数理解析研究所講究録
第 558 巻 1985 年 203-217

Wittenのゲージ場方程式の解空間の構造について

東工大 理 鈴木 範男（Norio Suzuki）

§0. 序

以下，特に断らない限り形式的巾級数の範疇で考える。flatな複素8次元空間における$GL(n,\mathbb{C})$-ゲージ場∇に対し，

$$(0.1)\quad \begin{aligned}&[\nabla_{y_\mu},\nabla_{y_\nu}]=\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\nabla_{y_\alpha},\nabla_{y_\beta}]\\ &[\nabla_{z_\mu},\nabla_{z_\nu}]=-\tfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\nabla_{z_\alpha},\nabla_{z_\beta}]\\ &[\nabla_{y_\mu},\nabla_{z_\nu}]=0 \qquad\qquad (\mu,\nu=0,1,2,3)\end{aligned}$$

なる方程式を考える。ここで$(y,z)=(y_0,y_1,y_2,y_3,z_0,z_1,z_2,z_3)\in\mathbb{C}^8$，$\nabla_{y_\mu}=\partial_{y_\mu}+A_{y_\mu}$は$y_\mu$方向の共変微分であり，ポテンシャル$A_{y_\mu}$，$A_{z_\mu}$達がここでの未知函数である。（$A_{y_\mu}=A_{y_\mu}(y,z)$は$gl(n,\mathbb{C})$に値を持つ$y,z$の形式的巾級数，$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$は$\varepsilon_{0123}=1$なる完全反対称テンソル。尚，Einsteinの規約により総和記号は省略してある。以下同様。）今，$x=\frac{1}{2}(y+z)$，$w=\frac{1}{2}(y-z)$とおくと

$$(0.2)\quad [\nabla_{x_\mu},[\nabla_{x_\mu},\nabla_{x_\nu}]]=0 \qquad (\nu=0,1,2,3)$$

が(0.1)から従う。$\mathbb{C}^8$の4次元部分空間$w=0$で考えればこれは所謂Yang-Mills方程式に他ならない。即ち，Wittenの方程式(0.1)

を満たす8次元ゲージ場を4次元部分空間$W=0$に制限すれば、Yang-Mills場が得られる。しかもこの対応はゲージ変換の自由度を除き単射的である。即ち、

命題1 (0.1)を満たすふたつの8次元ゲージ場∇, $\tilde{\nabla}$が、$W=0$上のゲージ場としてゲージ同値ならば、8次元ゲージ場としてゲージ同値。∎

(但し、ゲージ同値とは、ゲージ変換で互いに移り合える事。ゲージ変換とは、$M_n(\mathbb{C})$に値を持つy, zの巾級数$g=g(y,z)$で可逆なものに対し、ゲージ場∇を$g^{-1}\nabla g$に移す事である。)

従って、Wittenの方程式(0.1)はYang-Mills方程式(0.2)の解の或るクラスを定義する方程式と見做し得る。このクラスは、所謂自己双対場全体、反自己双対場全体を真に含む。(命題6〜9, 定理3、及び§4参照)

我々は、このWittenの方程式を佐藤理論の枠組で扱う事を試みる。即ち、(0.1)を或る線型微分方程式系の可積分条件と見做し、それを経由して、無限次元グラスマン多様体に値を持つ函数の満たすべき微分方程式に書き直す。そこで、高崎氏の自己双対Yang-Mills方程式に関する仕事([6], [7])同様、或る種の初期値問題を考えると、その時間発展は指数函数で記述される。(定理2)

我々の場合が、KP−hierarchyや自己双対Yang-Mills方程式の場合と異なる点は、線型化方程式(1.3)が、所謂スペクトル・パラメターを2個含む点である。(λ_1とλ_2) このため、自己双対Yang-Mills方程式の場合、初期値問題は任意の初期データに関し可解であったのに対し、我々の場合は、初期データの満たすべき微分方程式が現われる。(命題5の(2.4)乃至(2.5)) この事は、スペクトル・パラメターが高次元の場合に共通の現象であるらしく思われる。(例えば、R.S. Ward [8]の提案した高次元可積分ゲージ場方程式の場合：[5]参照)

