mellin 変換}"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
Q'(L : b') \arrow[u, "\text{Fourier-Laplace 変換}"] \arrow[rr, "\text{Avanissian}", "\text{Gay 変換}"'] & & \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus \exp(-L) : b')
\end{tikzcd}$$

さて、$\mathrm{Exp}((-\infty, -b') + i\mathbb{R} : L)$ の元のうちで次の性質を持つものを考える。$\exists \lambda < -1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists C_\varepsilon > 0$,

$$(7) \quad |F(z)| \leq \begin{cases} C_\varepsilon e^{(a-\varepsilon)x + (b+\varepsilon)|y|} & (x \leq \lambda) \\ C_\varepsilon e^{x \log|x| + b|y| + \varepsilon|z|} & (x \geq \lambda) \end{cases}$$

この性質(7)を持つ $F(z)$ の逆 Mellin 変換 $M^{-1}(F)(w)$ は、扇形領域 $b < |\arg w| \leq \pi$ で次の様な強漸近展開を持つ事が判る。

$$M^{-1}(F)(w) \sim \sum_{n=0}^{\infty} F(n)\, w^n$$

精確に言って、定数 $C > 0$, μ $(0 < \mu < 1)$ が存在して、

$$\left| M^{-1}(F)(w) - \sum_{n=0}^{N} F(n)\, w^n \right| \leq C e^{(N+1)} (N+1)!\, |w|^{N+\mu}$$

が $b + \varepsilon \leq |\arg w| \leq \pi$ で成立する。

この強漸近展開の導出は、先ず、定義（$\mathcal{M}^{-1}(F)(\omega)$の）から

$$\mathcal{M}^{-1}(F)(\omega) = \frac{-1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(z)}{\sin(\pi z)}(-\omega)^{z}\,dz$$

$$\left(\frac{\pi}{2}+\varepsilon \leqq |\arg\omega| \leqq \pi\right)$$

積分路 $[c-i\infty, c+i\infty]$ を $[N+\mu-i\infty, N+\mu+i\infty]$ に移し留数計算を実行すればよい。勿論、積分路を変更する際に、(7)の評価を用いる事は言うまでもない。
最後に、Stirlingの公式を用いて、望む強漸近展開を得る。

さて、強漸近展開の有用なのは、この漸近展開では、展開係数がもしも全て零であるとOriginal関数が零と結論できる点にある。（通常の漸近展開では、こうはいかない。例えば、$e^{\frac{1}{\omega}} \sim 0$.）
（詳しくは、[6]を参照。多変数の場合については、[3]、[8]を参照。）以下の議論では、これがkey pointである。
（註）最近、ソビエトのKubyshin [2] が筆者と同じ強漸近展開を得ている事を知った。彼は、場の理論への応用を試みている。

§4. 主要な結果

定理1. $T \in Q'(L : k')$, $k' < 1$, $0 \leqq k < \pi/2$ と仮定する。更に、T の Fourier–Laplace 変換 $\hat{T}(z)$ は、次の評価を持つとする。

(8) $\hat{T}(z)$ は、整函数

(9) ${}^{\exists}\lambda < -k'$, ${}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}C_\varepsilon > 0$,

$$|\hat{T}(z)| \leqq C_{\varepsilon,\lambda} e^{x \log|x| + k|y| + \varepsilon|z|} \qquad (x \geqq \lambda)$$

(10) $$\varlimsup_{n\to\infty} |\hat{T}(n)|^{1/n} < e^{a}$$

この時、$T \equiv 0$。（又、もし、(10) で等号が成立していると T の支台は、$[a-ik,\ a+ik]$ に入る。）

系（Lerch の定理の拡張） $f(t) \in C[a, \infty)$

(11) $$|f(t)| \leq C e^{-\lambda e^{t}} \qquad (t \geq a)$$

(12) $$\varlimsup_{n\to\infty} \left| \int_a^\infty f(t) e^{nt}\, dt \right|^{1/n} \leqq e^{a}$$

