数理解析研究所講究録
第558巻 1985年 170-202

自己双対Einstein方程式について

埼玉大理　高崎金久 (Takasaki, Kanehisa)

1. 序

4次元Riemann幾何におけるRiemann曲率形式のHodge *作用素に関する自己双対性の方程式 $*R = R$ を自己双対Einstein方程式(SDE)と呼ぶことにする．SDEからは本来の意味のEinstein方程式 $R_{ij} = 0$ が従うが逆は正しくない．いいかえればSDEを考えることはEinstein方程式の解の一部を考えることになる．このことは自己双対Yang-Mills方程式(SDYM)と本来のYang-Mills方程式の間の関係に似ているが，実は単に似ているのみならず，SDEとSDYMはともにtwistor理論の考え方を適用できるという共通の特徴をもつ．このことが本来のEinstein方程式やYang-Mills方程式の場合にはない大きな手掛かりとなって，SDYMに関しては80年前後に大きな成果がもたらされ[1]，またSDEに対してPenroseに始まる様々な研究が行われてきた[2-10]．とはいえSDYMに比べるとSDEの研究

はまだ余り進んでいない．それはひとつにはSDYMの場合にはある与えられた3次元多様体（twistor空間）上のvector束を論じるという，ある意味で線型の問題に議論が帰着するのに対して，SDEの場合には曲がった対象であるtwistor空間自体を論じなければならないからである．しかしそれゆえにこそSDYMとはまた違った面白さがあるともいえる．

以下ではSDEを非線型可積分系（完全積分可能系）の観点から扱ってみようと思う．非線型可積分系として知られているのは，KdV方程式，KP方程式，sine-Gordon方程式，などいわゆるsolitonを記述するものが大部分で，他にEinstein方程式を定常かつ軸対称という条件下で考えたもの（これは独立変数2個の方程式であり，SDEとは無関係）も含まれる．これらとSDEが同じ観点から論じられるというのはかなり意表を突く見解であろうが，全く想像を絶するというほどのことではなく，十分に予想されることである．例えばSDYMは非線型可積分系の一種とみなされるが，これは本質的にtwistor構造の存在に依って説明されることであり（[1,11]およびその引用文献参照），従って同じようにtwistor構造と密接な関連をもつSDEが非線型可積分系の観点から扱えることを期待するのは自然である．実際Boyer, Plebanski [12]はそのような見

方から twistor 理論に基くこれまでのSDEの取扱いを見直すことを試みている．彼らはSDEにおける無限個の保存則の記述及びこの保存量を用いたPenrose[2]の結果の再構成を専ら議論の中心に置いているが，その議論の副産物として指摘したある種の無限次元群$\mathcal{C}$の存在の方が我々にとってはより示唆的であろう．実際，彼らは$\mathcal{C}$を用いてSDEの解の重ね合わせを定義したり，$\mathcal{C}$のLie環がKac-Moody Lie環と似た構造をもつことを示したりしているが，これは従来の非線型可積分系に内在する無限次元群と共通する特徴である．ただ，Boyer, Plebanskiの$\mathcal{C}$に対する議論は表面的なもので，従来の非線型可積分系における無限次元群やそのLie環に関連した研究（Riemann-Hilbert問題，余随伴軌道の方法，Grassmann多様体とて函数の理論etc [13-15]）の水準には程遠い．本文ではそのような方向に少しでも実質的な議論を進展させることをめざしたい．

目　次

2．SDEの定義

まず最初に一言注意しておきたいが，SDEの研究では方程式を複素領域で考えることが多い．以下でもこの立場をとる．これが意味するところは，計量ds^2を実多様体の接束上の2次形式で与える代わりに複素多様体の正則接束上の複素2次形式でおきかえよ，ということであり，局所座標を使って考えるならば

$$ds^2=\sum_{\mu\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\,dz^\mu dz^\nu,\quad g_{\mu\nu}(z)=g_{\nu\mu}(z)\ \ (z\text{の正則函数}) \qquad (1)$$

という複素2次形式の成分$g_{\mu\nu}$に対して実Riemann多様体と同じ形でEinstein方程式やSDEを定義し，それを複素変数$z=(z^\mu)$に関する微分方程式として考察せよ，ということである．このような複素化されたds^2に対しても計量接続の接続係数$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$，曲率tensor $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$，Ricci tensor $R_{\mu\nu}$，Hodge$*$作用素などは同様に定義される．またtensor添字の上げ下げを$g_{\mu\nu}$とそれを並べた行列$(g_{\mu\nu})$の逆行列の成分$g^{\mu\nu}$（$\sum g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu}=\delta^\nu_\mu$，$\sum g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}=\delta^\mu_\nu$）を用いて行うことも同様である．さらに，本文では局所的考察のみに議論を限定する．

4次元においてはHodge$*$作用素は2次微分形式を2次微

分形式にうつし，かつ $*^2=\mathrm{id}$ をみたすので2次微分形式のなす vector 空間 Ω^2 は $*$ の固有空間に分解する．

$$\Omega^2=\{\omega;\ *\omega=\omega\}\oplus\{\omega;\ *\omega=-\omega\} \qquad (2)$$

$*\omega=\omega$ である ω を自己双対的，$*\omega=-\omega$ である ω を反自己双対的という．SDE は曲率 tensor の反対称添字に関してつくった微分形式の自己双対性を表す方程式である．

$$\text{SDE}: \quad *\sum R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\,dz^{\mu}\wedge dz^{\nu}=\sum R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\,dz^{\mu}\wedge dz^{\nu} \qquad (3)$$

SDE からは Einstein 方程式

$$\text{Einstein}: \quad R_{\mu\nu}\ \left(=\sum R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha}\right)=0 \qquad (4)$$

が自動的に従うが，逆は成立しない．（詳しくは [16] 参照.）

3. Plebanski の方程式

Plebanski [17] は SDE をより判り易い形に書き直した．これは twistor による議論を理解するにも便利な記述形式であるので，以下それについて簡単に説明しておく．

Plebanski の議論は ds^2 を次の形に書き直すことから出発する．

$$ds^2=e^1e^2+e^3e^4 \quad =-\det\begin{pmatrix} e^4 & e^2 \\ e^1 & -e^3 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

ここで e^1, e^2, e^3, e^4 は１次微分形式であり（$e^a=\sum e^a{}_\mu dz^\mu$），(5)右辺は対称微分形式の意味で解釈する．$e^1,\cdots,e^4$は物理ではtetradあるいはVierbeinと呼ばれているものだが，このようなものは(1)が非退化である限りつくれる．実際，ds^2に関して正規直交基底をなすvector場をえらびそれらにdualな１次微分形式$\omega^1,\cdots,\omega^4$をとれば

$$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+(\omega^3)^2+(\omega^4)^2$$

となり，さらにこれらに対して

$$e^1=\omega^1+i\omega^2,\quad e^2=\omega^1-i\omega^2,\quad e^3=\omega^3+i\omega^4,\quad e^4=\omega^3-i\omega^4$$

と定義すれば(5)の表示を得る．ここで複素係数１次結合が現れることが話をはじめから複素化しておかねばならない理由のひとつである．

ds^2を(5)の形に表わすとき，$e^1,\cdots,e^4$の選び方には任意性がある．実際任意の$SL(2,\mathbb{C})$値函数g, hによって$e^1,\cdots,e^4$を

$$\begin{pmatrix} e^4 & e^2 \\ e^1 & -e^3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} e^{4\prime} & e^{2\prime} \\ e^{1\prime} & -e^{3\prime} \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} e^4 & e^2 \\ e^1 & -e^3 \end{pmatrix}h \qquad (6)$$

で定められる$e^{1\prime},\cdots,e^{4\prime}$でおきかえても$ds^2$は変わらない．このことは一種のgauge変換の役割をはたし（これはEinstein方程式に本来内在する一般座標変換の自由度とはまた別の対称性を与える），これに基いて曲率形式$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$をいくつかの基本

的な量に分解することができる. (3)はそれらのうちの一部が消えることを意味する.