Wittenの方程式の解の中で、(反)自己双対Yang-Mills場に対応するものを特徴づける事は、Wittenの方程式の由来からしても重要である。我々の立場からは、これを初期データの空間の中で特徴づける事が問題となる。結果としてWittenの方程式の解の初期データを特徴づける方程式に類似のものが得られる。(命題9) これを用いて、例えば、自己双対でも反自己双対でもないYang-Mills場に対応するWitten方程式の有理解等も構成することができる。(§4)

§1. 線型化

変数変換：
$$\begin{cases} \eta_1 = y_0 + iy_1,\ \zeta_1 = y_2 - iy_3,\ \eta_2 = z_0 + iz_1,\ \zeta_2 = z_2 - iz_3 \\ \bar{\eta}_1 = y_0 - iy_1,\ \bar{\zeta}_1 = y_2 + iy_3,\ \bar{\eta}_2 = z_0 - iz_1,\ \bar{\zeta}_2 = z_2 + iz_3 \end{cases}$$

(但し、$(y, z) \in \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4$なので、$\bar{\eta}_1$等は$\eta_1$等の複素共役ではな

い）をすると．(0.1)は

(1.1) $$[-\lambda_1\nabla_{\eta_1}+\nabla_{\bar\zeta_1},\ \lambda_1\nabla_{\zeta_1}+\nabla_{\bar\eta_1}]=0,$$
$$[-\lambda_2\nabla_{\eta_2}+\nabla_{\zeta_2},\ \lambda_2\nabla_{\bar\zeta_2}+\nabla_{\bar\eta_2}]=0,$$
$$[-\lambda_1\nabla_{\eta_1}+\nabla_{\bar\zeta_1},-\lambda_2\nabla_{\eta_2}+\nabla_{\zeta_2}]=[-\lambda_1\nabla_{\eta_1}+\nabla_{\bar\zeta_1},\ \lambda_2\nabla_{\bar\zeta_2}+\nabla_{\bar\eta_2}]=0,$$
$$[\lambda_1\nabla_{\zeta_1}+\nabla_{\bar\eta_1},-\lambda_2\nabla_{\eta_2}+\nabla_{\zeta_2}]=[\lambda_1\nabla_{\zeta_1}+\nabla_{\bar\eta_1},\ \lambda_2\nabla_{\bar\zeta_2}+\nabla_{\bar\eta_2}]=0$$
$$(\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C})$$

と書き直される。(1.1)から特に，$\nabla_{\eta_1},\nabla_{\zeta_1},\nabla_{\eta_2},\nabla_{\bar\zeta_2}$ が互いに可換なる事が従うから、(1.1)を満たすゲージ場∇に対し．$g^{-1}\nabla_{\eta_1}g=\partial_{\eta_1}$, $g^{-1}\nabla_{\zeta_1}g=\partial_{\zeta_1}$, $g^{-1}\nabla_{\eta_2}g=\partial_{\eta_2}$, $g^{-1}\nabla_{\bar\zeta_2}g=\partial_{\bar\zeta_2}$ なるゲージ変換 $\nabla\mapsto g^{-1}\nabla g$ が存在する。従って最初から $A_{\eta_1}=A_{\zeta_1}=A_{\eta_2}=A_{\bar\zeta_2}=0$ の場合．即ち

(1.2) $$[-\lambda_1\partial_{\eta_1}+\nabla_{\bar\zeta_1},\ \lambda_1\partial_{\zeta_1}+\nabla_{\bar\eta_1}]=0,$$
$$[-\lambda_2\partial_{\eta_2}+\nabla_{\zeta_2},\ \lambda_2\partial_{\bar\zeta_2}+\nabla_{\bar\eta_2}]=0,$$
$$[-\lambda_1\partial_{\eta_1}+\nabla_{\bar\zeta_1},-\lambda_2\partial_{\eta_2}+\nabla_{\zeta_2}]=[-\lambda_1\partial_{\eta_1}+\nabla_{\bar\zeta_1},\ \lambda_2\partial_{\bar\zeta_2}+\nabla_{\bar\eta_2}]=0,$$
$$[\lambda_1\partial_{\zeta_1}+\nabla_{\bar\eta_1},-\lambda_2\partial_{\eta_2}+\nabla_{\zeta_2}]=[\lambda_1\partial_{\zeta_1}+\nabla_{\bar\eta_1},\ \lambda_2\partial_{\bar\zeta_2}+\nabla_{\bar\eta_2}]=0$$
$$(\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C})$$