この時、$f(t) \equiv 0$ on $[a, \infty)$

（定理1の証明の概略）

TのAvanissian-Gay変換 $G_T(w)$ を考える。

先ず，(2)により，$G_T(w)\in\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\exp(-L))$

又，条件(10)により，$G_T(w)=M^{-1}(F)(w)$ の扇形領域

$t<|\arg w|\le\pi$ における強漸近展開 $G_T(w)\sim$

$\sum_{n=0}^{\infty}\hat{T}(n)w^n$ は，Taylor展開（収束径でより大の）

になっている。（実はここで，仮定 $0\le t<\pi/2$ を用いている。）

故に，$G_T(w)$ は，全平面 $\mathbb{C}$ で正則となり，ここで，

$G_T(w)$ の性質(6)を考えに入れて，Liouvilleの定

理を用いて，$G_T(w)=0$ となる。G_T は，勿論

単射であるので，$T\equiv0$ が，結論される。//

定理1において，条件 $0\le t<\pi/2$ は，crucialである。

例えば $Q'(L;t')$ の具体的例として，次の様なも

のを考える。

$h(\zeta)\in Q(L;t')$ とする。但し，$L=[a,\infty)+i[-\pi/2,\pi/2]$

$$\langle T, h \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial L_\varepsilon} e^{e^\zeta} h(\zeta) d\zeta$$

この時，Γ-函数のHankel積分表示式を利用すると，

$$\hat{T}(z) = \frac{-1}{\Gamma(1-z)} \qquad (\Gamma:\text{ガンマ函数})\text{となる。}$$

$$\hat{T}(n) = \frac{-1}{\Gamma(1-n)} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

しかし，$T \neq 0$!!

〔3〕，〔7〕，〔8〕の結果を組合せる事により，定理1は，高次元の場合に拡張する事ができる。或いは〔6〕の中で使われている古典的なCarlsonの方法そのままでも高次元に拡張できる事が，最近判った。

以上の他にも，幾つかの応用例があるが，それについては〔10〕を参照。整函数の一意性定理の本文と異なる証明，又，数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を与えて，$F(n) = a_n$ となる補間関数の存在のための条件については，〔5〕で論じられている。
多変数の解析汎函数（コンパクト台）のLerchの定理については，〔9〕を参照。

References

[1] V. Avanissian and R.Gay : Sur une transformations des Fonctionnelles analytiques et ses applications aux fonctions entières de plusieurs variables, Bull. Soc. Math.France, 103 1975, 341-384

[2] Yu. A. Kubyshin : Sommerfeld-Watson summation of perturbation series, Theoretical and Mathematical Physics, Vol 58,No.1 (1984) 91-96.(English translation)

[3] H. Majima : Analogous of Cartan's decomposition theorem in asymptotic analysis, Funk. Ekvac. 26(1983)

[4] J. Mikusiński : Operational Calculus, Pergamon Press, London (1958)

[5] Gérard Rauzy : Les zeros entiers des fonctions entières de type exponentiel, Seminarie de Theorie des Nombres, 1976-1977 expose no.6. Universite de Bordeaux I.

[6] M. Reed and B. Simon : Method of Modern Mathematical Physics Vol. 4, Academic Press, New York (1978).

[7] P. Sargos and M. Morimoto : Transformations des fonctionnelles analytiques à porteurs non-compacts, Tokyo J. Math. 4 (1981) 457-492.

[8] T. Yagami : Master thesis, at the University of Tokyo, (1983)

[9] K. Yoshino : Lerch's theorem for analytic functionals, Proc. Japan Acad. Vol 58, Ser A, 9(1982) 395-397.

[10] K. Yoshino : Lerch's theorem for analytic functionals with non-compact carrier and its applications to entire functions, Complex Variables, Vol 2, (1984) 303-318.