さてPlebanskiの得た結論は次のように要約される: 適当なgauge変換(6)により $e^1,\dots,e^4$ をとり直すとき SDEは次の方程式系に同値である.

$$d(e^4\wedge e^1)=0,\quad d(e^3\wedge e^2)=0,\quad d(-e^1\wedge e^2+e^3\wedge e^4)=0. \tag{7}$$

従って問題はこれらを解くことに帰着するが, Plebanskiはさらに適当な座標においてこれらが単独2階非線型微分方程式に書き直せることを示した. それは2通り与えられているが, 第一の座標 $(pqrs)$ では(7)は方程式

$$\Omega_{pr}\Omega_{qs}-\Omega_{ps}\Omega_{qs}=1 \qquad \left(\Omega_{pr}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial p\partial r},\ etc\right) \tag{8}$$

に同値で, このとき

$$e^1=dp,\ e^2=\Omega_{pr}dr+\Omega_{ps}ds,\ e^3=-\Omega_{qr}dr-\Omega_{qs}ds,\ e^4=-dq, \tag{9}$$

また第2の座標 $(pqxy)$ では(7)は方程式

$$\Theta_{px}+\Theta_{qy}+\Theta_{xx}\Theta_{yy}-\Theta_{xy}^2=0 \tag{10}$$

に同値で, このとき

$$e^1=dp,\ e^2=dx-\Theta_{yy}dp+\Theta_{xy}dq,\ e^3=-dy-\Theta_{xy}dp+\Theta_{xx}dq,\ e^4=-dq \tag{11}$$

である. なおPlebanskiは(8), (9)を用いてSDEの特殊解をいくつか与えている.

4. Penroseの構成法，基本的な方程式(15)の導出

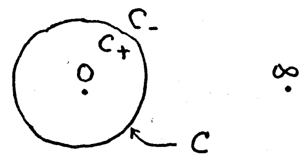
Penrose [2] は curved twistor space というある条件をみたす3次元複素多様体とSDEの解の間に対応関係があることを明らかにした．これによれば curved twistor space を与えるごとに原理的にはSDEの解が得られる．ただ，Penroseの示した手順を実行するには curved twistor space 内のある条件をみたす曲線の族全体を知るという厄介な問題を解決しなければならず，そのため実際にこの方法で解の具体的な表示が得られているのは極めて特殊な場合に限られる[6－10]．この問題を積分幾何学的観点から見直す試みもあるが[18]決定打とはいえない．そこでこの方法を非線型可積分系の観点から眺めて何か新しい知見が得られないか，というのが我々の期待するところである．

そのためには極めて幾何学的に述べられている[2]の内容をもっと解析的に（代数解析的に！）判り易く書き直すことが望ましい．[2]のやり方では，たとえ上に述べた曲線族決定の問題が解けても，そこから ds^2 を引き出すのにいささか間接的な手順を踏まねばならないなど技術的に不便な面がある．そのうえ何よりも判りにくいのである．

[2] §6 で扱われている場合（curved twistor space が2個の座標近傍からなる）には前節で述べたPlebanski[17]の結果を利用することによりそのような定式化ができる．以下にそれを示すが，同様の議論は[12]でも詳しく展開されている．

DATA: 以下のdataを用意せよ．

Riemann球面 $\mathbb{P}^1$ 上に原点中心の円周 C，例えば $C=\{\lambda\in\mathbb{P}^1;\ |\lambda|=1\}$，をとり $C_+=\{\lambda\in\mathbb{P}^1;\ |\lambda|<1\}$，$C_-=\{\lambda\in\mathbb{P}^1;\ |\lambda|>1\}$ とおく．他方 $f=f(x,y,\lambda)$，$g=g(x,y,\lambda)$ を $\mathbb{C}^2$（その座標を (x,y) と記す）のある領域と C との直積上で定義された複素数値函数の対で，(x,y) に関して正則で λ に関して実解析的，かつ条件



$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 1 \qquad (12)$$

をみたすものとする．いいかえれば (f,g) は λ を固定するごとに $\mathbb{C}^2$ 上の局所正準変換（$dx\wedge dy$ に関する）を定める．

この対 (f,g) は [2] §6 で扱われているタイプの curved twistor space をひとつ定める data であり，実際2つの座標近傍をはりあわせて curved twistor space をつくるときのはりあわせ方を指定する変換函数を与える．

これに対して次の問題を考える．

問題： λ の函数 $u=u(\lambda)$, $v=v(\lambda)$, $\hat{u}=\hat{u}(\lambda)$, $\hat{v}=\hat{v}(\lambda)$ で，$\hat{u}$ と $\hat{v}$ は $C\cup C_+$ の近傍で正則，$\lambda^{-1}u$ と $\lambda^{-1}v$ は $C\cup C_-$ の近傍で正則であり，かつ

$$u = f(\hat{u}, \hat{v}, \lambda), \quad v = g(\hat{u}, \hat{v}, \lambda) \tag{13}$$

をみたすものを求めよ．

このような $(u, v, \hat{u}, \hat{v})$ を求めることが前に述べた curved twistor space 内の曲線を求めることにあたる．そして Penrose は小平の変形理論を援用することによって，(f, g) が十分に恒等写像に近いときにはそのような曲線は 4-parameter 族存在することを示した．上の問題の設定でいえば $u, v, \hat{u}, \hat{v}$ の C の近傍での Laurent 展開を

$$u=\sum_{n=-\infty}^{1} u_n\lambda^n, \quad v=\sum_{n=-\infty}^{1} v_n\lambda^n, \quad \hat{u}=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{u}_n\lambda^n, \quad \hat{v}=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{v}_n\lambda^n \tag{14}$$

と表すとき $(u_1, v_1, u_0\ v_0)$ をその 4-parameter にえらぶことができ，その他の u_n, v_n はその正則函数とみなされる．$(u_1, v_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$, $(\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$ を 4-parameter にとることもできる（次節参照）．

ds^2 の求め方： 4-parameter に依存する $(u, v, \hat{u}, \hat{v})$ が得られたとして，そこから ds^2 を求めるやり方を説明する．原理

は簡単で，$(u, v, \hat{u}, \hat{v})$ を指定する上のような 4-parameter を ds^2 を(1)や(5)の形にあらわすときの局所座標として採用し，それに関する外微分を d であらわすとき，(12) と (13) からただちに従う次の等式に注目する．

$$du \wedge dv = d\hat{u} \wedge d\hat{v} \tag{15}$$

$u, v, \hat{u}, \hat{v}$ の正則性あるいは (14) に注目すると，(15) 両辺が λ について2次式であること，つまり $\theta_0 + \theta_1\lambda + \theta_2\lambda^2$, $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ は z に関する2次微分形式で λ によらぬ，という形の量を与えることがわかる．さらに(15)の形から明らかなように，(15)の両辺で定義されるこの2次微分形式は simple かつ closed，即ち

$$(\theta_0 + \theta_1\lambda + \theta_2\lambda^2) \wedge (\theta_0 + \theta_1\lambda + \theta_2\lambda^2) = 0, \quad d(\theta_0 + \theta_1\lambda + \theta_2\lambda^2) = 0 \tag{16}$$