を扱う事にする。（未知函数は $\nabla_{\bar\zeta_1}=\partial_{\bar\zeta_1}+A_{\bar\zeta_1}$ 等のゲージポテンシャル $A_{\bar\zeta_1}=A_{\bar\zeta_1}(\eta_1,\zeta_1,\cdots,\bar\zeta_2)\in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\zeta_1,\cdots,\bar\zeta_2]]$ 等である。）

(1.2)は．$-\lambda_1\partial_{\eta_1}+\nabla_{\bar\zeta_1}$, $\lambda_1\partial_{\zeta_1}+\nabla_{\bar\eta_1}$, $-\lambda_2\partial_{\eta_2}+\nabla_{\zeta_2}$, $\lambda_2\partial_{\bar\zeta_2}+\nabla_{\bar\eta_2}$ が互いに可換．という条件だから．$\psi(\lambda)$に関する線型微分方

程式

$$(1.3)\quad \begin{aligned}&(-\lambda_1\partial_{\eta_1}+\partial_{\bar\zeta_1}+A_{\bar\zeta_1})\psi(\lambda)=0,\\&(\lambda_1\partial_{\zeta_1}+\partial_{\bar\eta_1}+A_{\bar\eta_1})\psi(\lambda)=0,\\&(-\lambda_2\partial_{\eta_2}+\partial_{\zeta_2}+A_{\zeta_2})\psi(\lambda)=0,\\&(\lambda_2\partial_{\bar\zeta_2}+\partial_{\bar\eta_2}+A_{\bar\eta_2})\psi(\lambda)=0\end{aligned}$$

の可積分条件に他ならない。即ち．

命題2　$A_{\bar\zeta_1}, A_{\bar\eta_1}, A_{\zeta_2}, A_{\bar\eta_2}\in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\zeta_1,\cdots,\bar\zeta_2]]$ が (1.2) の解である $\Leftrightarrow$ (1.3) の解 $\psi(\lambda)=\sum_{i,j\geq 0}\psi_{ij}\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}$ ($\psi_{ij}\in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\zeta_1,\cdots,\bar\zeta_2]]$) で $\psi_{00}=1$ なるものが存在する．

$\Leftrightarrow$ $\psi_{ij}\in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\zeta_1,\cdots,\bar\zeta_2]]$ が存在して．($i,j\in\mathbb{Z}$)

$\psi_{00}=1$, $\psi_{ij}=0$ if $i<0$ or $j<0$, かつ

$$(1.4)\quad \begin{aligned}&-\partial_{\eta_1}\psi_{i+1,j}+(\partial_{\bar\zeta_1}+A_{\bar\zeta_1})\psi_{ij}=0,\\&\partial_{\zeta_1}\psi_{i+1,j}+(\partial_{\bar\eta_1}+A_{\bar\eta_1})\psi_{ij}=0,\\&-\partial_{\eta_2}\psi_{i,j+1}+(\partial_{\zeta_2}+A_{\zeta_2})\psi_{ij}=0,\\&\partial_{\bar\zeta_2}\psi_{i,j+1}+(\partial_{\bar\eta_2}+A_{\bar\eta_2})\psi_{ij}=0\qquad (i,j\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

を満たす. ∎

(1.4) で特に $i=j=0$ とすると

$$(1.5)\quad -\partial_{\eta_1}\psi_{10}+A_{\bar\zeta_1}=0,\ \partial_{\zeta_1}\psi_{10}+A_{\bar\eta_1}=0,\ -\partial_{\eta_2}\psi_{01}+A_{\zeta_2}=0,\ \partial_{\bar\zeta_2}\psi_{01}+A_{\bar\eta_2}=0.$$