をみたす．Gindikin [18, 付録] が指摘するように，このような2次微分形式は $\theta_0 \wedge \theta_2 \neq 0$ ($\theta_0 = d\hat{u}_0 \wedge d\hat{v}_0$, $\theta_2 = du_1 \wedge du_2$ なので今の場合これはみたされている) である限り

$$\theta_0 + \theta_1\lambda + \theta_2\lambda^2 = (e^4\lambda + e^2) \wedge (e^1\lambda - e^3), \tag{17}$$

$e^1, \cdots, e^4$ は λ によらぬ1次微分形式，

という形に分解される．(例えば $z = (u_1, v_1, u_0, v_0)$ を独立変数にえらぶときには $e^1, \cdots, e^4$ として次のような選び方ができる．

$$\begin{aligned} e^4 &= du_1, \quad e^2 = du_0 - \frac{\partial u_{-1}}{\partial v_0} dv_1 - \frac{\partial u_{-1}}{\partial u_0} du_1, \\ e^1 &= dv_1, \quad e^3 = -dv_0 + \frac{\partial v_{-1}}{\partial v_0} dv_1 + \frac{\partial v_{-1}}{\partial u_0} du_1. \end{aligned} \tag{18}$$

これを示すには(15)から従う二つの等式 $\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_0}+\frac{\partial v_{-1}}{\partial v_0}=0$, $\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_1}+\frac{\partial v_{-1}}{\partial v_1}+\frac{\partial v_{-1}}{\partial u_0}\frac{\partial u_{-1}}{\partial v_0}-\frac{\partial v_{-1}}{\partial v_0}\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_0}=0$ を用いる．(33)参照.) 最後に，(17)を(16)第2式へ代入したものはPlebanskiの方程式(7)をまとめたものに他ならないことに注意する．従って，こうして得られる $e^1,\cdots,e^4$ から(5)のように ds^2 をつくればそれが求めるSDEの解である．

このように，結局のところ最も基本的なのは方程式(15)であり，これがPenrose[2]とPlebanski[17]をつないでいる．SDEはこの基本方程式(15)から(18)を通じて従う帰結である．またPenroseの方法は(15)のひとつの解法理論である．そこで，続く二節では(15)自体とそこに内在する構造について考える．

5．方程式(15)の構造，hierarchy の導入，同値な別表現

以下では方程式(15)の構造についてもう少し考えてみたいが，そのためにまず方程式(15)の意味をはっきりさせておこう:

i) 方程式(15)はLaurent展開(14)を代入し展開し直して得られる，$u_n, v_n, \hat{u}_n, \hat{v}_n$ に対する外微分方程式系

$$\sum_{i+j=k} du_i \wedge du_j = \sum_{i+j=k} d\hat{u}_i \wedge d\hat{v}_j \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \qquad (19)$$

を単に簡潔に表現したものとみなし，(4)が収束せず単に形式的な級数である場合も含めて扱う．

ii) SDE，Penroseの構成法と結びつけるため，前節の末尾で述べたことに従い，(15)または(19)では(u_1, v_1, u_0, v_0)は独立変数，その他の$u_n, v_n, \hat{u}_n, \hat{v}_n$は従属変数をあらわすものとする．つまり，(19)の4次元積分多様体でその上で$du_1 \wedge dv_1 \wedge du_0 \wedge dv_0 \neq 0$であるもののみを扱う．このとき(18)を介してSDEの解ds^2が得られる．実は(19)からただちに

$$du_1 \wedge dv_1 \wedge du_0 \wedge dv_0 = du_1 \wedge dv_1 \wedge d\hat{u}_0 \wedge d\hat{v}_0 = d\hat{u}_1 \wedge d\hat{v}_1 \wedge d\hat{u}_0 \wedge d\hat{v}_0$$

が従うので，$(u_1, v_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$，$(\hat{u}_1, \hat{v}_1, \hat{u}_0, \hat{v}_0)$を独立変数にえらんでもよい．

iii) (19)において特に$k<0$の場合のみとり出せば，u_n, v_nのみを含む方程式系が得られる．一般にλの形式的Laurent級数$\sum a_n \lambda^n$に対してその負巾部分，非負巾部分を

$$(\sum a_n \lambda^n)_- = \sum_{n<0} a_n \lambda^n, \quad (\sum a_n \lambda^n)_+ = \sum_{n \geq 0} a_n \lambda^n \tag{20}$$

とあらわすことにすれば，u_n, v_nに対するこれらの方程式系は

$$(du \wedge dv)_- = 0 \tag{21}$$

という形に表現できる．SDEと結びつけるにはこれだけを考えても十分である．詳細は省くが，必要ならば(21)の解(独立変数・従属変数の区別は(ii)と同じ)に対して(15)をみたす$\hat{u}, \hat{v}$

をいつでもつくれることが示せる．

更に，今後上のような意味で定義された方程式(15), (21)を考えるときには，同時に新しい独立変数 $u_2, u_3, \cdots, v_2, v_3, \cdots$ を補っておき，(19)を独立変数 $u_n, v_n\ (n \geq 0)$，従属変数 $u_n, v_n\ (n<0)$, $\hat{u}_n, \hat{v}_n\ (n \geq 0)$ に対する外微分方程式系とみなすことにしよう．その方が(15), (21)の内在的構造を探るには都合が良い．

その意味を説明しよう：　このことは

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \lambda^n, \quad v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n \lambda^n, \quad \hat{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n \lambda^n, \quad \hat{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{v}_n \lambda^n \tag{22}$$

でおきかえることに他ならない．独立変数を無限個用意することが気持ち悪く感じられるならば $u_0, u_1 \cdots, u_N, v_0, v_1, \cdots, v_N\ (N < \infty)$ で打ち切って考えればよいが，$N=\infty$ の場合でも(19)を上の従属変数に対する偏微分方程式系に書き直してみれば，得られる個々の方程式は無限和など含まずはっきりした意味をもつ．このように独立変数を水増しすることは，従来の非線型可積分系の理論でも行われたことであり（例えばKdV方程式は空間次元＝時間次元＝1の方程式だが，これに新たな時間変数を付け加えて高次KdV方程式の系列を考えることができる），そのような新しい独立変数を使って得られる方程式の系列は hierarchy と呼ばれる．上に述べた独立変数の導入が確か

に hierarchy と呼べるものであることは，方程式(15)，(21)から従来の非線型可積分系に現れたものと同様の形をもつ様々な方程式を導く議論（次節）の過程で次第に明らかになる．

その議論の出発点となるのは次に述べる命題である．

命題(23)： 方程式(15)は次のことに同値である．

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u_0} & \frac{\partial \hat{u}}{\partial v_0} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial u_0} & \frac{\partial \hat{v}}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d\hat{u} \\ d\hat{v} \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u_0} & \frac{\partial \hat{u}}{\partial v_0} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial u_0} & \frac{\partial \hat{v}}{\partial v_0} \end{pmatrix} = 1. \tag{23}$$

命題(24)： 方程式(21)は次のことに同値である．

$$\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \right)_- = 0, \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix} = 1. \tag{24}$$

紙数の都合で後者の証明のみ掲げておく．前者の証明も少し複雑になるだけで同様である．

［(21) ⇒ (24) の証明］ まず $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_0,v_0)} = 1$ を示す．$u_0, u_1, \cdots, v_0, v_1, \cdots$ を独立変数とみなしているので $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_0,v_0)}$ は展開

$$du \wedge dv = \sum_{0 \le k < l} \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_k,u_l)} du_k \wedge du_l + \sum_{0 \le k < l} \frac{\partial(u,v)}{\partial(v_k,v_l)} dv_k \wedge dv_l + \sum_{0 \le k < l} \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_k,v_l)} du_k \wedge dv_l \tag{25}$$

における $du_0 \wedge dv_0$ の係数として現れる．他方 (21) より

$$du \wedge dv = (du \wedge dv)_- = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \sum_{i+j=m} du_i \wedge dv_j$$

であるが，ここで右辺を上と同様に展開すると $du_0 \wedge dv_0$ は $m>0$ の部分から現れず，$m=0$ から得られる $du_0 \wedge dv_0$ 項の係数は 1 であることがわかる．従って $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_0,v_0)} = 1$ を得る．

次に (24) の第二式を示す．$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(u_0,v_0)} = 1$ に注意すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} & -\frac{\partial u}{\partial v_0} \\ -\frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial u_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial v_0} du - \frac{\partial u}{\partial v_0} dv \\ -\frac{\partial v}{\partial u_0} du + \frac{\partial u}{\partial u_0} dv \end{pmatrix} \tag{26}$$

であるが，右辺の行列成分をそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial v_0} du - \frac{\partial u}{\partial v_0} dv &= \sum \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_k,v_0)} du_k - \sum \frac{\partial(u,v)}{\partial(v_0,v_\ell)} dv_\ell , \\ -\frac{\partial v}{\partial u_0} du + \frac{\partial u}{\partial u_0} dv &= \sum \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_0,u_\ell)} du_\ell + \sum \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_0,v_\ell)} dv_\ell , \end{aligned} \tag{27}$$

と展開すると，その係数は (25) 右辺に現れるものの一部と一致する．従って (15) より

$$\left(\frac{\partial v}{\partial v_0} du - \frac{\partial u}{\partial v_0} dv\right)_- = 0, \quad \left(-\frac{\partial v}{\partial u_0} du + \frac{\partial u}{\partial u_0} dv\right)_- = 0.$$

［(24) ⇒ (21) の証明］ $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$du \wedge dv = \sigma_1 \wedge \sigma_2 , \quad (\sigma_1)_- = 0 , \ (\sigma_2)_- = 0 .$$

従って (21) が従う．

以上により命題 (24) が証明された．

6. 方程式(15)からの帰結, vector場の交換関係, 線型系

前節にひき続いて方程式(15)あるいは(21)を考える．ここでも独立変数は$u_0, u_1, u_2, \cdots, v_0, v_1, v_2, \cdots$までふやしておく．これから示したいのはこれらの方程式からあるvector場たちの可換性ならびにそれを用いた線型微分方程式系が従うということである．こうして得られる新しい方程式は従来の非線型可積分系と共通する構造上の特徴をもつ．

まず結果を先に述べよう．一般に(u_0, v_0)の函数χに対するHamilton vector場H_χ，およびχ_1, χ_2に対するPoisson bracket $\{\chi_1, \chi_2\}$を次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
H_\chi &= \frac{\partial \chi}{\partial u_0}\frac{\partial}{\partial v_0} - \frac{\partial \chi}{\partial v_0}\frac{\partial}{\partial u_0}, \\
\{\chi_1, \chi_2\} &= H_{\chi_1}(\chi_2) = \frac{\partial \chi_1}{\partial u_0}\frac{\partial \chi_2}{\partial v_0} - \frac{\partial \chi_1}{\partial v_0}\frac{\partial \chi_2}{\partial u_0}.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

これを使ってvector場X_k, Y_kを

$$
\begin{aligned}
X_k &= \frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda\frac{\partial}{\partial u_{k-1}} + H_{v_{-k}}, \\
Y_k &= \frac{\partial}{\partial v_k} - \lambda\frac{\partial}{\partial v_{k-1}} - H_{u_{-k}}
\end{aligned}
\tag{29}
$$

と定義する．このとき

命題(30): 方程式(15)から$u, v, \hat{u}, \hat{v}$に対する線型微分方程式

$$X_k(w) = 0, \quad Y_k(w) = 0, \tag{30}$$
$$k = 1, 2, \cdots, \quad w = u, v, \hat{u}, \hat{v},$$

が従う．（ $w = u, v$ に対する方程式は実は(21)だけからも従う．）

命題(31)： 方程式(15)（実は(21)で十分）から交換関係

$$[X_k, X_j] = 0, \quad [X_k, Y_j] = 0, \quad [Y_k, Y_j] = 0, \tag{31}$$
$$k, j = 1, 2, \cdots$$

が従う．（[,]は交換子 $[A, B] = AB - BA$.）

命題(31)に関してはもう少し強いことがいえる．X_k, Y_k の定義および一般的な公式

$$[H_{\chi_1}, H_{\chi_2}] = H_{\{\chi_1, \chi_2\}}$$

を用いると，これらの交換子は

$$[X_k, X_j] = H_{(\frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda\frac{\partial}{\partial u_{k-1}})(v_{-j}) - (\frac{\partial}{\partial u_j} - \lambda\frac{\partial}{\partial u_{j-1}})(v_{-k}) + \{v_{-k}, v_{-j}\}},$$
$$[X_k, Y_j] = H_{-(\frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda\frac{\partial}{\partial u_{k-1}})(u_{-j}) - (\frac{\partial}{\partial v_j} - \lambda\frac{\partial}{\partial v_{j-1}})(v_{-k}) - \{v_{-k}, u_{-j}\}},$$
$$[Y_k, Y_j] = H_{-(\frac{\partial}{\partial v_k} - \lambda\frac{\partial}{\partial v_{k-1}})(u_{-j}) + (\frac{\partial}{\partial v_j} - \lambda\frac{\partial}{\partial v_{j-1}})(u_{-k}) + \{u_{-k}, u_{-j}\}},$$

という Hamilton vector 場の形にあらわせるが，

命題(32)： 方程式(15)（実は(21)で十分）から方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda\frac{\partial}{\partial u_{k-1}}\right)(v_{-j}) - \left(\frac{\partial}{\partial u_j} - \lambda\frac{\partial}{\partial u_{j-1}}\right)(v_{-k}) + \{v_{-k}, v_{-j}\} = 0, \tag{32a}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial u_k} - \lambda\frac{\partial}{\partial u_{k-1}}\right)(u_{-j}) - \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \lambda\frac{\partial}{\partial v_{j-1}}\right)(v_{-k}) - \{v_{-k}, u_{-j}\} = 0, \tag{32b}$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial v_k} - \lambda\frac{\partial}{\partial v_{k-1}}\right)(u_{-j}) + \left(\frac{\partial}{\partial v_j} - \lambda\frac{\partial}{\partial v_{j-1}}\right)(u_{-k}) + \{u_{-k}, u_{-j}\} = 0, \tag{32c}$$

$$k, j = 1, 2, \cdots.$$

が従う．

(18)を導くとき必要だった二つの方程式

$$\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_0}+\frac{\partial v_{-1}}{\partial v_0}=0,\quad \frac{\partial u_{-1}}{\partial u_1}+\frac{\partial v_{-1}}{\partial v_1}+\frac{\partial v_{-1}}{\partial u_0}\frac{\partial u_{-1}}{\partial v_0}-\frac{\partial v_{-1}}{\partial v_0}\frac{\partial u_{-1}}{\partial v_0}=0 \tag{33}$$

は $k=j=1$ に対する(32b)に他ならない．ちなみにこの二つの方程式は $(u_1, v_1, u_0, v_0)=(-q, p, x, y)$ という対応で(10)に同値である．実際第一の方程式は

$$u_{-1}=\frac{\partial \Theta}{\partial v_0},\quad v_{-1}=-\frac{\partial \Theta}{\partial u_0} \tag{34}$$