従って Witten の方程式 (1.2) を解くには (1.5) を (1.4) に代入した非線型微分方程式

$$
\begin{aligned}
(1.6)\quad & -\partial_{\eta_1}\psi_{i+1,j}+\partial_{\bar{\xi}_1}\psi_{ij}+(\partial_{\eta_1}\psi_{10})\psi_{ij}=0,\\
& \partial_{\xi_1}\psi_{i+1,j}+\partial_{\bar{\eta}_1}\psi_{ij}-(\partial_{\xi_1}\psi_{10})\psi_{ij}=0,\\
& -\partial_{\eta_2}\psi_{i,j+1}+\partial_{\xi_2}\psi_{ij}+(\partial_{\eta_2}\psi_{01})\psi_{ij}=0,\\
& \partial_{\bar{\xi}_2}\psi_{i,j+1}+\partial_{\bar{\eta}_2}\psi_{ij}-(\partial_{\bar{\xi}_2}\psi_{01})\psi_{ij}=0 \quad (i,j\in\mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

を解けばよい。正確に言えば．

命題３　関係式(1.5)により．次の(i)と(ii)が１対１に対応する：(i) (1.2)の解 $A=(A_{\bar{\xi}_1}, A_{\bar{\eta}_1}, A_{\xi_2}, A_{\bar{\eta}_2})$

(ii) (1.6)の解 $\psi(\lambda)=\sum_{i,j\geq 0}\psi_{ij}\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}$ $(\psi_{00}=1)$ の次を満たす $\varphi(\lambda)=\sum_{i,j\geq 0}\varphi_{ij}\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}$ を右から掛ける変換を法とする同値類：

$\varphi_{ij}\in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\xi_1,\cdots,\bar{\xi}_2]]$，$\varphi_{00}=1$，かつ

$(-\lambda_1\partial_{\eta_1}+\partial_{\bar{\xi}_1})\varphi(\lambda)=(\lambda_1\partial_{\xi_1}+\partial_{\bar{\eta}_1})\varphi(\lambda)=(-\lambda_2\partial_{\eta_2}+\partial_{\bar{\xi}_2})\varphi(\lambda)=(\lambda_2\partial_{\bar{\xi}_2}+\partial_{\bar{\eta}_2})\varphi(\lambda)=0$ ∎

2. 無限次元グラスマン多様体上の運動

$Z=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，$N=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$，$N^c=Z\setminus N$ とする。($\mathbb{Z}=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$) R を単位元を持つ環とする時．$\psi(\lambda)=\sum_{i,j\geq 0}\psi_{ij}\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}\in R[[\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1}]]$ s.t. $\psi_{00}=1$ に対し．$\xi=(\xi^{ij}_{kl})_{(i,j)\in Z,(k,l)\in N^c}$ なる無限サイズの行列を $(\psi^*_{i-k,j-l})_{(i,j)\in Z,(k,l)\in N^c}$ と $(\psi_{i-k,j-l})_{(i,j)\in N^c,(k,l)\in N^c}$ の積．即ち $\xi^{ij}_{kl}=\sum_{(g,h)\in N^c}\psi^*_{i-g,j-h}\psi_{g-k,h-l}$ で定義する。ここで ψ^*_{ij} とは．$\psi(\lambda)^{-1}=\sum_{i,j\geq 0}\psi^*_{ij}\lambda_1^{-i}\lambda_2^{-j}$ の係数である。例によって $i<0$ 又は $j<0$ の時は $\psi^*_{ij}=\psi_{ij}=0$ と解釈するので ξ^{ij}_{kl} の定義は実質的有限和で well-defined。更にこの時．

$\Lambda_1=(\delta^{i+1}_k\delta^j_\ell)_{(i,j)\in Z,(k,\ell)\in Z}$, $\Lambda_2=(\delta^i_k\delta^{j+1}_\ell)_{(i,j)\in Z,(k,\ell)\in Z}$

(但し δ^i_k はKroneckerのデルタ)とおくと．$\Lambda_1\xi=\xi C_1$, $\Lambda_2\xi=\xi C_2$

$C_1=(\xi^{i+1\,j}_{k\ell})_{(i,j)\in N^c,(k,\ell)\in N^c}$, $C_2=(\xi^{i\,j+1}_{k\ell})_{(i,j)\in N^c,(k,\ell)\in N^c}$