というpotential Θ の存在を保証し，これらを第二の方程式へ代入すると(10)を得る．

(30)-(32)は X_k, Y_k に関して線型あるいは双線型の量のみ含むので，X_k, Y_k を適当な1次結合でおきかえることにより，同値な別表現を得る．そのような表現として大切なのは次のvector場を用いるものである．

$$\begin{aligned}\tilde{X}_k &= X_k+\lambda X_{k-1}+\cdots+\lambda^{k-1}X_1=\frac{\partial}{\partial u_k}+H_{\lambda^k v_0+\lambda^{k-1}v_{-1}+\cdots+v_{-k}},\\ \tilde{Y}_k &= Y_k+\lambda Y_{k-1}+\cdots+\lambda^{k-1}Y_1=\frac{\partial}{\partial v_k}-H_{\lambda^k u_0+\lambda^{k-1}u_{-1}+\cdots+u_{-k}}.\end{aligned} \tag{35}$$

これを用いるとき(30)-(32)は次の方程式に同値になる．

$$\tilde{X}_k(w)=0,\quad \tilde{Y}_k(w)=0,\qquad w=u, v, \hat{u}, \hat{v}, \tag{36}$$

$$[\tilde{X}_k, \tilde{X}_j]=0,\quad [\tilde{X}_k, \tilde{Y}_j]=0,\quad [\tilde{Y}_k, \tilde{Y}_j]=0, \tag{37}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial u_k}(\lambda^j v_0+\lambda^{j-1}v_{-1}+\cdots+v_{-j})-\frac{\partial}{\partial u_j}(\lambda^k v_0+\lambda^{k-1}v_{-1}+\cdots+v_{-k})\\ &\quad+\{\lambda^k v_0+\lambda^{k-1}v_{-1}+\cdots+v_{-k},\ \lambda^j v_0+\lambda^{j-1}v_{-1}+\cdots+v_{-j}\}=0,\end{aligned} \tag{38a}$$

$$-\frac{\partial}{\partial u_k}(\lambda^j u_0+\lambda^{j-1}u_{-1}+\cdots+u_{-j})-\frac{\partial}{\partial v_j}(\lambda^k v_0+\lambda^{k-1}v_{-1}+\cdots+v_{-k})$$
$$-\{\lambda^k v_0+\lambda^{k-1}v_{-1}+\cdots+v_{-k},\ \lambda^j u_0+\lambda^{j-1}u_{-1}+\cdots+u_{-j}\}=0, \quad (38b)$$
$$-\frac{\partial}{\partial v_k}(\lambda^j u_0+\lambda^{j-1}u_{-1}+\cdots+u_{-j})+\frac{\partial}{\partial v_j}(\lambda^k u_0+\lambda^{k-1}u_{-1}+\cdots+u_{-k})$$
$$+\{\lambda^k u_0+\lambda^{k-1}u_{-1}+\cdots+u_{-k},\ \lambda^j u_0+\lambda^{j-1}u_{-1}+\cdots+u_{-j}\}=0. \quad (38c)$$
$$k, j=1, 2, \cdots.$$

この表示の利点は(36)が u_k, v_k ($k=1, 2, \cdots$)に関する発展方程式の形をもつことである．このことは u_k, v_k を時間変数（これは本来の4次元時空の時間軸とは別のもの）とみなしてもよいことを示唆するが，このような時間変数の系列の導入は非線型可積分系の hierarchy の記述には不可欠なことであった[13, 14].

さて以上の新たに導かれた方程式(30)-(32), (36)-(38)を従来の非線型可積分系の記述に現れたもの([15, 11]とその引用文献参照)と見比べてみよう．後者の多くは交換関係

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi}-U,\ \frac{\partial}{\partial \eta}-V\right]=\frac{\partial U}{\partial \eta}-\frac{\partial V}{\partial \xi}+[U, V]=0 \qquad (39)$$

の形で方程式が記述される．ここで，U と V は独立変数 (ξ, η) 以外に parameter λ にも依存する行列 $U=U(\xi, \eta, \lambda)$, $V=V(\xi, \eta, \lambda)$ で λ に関して有理函数であるもの；あるいは (ξ, η) 以外の変数 x に関する常微分作用素 $U=U(\xi, \eta, x, \frac{\partial}{\partial x})$, $V=V(\xi, \eta, x, \frac{\partial}{\partial x})$；など場合に応じていろいろである．(39)は形式的には線型系

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}-U\right)W=0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \eta}-V\right)W=0 \qquad (40)$$

に対するFrobeniusの意味の積分可能条件であるが，Riemann-Hilbert問題などの強力な解法理論を非線型可積分系に適用するときにはこの線型系が基本的な役割を果たす．自己双対Yang-Mills方程式の場合には独立変数は4個 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ であり，(39)と(40)の代わりに

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\lambda\frac{\partial}{\partial\xi_2}-U,\ \frac{\partial}{\partial\eta_1}-\lambda\frac{\partial}{\partial\eta_2}-V\right]=0, \tag{41}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\lambda\frac{\partial}{\partial\xi_2}-U\right)W=0,\ \left(\frac{\partial}{\partial\eta_1}-\lambda\frac{\partial}{\partial\eta_2}-V\right)W=0, \tag{42}$$

(ここで U, V は $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \lambda$ に依存する行列で λ については1次式）という形の方程式が現れる．(30), (31), (36), (37)をこれらと見比べてみると，U, V にあたる部分がHamilton vector場になっている以外は全く同じ形をもつことがわかる．ただし正確にいえば(30)(31)は(41)(42)と，また(36)(37)は(39)(40)と同じ形をしている．同時に二つの異なるタイプの方程式(39)(40), (41)(42)と対応するのは奇妙に思われるかも知れないが，これは(41)(42)における $\lambda\frac{\partial}{\partial\xi_2}+U$, $\frac{\partial}{\partial\eta_2}+V$ を(39)(40)における U, V と同一視したと思えばよいのであり，実際 $\frac{\partial}{\partial u_0}, \frac{\partial}{\partial v_0}$ は

$$\frac{\partial}{\partial u_0}=-H_{v_0},\quad \frac{\partial}{\partial v_0}=H_{u_0}$$

というようにHamilton vector場で表示されるから，そのような同一視は今の場合には可能なのである．

ここで最も注意すべき点は，(39)−(42)における U, V として

SDEではHamilton vector場が現れるということである．これはもとを正せばPenroseの構成法において$\lambda\in C$に依存する局所正準変換が登場することを反映している．一般にUとVは何らかの群のLie環の元であるが（ついでに言えばWはその群のある線型表現に属する），局所正準変換の群（正確には擬群）のLie環の元はいうまでもなくHamilton vector場であり，何やら辻褄が合っているわけだ．この辺のことは次節でも論じるが，余随伴軌道の方法[15]のような表現論の側面から見た意味はまだよくわからない．

最後に命題(30)-(32)の証明について触れておこう．(31)が(32)からただちに従うことはすでに注意した．(32)は$w=u,v$に対する方程式(30)をλべきに展開して，その係数から出てくる方程式たちを適当に足したり引いたりすれば示せる．そこで(30)のみ証明を掲げておく．証明には命題(23),(24)で示された方程式(15),(21)の特徴づけを利用するが，(30)を$w=u,v$に対して証明するには(24)を用いれば十分なので，紙数の関係でこちらの方のみ述べておく．$w=\hat{u},\hat{v}$を含めての議論も同様である．

［$w=u,v$に対する(30)の証明］：まず(21)から次を導く．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_{k-1}}+\frac{\partial v_{-k}}{\partial v_0}=0, \quad \frac{\partial v_{-1}}{\partial u_{k-1}}-\frac{\partial v_{-k}}{\partial u_0}=0,\\
&\frac{\partial u_{-1}}{\partial v_{k-1}}-\frac{\partial u_{-k}}{\partial v_0}=0, \quad \frac{\partial v_{-1}}{\partial v_{k-1}}-\frac{\partial u_{-k}}{\partial u_0}=0, \quad k=1,2,\cdots.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