また．$\xi^{ij}_{k\ell}=\begin{cases}\delta^i_k\delta^j_\ell & (i,j)\in N^c\\ 0 & i<k \text{ or } j<\ell\\ * & \text{otherwise}\end{cases}$ が成り立つ。大切な事は．

これらが．上の様にして得られる枠 ξ の特徴づけになっていることである：

<u>命題4</u>　$\xi=(\psi^*_{i-k,j-\ell})_{(i,j)\in Z,(k,\ell)\in N^c}\cdot(\psi_{i-k,j-\ell})_{(i,j)\in N^c,(k,\ell)\in N^c}$

により．次の(i)と(ii)が1対1に対応する：

(i)　$\psi(\lambda)\in R[[\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1}]]$ s.t. $\psi_{00}=1$

(ii)　$\xi=(\xi^{ij}_{k\ell})_{(i,j)\in Z,(k,\ell)\in N^c}$, $\xi^{ij}_{k\ell}\in R$ で次を満たすもの：

(2.1.A)　$\xi^{ij}_{k\ell}=\delta^i_k\delta^j_\ell$　$(i,j)\in N^c$

(2.1.B)　$\xi^{ij}_{k\ell}=0$　　$i<k\geq 0$ or $j<\ell\geq 0$

(2.1.C)　$\Lambda_1\xi=\xi C_1$, $\Lambda_2\xi=\xi C_2$ for ${}^\exists C_1, C_2$: $N^c\times N^c$-行列

逆対応 $\xi\mapsto\psi(\lambda)$ は $\psi_{ij}=-\xi^{00}_{-i,-j}$ で与えられる。■

<u>定理1</u>　$R=M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\zeta_1,\cdots,\bar\eta_2,\bar\zeta_2]]$ とする時．命題4の対応 $\psi(\lambda)\leftrightarrow\xi$ により(1.6)は次と同値：

(2.2)　$(-\Lambda_1\partial_{\eta_1}+\partial_{\zeta_1})\xi=\xi A_1$,

$(\Lambda_1\partial_{\bar\zeta_1}+\partial_{\bar\eta_1})\xi=\xi B_1$,

$(-\Lambda_2\partial_{\eta_2}+\partial_{\zeta_2})\xi=\xi A_2$,

$(\Lambda_2\partial_{\bar\zeta_2}+\partial_{\bar\eta_2})\xi=\xi B_2$

for ${}^\exists A_1, B_1, A_2, B_2$: $N^c\times N^c$-行列

ここでA_1, B_1, A_2, B_2は存在すればξに対し一意的であって，(2.2)は次の様に書き下される：

$$
(2.3)\quad
\begin{aligned}
-\partial_{\eta_1}\xi^{i+1\,j}_{kl}+\partial_{\bar\zeta_1}\xi^{ij}_{kl}&=-\sum_{h\geq 0}\xi^{ij}_{-1h}\,\partial_{\eta_1}\xi^{0h}_{kl}\\
\partial_{\zeta_1}\xi^{i+1\,j}_{kl}+\partial_{\bar\eta_1}\xi^{ij}_{kl}&=\sum_{h\geq 0}\xi^{ij}_{-1h}\,\partial_{\zeta_1}\xi^{0h}_{kl}\\
-\partial_{\eta_2}\xi^{i\,j+1}_{kl}+\partial_{\zeta_2}\xi^{ij}_{kl}&=-\sum_{g\geq 0}\xi^{ij}_{g-1}\,\partial_{\eta_2}\xi^{g0}_{kl}\\
\partial_{\bar\zeta_2}\xi^{i\,j+1}_{kl}+\partial_{\bar\eta_2}\xi^{ij}_{kl}&=\sum_{g\geq 0}\xi^{ij}_{g-1}\,\partial_{\bar\zeta_2}\xi^{g0}_{kl}
\end{aligned}
\qquad \blacksquare
$$

我々は(1.6)乃至(2.1)&(2.2)の解空間の構造を調べるために高崎[8]，[7]の自己双対Yang-Millsの場合同様、$\bar\zeta_1=\bar\eta_1=\zeta_2=\bar\eta_2=0$なる部分空間を初期空間とする初期値問題を考える。我々の場合，この初期値問題が任意の初期データに対し可解，ではない点が異なる。実際，例えば(1.6)において$i=-1$とすれば，$-\partial_{\eta_1}\psi_{0j}=0$, $\partial_{\zeta_1}\psi_{0j}=0$が従う。これらは時間変数$\bar\zeta_1, \bar\eta_1, \zeta_2, \bar\eta_2$に関する微分を含まない，時間発展に関係ない方程式であり，初期データは少なくともこれらの微分方程式を満たしていなければならない。一般のi, jに対するψ_{ij}に関しても，例えば$-\partial_{\eta_1}\psi_{1j}+\partial_{\bar\zeta_1}\psi_{0j}+(\partial_{\eta_1}\psi_{10})\cdot\psi_{0j}=0$の両辺を$\partial_{\eta_1}$で微分すれば，$\partial_{\eta_1}\psi_{0j}=0$を用いて$\partial_{\eta_1}^2(-\psi_{1j}+\psi_{10}\cdot\psi_{0j})=0$を得る様に，順々に同様の関係式が得られる。実はこれらはξの言葉で書くと導出も記述も容易である：

<u>命題5</u>　(2.1)&(2.2)から次が従う：

(2.4) $k\geq 0,\ p+q>i-k \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\zeta_1}^q \xi_{k\ell}^{ij}=0 \quad (p,q\in\mathbb{N},\ (i,j)\in\mathbb{Z},\ (k,\ell)\in\mathbb{N}^c)$

$\ell\geq 0,\ p+q>j-\ell \Rightarrow \partial_{\eta_2}^p \partial_{\zeta_2}^q \xi_{k\ell}^{ij}=0 \quad (p,q\in\mathbb{N},\ (i,j)\in\mathbb{Z},\ (k,\ell)\in\mathbb{N}^c)$

尚. これらは(2.1)の仮定の下. 次と同値:

(2.5) $p+q=i+1 \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\zeta_1}^q \xi_{0\ell}^{i0}=\partial_{\eta_1}^p \partial_{\zeta_1}^q\left(-\sum_{g=0}^{i}\psi_{i-g,0}^{*}\psi_{g,-\ell}\right)=0$

$p+q=j+1 \Rightarrow \partial_{\eta_2}^p \partial_{\zeta_2}^q \xi_{k0}^{0j}=\partial_{\eta_2}^p \partial_{\zeta_2}^q\left(-\sum_{h=0}^{j}\psi_{0,j-h}^{*}\psi_{-k,h}\right)=0$ ■

逆に(2.4)(又は(2.5))を満たす任意の初期データに対し. 初期値問題は可解である事がわかる:

<u>定理2</u> (2.1)と(2.4)(又は(2.5))を満たす任意の$\xi^{(0)}=(\xi_{k\ell}^{(0)ij})_{(i,j)\in\mathbb{Z},(k,\ell)\in\mathbb{N}^c}$ $\xi_{k\ell}^{(0)ij}\in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\zeta_1,\eta_2,\zeta_2]]$に対し. $\xi|_{\bar\zeta_1=\bar\eta_1=\bar\zeta_2=\bar\eta_2=0}=\xi^{(0)}$及び(2.1)(2.2)を満たす$\xi=(\xi_{k\ell}^{ij})_{(i,j)\in\mathbb{Z},(k,\ell)\in\mathbb{N}^c}$, $\xi_{k\ell}^{ij}\in M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\zeta_1,\eta_2,\zeta_2,\bar\eta_1,\bar\zeta_1,\bar\eta_2,\bar\zeta_2]]$が一意的に存在し. 次の公式で与えられる:

$$\tilde\xi=\exp(\bar\zeta_1\Lambda_1\partial_{\eta_1}-\bar\eta_1\Lambda_1\partial_{\zeta_1}+\bar\zeta_2\Lambda_2\partial_{\eta_2}-\bar\eta_2\Lambda_2\partial_{\zeta_2})\xi^{(0)}$$

$$\tilde\xi=\begin{pmatrix}\tilde\xi_{(-)}\\ \tilde\xi_{(+)}\end{pmatrix},\quad \tilde\xi_{(-)}=(\tilde\xi_{k\ell}^{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^c,(k,\ell)\in\mathbb{N}^c},\quad \tilde\xi_{(+)}=(\tilde\xi_{k\ell}^{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N},(k,\ell)\in\mathbb{N}^c}$$