これを導くには(21)をλべきで展開してλ^{-1}の係数をとり出して得る方程式（それは(19)で$k=-1$とおいたものに他ならない）

$$\sum_{i+j=-1} du_i \wedge dv_j = 0$$

を考えて，左辺を(25)の如く展開し，$du_{k-1}\wedge dv_0$, $du_{k-1}\wedge du_0$, $dv_{k-1}\wedge dv_0$, $dv_{k-1}\wedge du_0$ の係数を引き出せばよい．

さて $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$ とおく．この両辺は1次微分形式であるからvector場X_kとの自然なpairingをとることにより

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u_0} & \frac{\partial u}{\partial v_0} \\ \frac{\partial v}{\partial u_0} & \frac{\partial v}{\partial v_0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_k(u) \\ X_k(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1(X_k) \\ \sigma_2(X_k) \end{pmatrix}. \tag{44}$$

ここで各成分がλのどのようなLaurent級数であるかを見ると，

i) (24), (29)により $\sigma_1(X_k)$, $\sigma_2(X_k)$ は $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \cdots$ のみ含む．

ii) $\frac{\partial u}{\partial u_0}, \frac{\partial u}{\partial v_0}, \frac{\partial v}{\partial u_0}, \frac{\partial v}{\partial v_0}$ は $\lambda^0, \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \cdots$ のみ含む

iii) $X_k(u)$, $X_k(v)$ は $\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \cdots$ のみ含む．なぜなら

$$X_k(u) = \sum_{n<0}\left(\frac{\partial u_n}{\partial u_k} - \frac{\partial u_{n-1}}{\partial u_{k-1}} + \{v_{-k}, u_n\}\right)\lambda^n + \left(-\frac{\partial u_{-1}}{\partial u_{k-1}} + \{v_{-k}, u_0\}\right),$$
$$X_k(v) = \sum_{n<0}\left(\frac{\partial v_n}{\partial u_k} - \frac{\partial v_{n-1}}{\partial u_{k-1}} + \{v_{-k}, v_n\}\right)\lambda^n + \left(-\frac{\partial v_{-1}}{\partial u_{k-1}} + \{v_{-k}, v_0\}\right),$$

かつ右辺最後の項は(43)により消えるからである．

以上により(44)右辺は$\lambda^0, \lambda^1, \cdots$のみ，左辺は$\lambda^{-1}, \lambda^{-2}, \cdots$のみ含み，結局両辺とも消えることがわかる．従って$X_k(u) = X_k(v) = 0$．同様にして$Y_k(u) = Y_k(v)$を示せる．

以上により命題(30)の$w = u, v$の部分が証明された．

7. Penroseの構成法の群論的解釈

前二節ではSDEのいわば種(seed)というべき基本方程式(15)あるいは(21)について議論し，少くとも方程式の構造論の水準ではそれらが従来の非線型可積分系と極めて良く似た面をもつことを指摘した．そこでこの節では解法理論の水準で両者の関連を探る．そのために第4節で示したPenroseの構成法に群論的な解釈を与え，それを従来の非線型可積分系の解法であるRiemann-Hilbert問題の方法[15]と比較してみる．ここに現れる無限次元群（正確には群ではない）は$\mathbb{C}^2$上の正則局所正準変換の擬群のloop群であり，本質的にはBoyer, Plebanski[12]の群$\mathcal{C}$と同じものと言ってよいが，我々はそれをもっと積極的に解の記述に利用しようというわけである．このような群論的解釈はu_n, v_n $(n>0)$の時間変数としての役割をより鮮明に浮かび上がらせる．

必要とする擬群等の説明から始めよう．第4節に触れたように，$\mathbb{C}^2$上に座標(x,y)をとり$dx\wedge dy$をsymplectic formとするsymplectic structureを考える．正則局所正準変換の擬群

$$G_{can}=\{(f,g);\ (x,y)\longrightarrow(f(x,y),g(x,y))\text{は}\mathbb{C}^2\text{内の開集合から開集合への正則同型で}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}=1\text{をみたす}\} \quad (45)$$

を導入し，さらに第4節のような C，$C_\pm$ に対して

$$\mathcal{G}_C = \{(f,g);\ C\text{から}G_{can}\text{への解析的写像} \quad C \ni \lambda \longrightarrow [(x,y)\longrightarrow (f(x,y,\lambda), g(x,y,\lambda))] \in G_{can}\}, \tag{46a}$$

$$\mathcal{B}_C = \{(f,g)\in\mathcal{G}_C;\ \lambda\text{に関して}C\cup C_+\text{の近傍まで}G_{can}\text{への正則写像として延長されるもの}\}, \tag{46b}$$

$$\mathcal{N}_C = \{(f,g)\in\mathcal{G}_C;\ \lambda\text{に関して}C\cup C_-\text{の近傍まで}G_{can}\text{への正則写像として延長され，かつ}\ (f,g)|_{\lambda=\infty}=\text{恒等写像，となるもの}\}, \tag{46c}$$

とおき，$\mathcal{G}_C$ の元の積を λ をとめるごとの写像の合成

$$(f,g)\circ(\bar{f},\bar{g}) = (f(\bar{f}(x,y,\lambda),\bar{g}(x,y,\lambda),\lambda),\ g(\bar{f}(x,y,\lambda),\bar{g}(x,y,\lambda),\lambda)) \tag{47}$$

により定義する．一般的な用語として，群 G に対して C から G への写像の集合に同様の仕方で積を定義したものは loop 群と呼ばれる．$\mathcal{G}_C$ の場合には G_{can} が群ではなく擬群（任意の2個の間に積が定義されているとは限らない）に過ぎないから $\mathcal{G}_C$ を loop 群と呼ぶのは正確ではないが，似たようなものだ．

大切なことは，$\mathcal{G}_C$ の単位元（＝恒等写像）に十分近い任意の元 (f,g) は必ず，かつ一意的に

$$(f,g) = (\varphi,\psi)\circ(\hat{\varphi},\hat{\psi})^{-1},\quad (\varphi,\psi)\in\mathcal{N}_C,\ (\hat{\varphi},\hat{\psi})\in\mathcal{B}_C \tag{48}$$

という積に分解されるという事実である．もちろんここで，

単位元に十分近い，と言うときには本当は$\mathcal{G}_C$の位相を明確にしておく必要があるが，今は常識的に判断しておけばよい．群論的に考えれば(48)の分解の成立には次のようなもっともらしい説明がつけられる：$\mathcal{G}_C$ のLie環にあたるのは $\lambda\in C$ に依存するHamilton vector場

$$H_\chi = \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} , \qquad \chi = \chi(x, y, \lambda)$$

のなすLie環であり（公式 $[H_{\chi_1}, H_{\chi_2}] = H_{\{\chi_1,\chi_2\}}$ に注意），そのうちで $\mathcal{N}_C$, $\mathcal{B}_C$ に対応するのは C に沿って Laurent展開 $\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n \lambda^n$ するときそれぞれ，$\chi_n = 0\ (n \geqq 0)$，$\chi_n = 0\ (n < 0)$ となるものである．従って(20)の記号を使って表示されるLie環の直和分解

$$\begin{aligned} H_\chi \quad &= \quad H_{(\chi)_-} + H_{(\chi)_+} \\ \mathcal{G}_C\text{のLie環} &= \mathcal{N}_C\text{のLie環} \oplus \mathcal{B}_C\text{のLie環} \end{aligned} \tag{49}$$

が得られるが，これを指数写像で$\mathcal{G}_C$, $\mathcal{N}_C$, $\mathcal{B}_C$へ持ち上げれば(48)の分解が得られるわけである…．（ただしここではこの議論を正当化する問題には立ち入らず，代わりに(48)の分解を無限次元での陰函数・逆函数の問題に帰着させて示すideaについて後に触れたいと思う．）同様の議論を G が行列群（$GL(r,\mathbb{C})$, $SL(r,\mathbb{C})$, etc）の場合のLoop群にあてはめれば(48)に対応するのはRiemann-Hilbert問題，すなわち，与えられた C 上の G 値解析的函数 $g(\lambda)$ に対して $C\cup C_+$ の近傍で定義された G 値函数 $\hat{h}(\lambda)$ と $C\cup C_-$ の近傍で定義された G 値函数 $h(\lambda)$ で

$$g(\lambda) = h(\lambda)\hat{h}(\lambda)^{-1}, \quad h(\infty) = 1 \tag{50}$$

をみたすものを見出す問題に他ならない．しかし通常 Riemann-Hilbert 問題を解く際にはこのような群論的なやり方は用いず，Fredholm 型積分方程式に問題を帰着させることが多い．

さて (48) の分解を用いて方程式 (15) を解く方法について説明する．data として $\mathcal{G}_C$ の元 (f,g) を与える．$\exp(-\sum_{n>0} u_n\lambda^n\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n>0} v_n\lambda^n\frac{\partial}{\partial y})$ で $(x,y) \to (x-\sum_{n>0} u_n\lambda^n, y-\sum_{n>0} v_n\lambda^n)$ という translation をあらわせばこれは $\mathcal{G}_C$ の元を与えるが（$|u_n|, |v_n|$ には適当な増大度を仮定しておく），これと (f,g) との合成を (48) のように分解する．

$$\exp\Big(-\sum_{n>0} u_n\lambda^n\frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n>0} v_n\lambda^n\frac{\partial}{\partial y}\Big)\circ(f,g) = (\varphi,\psi)\circ(\hat{\varphi},\hat{\psi})^{-1}, \tag{51}$$

$$(\varphi,\psi) = (\varphi(u_1u_2\cdots v_1v_2\cdots;xy\lambda), \psi(u_1u_2\cdots v_1v_2\cdots;xy\lambda)) \in N_C,$$

$$(\hat{\varphi},\hat{\psi}) = (\hat{\varphi}(u_1u_2\cdots v_1v_2\cdots;xy\lambda), \hat{\psi}(u_1u_2\cdots v_1v_2\cdots;xy\lambda)) \in B_C.$$

ただしここでは $u_1, u_2, \cdots, v_1, v_2, \cdots$ を parameter とみなしており $(\varphi,\psi), (\hat{\varphi},\hat{\psi})$ はこれらに依存する N_C, B_C の元である．このとき

$$u = \sum_{n>0} u_n\lambda^n + \varphi(u_1u_2\cdots v_1v_2\cdots;u_0v_0\lambda) \quad \hat{u} = \hat{\varphi}(u_1u_2\cdots v_1v_2\cdots;u_0v_0\lambda),$$

$$v = \sum_{n>0} v_n\lambda^n + \psi(u_1u_2\cdots v_1v_2\cdots;u_0v_0\lambda) \quad \hat{v} = \hat{\psi}(u_1u_2\cdots v_1v_2\cdots;u_0v_0\lambda), \tag{52}$$

が求める方程式 (15) の解を与えるのである．

この解法は確かに Penrose の構成法を群論的に焼き直した

ものになっている．実際(51)右辺の$(\hat{\varphi},\hat{\psi})^{-1}$を左辺へ移行した式の意味を(52)と見比べつつよく考えてみれば容易にわかるように，(51)は方程式

$$u = f(\hat{u}, \hat{v}, \lambda), \quad v = g(\hat{u}, \hat{v}, \lambda)$$

を書き直したものに他ならない．この方程式は(13)と全く同じ形をしており，唯一の違いは今の場合$u_2, u_3, \cdots, v_2, v_3, \cdots$という新しい変数が入ってきているという点のみである．このことから方程式(15)が従うのは第4節と同様である．それでは上の解法はPenroseの構成法以上の新しいことは何も言っていないことになるのか，というと，そうではない．Penroseの本来のやり方は小平の変形理論を用いるので$u_1, \cdots, u_N, v_1, \cdots, v_N$で打ち切ってそれから先の$u_n, v_n$を0とした場合には何とか使えるが，$N=\infty$とした場合にはお手あげである．群論的な方法の強みはそのような場合も含めて扱える点にある．またRiemann-Hilbert問題と同じ思想圏に属する方法であることもすでに行った(48)と(50)の比較から明らかであろう．

(51)に関しては，u_n, v_n $(n>0)$を時間変数とみるときの初期値問題との関連にも触れておかねばならない．初期値を

$$\begin{aligned} \varphi_{in} &= \varphi|_{u_n=v_n=0\,(n>0)}, \quad \psi_{in} = \psi|_{u_n=v_n=0\,(n>0)} \\ \hat{\varphi}_{in} &= \hat{\varphi}|_{u_n=v_n=0\,(n>0)}, \quad \hat{\psi}_{in} = \hat{\psi}|_{u_n=v_n=0\,(n>0)} \end{aligned} \tag{53}$$

で定義すると(51)より

$$(f, g) = (\varphi_{in}, \psi_{in}) \circ (\hat{\varphi}_{in}, \hat{\psi}_{in})^{-1}$$

であり，これを(51)へ代入して整理すれば次の方程式を得る．

$$(\varphi, \psi)^{-1} \circ \exp\left(-\sum_{n>0} u_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n>0} v_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial y}\right) \circ (\varphi_{in}, \psi_{in}) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})^{-1} \circ (\hat{\varphi}_{in}, \hat{\psi}_{in}) \tag{54}$$

初期値と時間発展を結ぶこの種の関係は従来の非線型可積分系でも知られているが（［11］およびそこで引用されたMulase, Ueno-Takasakiの論文など参照），そこでは行列や線型作用素の積で関係式の両辺が記述され，(54)のように写像の合成が現れるのはSDE特有の事情である．(54)からは特に(φ, ψ)の時間発展$(\varphi_{in}, \psi_{in}) \to (\varphi, \psi)$が

$$(\varphi, \psi)^{-1} \circ \exp\left(-\sum_{n>0} u_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial x} - \sum_{n>0} v_n \lambda^n \frac{\partial}{\partial y}\right) \circ (\varphi_{in}, \psi_{in}) \in \mathcal{B}_C \tag{55}$$

という方程式で記述されることがわかるが，これは方程式(21)あるいは$w = u, v$に限った方程式(30)の$u_n, v_n\ (n>0)$に関する初期値問題を群論的に解く方法を示している．

最後に(48)の分解を無限次元の陰函数・逆函数の問題に帰着させるideaについて触れる．そのためには無限個の変数$\xi_n^{(\alpha)}$ $(-\infty < n < \infty,\ \alpha = 0, 1)$, $\Xi_n^{(\alpha)}$ $(n < 0,\ \alpha = 0, 1)$を用意して次の方程式を考える．

$$f\left(\sum_{n<0} \Xi_n^{(0)} \lambda^{-n-1}, \sum_{n<0} \Xi_n^{(1)} \lambda^{-n-1}, \lambda\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^{(0)} \lambda^{-n-1} \quad (\lambda\text{について恒等的に}),$$

$$g\left(\sum_{n<0} \Xi_n^{(0)} \lambda^{-n-1}, \sum_{n<0} \Xi_n^{(1)} \lambda^{-n-1}, \lambda\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n^{(1)} \lambda^{-n-1} \quad (\lambda\text{について恒等的に}). \tag{56}$$

(56)がλに関して恒等的に成立する，という条件により，これらの無限変数の間には函数関係が生じる．まず(56)を素直に眺めればこれは無限次元空間の間の二つの写像

$$F:(\Xi_n^{(0)},\Xi_n^{(1)})_{n<0}\longmapsto(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)})_{n\geq 0},$$
$$H:(\Xi_n^{(0)},\Xi_n^{(1)})_{n<0}\longmapsto(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)})_{n<0},$$