とする時. $\xi=\tilde\xi\cdot(\tilde\xi_{(-)})^{-1}$ ■

定理2の意味する所は. (2.1.C)&(2.2)が枠の取りかえ$\xi\mapsto\xi P$ (Pは各成分が$M_n(\mathbb{C})[[\eta_1,\cdots,\bar\eta_2,\bar\zeta_2]]$に属する$\mathbb{N}^c\times\mathbb{N}^c$-行列)で不変な方程式であることから. (2.1.A)の制限をはずして適当な枠に取りかえれば. (2.2)において$A_1=B_1=A_2=B_2=0$とした定数係数<u>線型</u>微分方程式になるということである。

必ずしも(2.4)を満たさない。一般の初期データから出発して同じ $\mathcal{L}xp$ の時間発展をさせれば(2.1.C)&(2.2)を矢張り満たす。更に定理2同様，右から $(\xi_{(-)})^{-1}$ を掛けて枠を標準化すれば(2.1.A)をも満たす。しかし，この場合，(2.1.B)は全く保証されない。(2.4)は丁度，この(2.1.B)が，時間発展で保存される事を保証する条件になっている。

かくして，(1.6)乃至(2.1)&(2.2)の解空間の構造は，部分空間 $\zeta_1=\eta_1=\zeta_2=\eta_2=0$ における方程式(2.5)乃至(2.4)の解空間の構造に帰着した。$\psi(\lambda)$ が λ_1,λ_2 の有限級数の場合に(2.5)を具体的に解く事は或る程度可能だが，(2.4)乃至(2.5)を代数解析的に見通しよく解析する事は今後の課題である。

3. Yang-Mills場との関係

$W=0$ 上の自己双対場 ∇，即ち共変微分 $\nabla_{x_\mu}=\partial_{x_\mu}+A_{x_\mu}(x)$ で

$$(3.1)\quad [\nabla_{x_\mu},\nabla_{x_\nu}]=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\nabla_{x_\alpha},\nabla_{x_\beta}]\quad(\mu,\nu=0,1,2,3)$$

を満たすものに対し，yzー空間上のゲージ場 $\widetilde{\nabla}$ を

$$(3.2)\quad \widetilde{\nabla}_{y_\mu}=\partial_{y_\mu}+\widetilde{A}_{y_\mu},\quad \widetilde{A}_{y_\mu}=A_{x_\mu}(y)$$
$$\widetilde{\nabla}_{z_\mu}=\partial_{z_\mu}+\widetilde{A}_{z_\mu},\quad \widetilde{A}_{z_\mu}=0$$

で定義すれば

$$(3.3)\quad \begin{aligned}&[\widetilde{\nabla}_{y_\mu},\widetilde{\nabla}_{y_\nu}]=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}[\widetilde{\nabla}_{y_\alpha},\widetilde{\nabla}_{y_\beta}]\\&[\widetilde{\nabla}_{z_\mu},\widetilde{\nabla}_{z_\nu}]=0\\&[\widetilde{\nabla}_{y_\mu},\widetilde{\nabla}_{z_\nu}]=0\end{aligned}\qquad(\mu,\nu=0,1,2,3)$$