を定める．(f,g)が正則同型であることにより，F，Hはともに正則写像でかつHは局所的に逆写像をもつことがわかる．Fと$H^{-1}:(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)})_{n<0}\to(\Xi_n^{(0)},\Xi_n^{(1)})_{n<0}$の合成

$$F\circ H^{-1}:(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)})_{n<0}\to(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)})_{n\geq 0}$$

は(56)で定まる函数関係から$\Xi_n^{(0)},\Xi_n^{(1)}$を消去したものに他ならない．さてここで特に$(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)})_{n<0}$の値を

$$\xi_{-1}^{(0)}=x,\quad \xi_{-1}^{(1)}=y,\quad \xi_n^{(0)}=\xi_n^{(1)}=0\ (n<-1) \tag{57}$$

とおいたときの$F\circ H^{-1}$，H^{-1}の値$(\xi_n^{(0)},\xi_n^{(1)})_{n\geq 0}$，$(\Xi_n^{(0)},\Xi_n^{(1)})_{n<0}$を使って

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,\lambda)&=\sum_{n=-1}^{\infty}\xi_n^{(0)}\lambda^{-n-1},\quad \psi(x,y,\lambda)=\sum_{n=-1}^{\infty}\xi_n^{(1)}\lambda^{-n-1},\\ \hat{\varphi}(x,y,\lambda)&=\sum_{n<0}\Xi_n^{(0)}\lambda^{-n-1},\quad \hat{\psi}(x,y,\lambda)=\sum_{n<0}\Xi_n^{(1)}\lambda^{-n-1}\end{aligned} \tag{58}$$

と定義すると，これが(48)をみたすものである．

8．まとめと展望

以上長い議論を通じてSDEを非線型可積分系の一種として扱う可能性を探ってきたが，そのような見方は十分に通用

するのみならず，今迄知られていなかった新しい側面を明らかにすることも判った．我々の議論の出発点は，Boyer, Plebanski [12]が行ったように Penrose [2]の構成法から無限個の未知函数をもつ方程式(15)(⟺(19))を抽出し，それを基本方程式とみなすことにあったが(第4節)，そのことに基いて従来の非線型可積系との比較検討を進めることにより，方程式の構造論(第5, 6節)，解法理論(第7節)の両面において両者の著しい類似性が確認されたわけである．この議論を通じて，[12]で導入された無限次元群$\mathcal{C}$がBoyer, Plebanskiの指摘以上に積極的な役割を解法理論で果たすこと，さらにそのLie環の元というべきある種のHamilton vector場が方程式の内在的構造の記述において基本的な量として現れること，等も明らかになった．

しかしながらまだ解明し尽くされていない面も多い．例えば解法理論の群論的な意味は第7節で論じられたが，余随伴軌道の方法など表現論とかかわる問題はそのまま残されている．またSDEを特徴づける群であるBoyer-Plebanski群$\mathcal{C}$(我々の$\mathcal{G}_c$)は2次元局所正準変換の擬群のloop群というべきものであったが，これを他の変換(擬)群のloop群でおきかえるとどのような方程式が現れるか，というのもこれからの大切な問題である．試みに2次元の局所正則同型全体の擬群G_{diffeo}について考えてみると，X_k, Y_kの形は第6節のものとは異な

るが(30),(31),(36),(37)と同じ形の方程式が得られ，(15)のようなものはなく，この場合には(30),(31),(36),(37)が基本方程式であることがわかる．この点で興味深いのはZakharov－Shabat [19] が自己双対Yang-Mills方程式に関連して，vector場の可換性として表示される方程式について言及していることである．我々の議論はこの種の方程式の系統的研究手段を示唆しているように思われる．最後に，我々の議論を佐藤のGrassmann多様体の方法[13]と結びつけるという問題が残っている．そのためには何らかの線型構造が必要であるが，従来の非線型可積分系の場合と同様ここでも自然な線型微分方程式系(31),(36)が存在するので，この方向への発展も大いに有望視される．

文　献

1．M. F. Atiyah: *Geometry of Yang-Mills Fields*, Pisa('79), およびその引用文献.

2．R. Penrose: *Nonlinear Gravitons and Curved Twistor Theory*, *Gen. Rel. Grav.* 7, 31-52('76)

3．R.O. Hansen, E.T. Newan, R. Penrose, K.P. Tod: *Proc. R. Soc. London* A363, 445-468 ('78).

4．E.T. Newman, J.R. Porter, K.P. Tod: *Twistor Surfaces and Right-Flat Spaces*, *Gen. Rel. Grav.* 9, 1129-1142 ('78).

5．W.D. Curtis, D.E. Lerner, F.R. Miller: *Some Remarks on the Nonlinear Graviton*, *Gen. Rel. Grav.* 10, 557-565 ('79).

6．W.D. Curtis, D.E. Lerner, F.R. Miller: Complex pp waves and the nonlinear graviton construction, J. Math. Phys. 19, 2024-2027 ('78).

7．R.S. Ward: A class of self-dual solutions of Einstein's equations, Proc. R. Soc. London A363, 289-295 ('78).

8. K.P.Tod, R.S.Ward: Self-dual metrics with self-dual Killing vectors, Proc. R. Soc. London A368, 411-427 ('79).

9. N.J. Hitchin: Polygons and gravitons, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 85, 465-476 ('79).

——————: Complex manifolds and Einstein's equations, Lect. Notes in Math. 970, 73-99, Springer ('82).

10. Complex manifold techiques in theoretical physics (ed. D.E. Lerner, P.D. Sommers, Research Notes in Math. 32, Pitman('79)) 所収の各論文.

11. K.Takasaki: A new approach to the self-dual Yang-Mills equations, Commun. Math. Phys. 94, 35-59 ('84).

——————: 高次元完全積分可能系としての自己双対Yang-Mills方程式, 数学のあゆみ 27, 73-107 ('84).

12. C.P. Boyer: The geometry of complex self-dual Einstein Spaces, Lect.Notes in Phys. 189, 25-45, Springer ('83).

C.P. Boyer, J.F. Plebanski: An infinite hierarchy of conservation laws and nonlinear superposition principles for self-dual Einstein spaces, Preprint.

13. M.Sato: Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold. 数理解析研究所講究録 439, 30-46 ('81).

M. Sato and Y. Sato: Proc. U.S.-Japan Seminor, Nonlinear PDE in Appl. Science, Tokyo 1982 (ed. P.D. Lax, H.Fujita, North-Holland), 259-271 ('82).

14. 柏原, 神保, 伊達, 三輪: ソリトン方程式とKac-Moody リー環, 数学34-1 ('82), M.Jimbo, T.Miwa: Solitons and infinite dimensional Lie algebras, Publ. RIMS 19, 943-1001 ('83), およびこれらに引用されている文献参照.

15. Twistor Geometry and Nonlinear Systems (Lect. Notes in Math. 970, Springer ('82)) 所収の Semenov-Tian-Shansky, Mikhailov の論文と引用文献参照.

16. M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, I.M. Singer: Self-duality in four dimensional Riemannian Geometry, Proc. R. Soc. London A362, 425-461 ('78).

17. J.F. Plebanski: Some solutions of complex Einstein equations, J. Math. Phys. 16, 2395-2402 ('75).

18. S.G. Gindikin: Integral geometry and twistors, Lect. Notes in Math. 970, 2-42 ('82).

19. V.E. Zakharov, A.B. Shabat: Integration of nonlinear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering II, Func. Anal. Appl. 13, 166-174 ('79).