従ってまた特にWitten方程式(0.1)の解でもあり、しかも $\tilde{\nabla}_{x_\mu} = \partial_{x_\mu} + \tilde{A}_{x_\mu}$, $\tilde{A}_{x_\mu} = \tilde{A}_{y_\mu} + \tilde{A}_{z_\mu} = A_{x_\mu}(y) = A_{x_\mu}(x+w)$ だから $\tilde{\nabla}_{x_\mu}|_{w=0} = \nabla_{x_\mu}$ ($\mu=0,1,2,3$)。つまり、任意の自己双対場は、Wittenの方程式(0.1)を $w=0$ に制限して得られる様なYang-Mills場のクラスに含まれる。(3.3)はゲージ不変だから命題1からして、自己双対場に対応する(0.1)の解はすべて(3.3)を満たす事がわかるが、逆に(3.3)を満たす任意のゲージ場は、ゲージ変換により $\tilde{A}_{z_\mu}=0$ ($\mu=0,1,2,3$) としてよく、$0=[\partial_{z_\nu}, \tilde{\nabla}_{y_\mu}] = \frac{\partial \tilde{A}_{y_\mu}}{\partial z_\nu}$ 即ち $\tilde{A}_{y_\mu} = \tilde{A}_{y_\mu}(y)$ だから $A_{x_\mu} = \tilde{A}_{y_\mu}(x)$ と定義すれば、$\nabla_{x_\mu} = \tilde{\nabla}_{x_\mu}|_{w=0}$ は $w=0$ 上の自己双対場である。まとめると、

<u>命題6</u> Wittenの方程式(0.1)の解を $w=0$ に制限した時、

自己双対場に対応 $\Leftrightarrow [\nabla_{z_\mu}, \nabla_{z_\nu}] = 0$ ($\mu,\nu=0,1,2,3$)

反自己双対場に対応 $\Leftrightarrow [\nabla_{y_\mu}, \nabla_{y_\nu}] = 0$ ($\mu,\nu=0,1,2,3$)

任意の(反)自己双対場は、この仕方で得られる。■

$[-\lambda_2\partial_{\eta_2}+\nabla_{\xi_2}, \lambda_2\partial_{\bar{\xi}_2}+\nabla_{\bar{\eta}_2}]=0$ の仮定の下、$\partial_{\eta_2}, \nabla_{\xi_2}, \nabla_{\bar{\eta}_2}, \partial_{\bar{\xi}_2}$ が互いに可換 $\Leftrightarrow [\partial_{\eta_2}, \nabla_{\bar{\eta}_2}] = [\partial_{\eta_2}, \nabla_{\xi_2}] = [\partial_{\bar{\xi}_2}, \nabla_{\bar{\eta}_2}] = 0$。(1.5)を代入すれば、これは更に $\partial_{\eta_2}\partial_{\bar{\xi}_2}\psi_{01} = \partial^2_{\eta_2}\psi_{01} = \partial^2_{\bar{\xi}_2}\psi_{01} = 0$ と同値。

<u>命題7</u> (1.6)の解 $\psi(\lambda)$ が

自己双対場に対応 $\Leftrightarrow \partial^2_{\eta_2}\psi_{01} = \partial_{\eta_2}\partial_{\xi_2}\psi_{01} = \partial^2_{\xi_2}\psi_{01} = 0$

反自己双対場に対応 $\Leftrightarrow \partial^2_{\eta_1}\psi_{10} = \partial_{\eta_1}\partial_{\xi_1}\psi_{10} = \partial^2_{\xi_1}\psi_{10} = 0$

<u>命題8</u>（[3]のProp. 6の訂正）(2.1) & (2.2)の解ξが

自己双対場に対応する $\Longleftrightarrow \partial_{\eta_2}^2 \xi^{00}_{0-1} = \partial_{\eta_2}\partial_{\zeta_2}\xi^{00}_{0-1} = \partial_{\zeta_2}^2 \xi^{00}_{0-1} = 0$

反自己双対場に対応する $\Longleftrightarrow \partial_{\eta_1}^2 \xi^{00}_{-10} = \partial_{\eta_1}\partial_{\zeta_1}\xi^{00}_{-10} = \partial_{\zeta_1}^2 \xi^{00}_{-10} = 0$

すべての(反)自己双対場はこの仕方で得られる。■

但し、注意すべき事は、上の条件だけでは時間発展で安定でないということである。つまり、初期空間 $\zeta_1=\bar{\eta}_1=\zeta_2=\bar{\eta}_2=0$ において、例えば ψ_{01} が η_2 と ζ_2 の高々1次の式であっても、初期空間の外で同じ条件を満たすとは限らない。実際、例えば $-\partial_{\eta_1}\psi_{11}+\partial_{\zeta_1}\psi_{01}+(\partial_{\eta_1}\psi_{10})\psi_{01}=0$ において、両辺を $\partial_{\eta_2}^2$ で微分すれば、自己双対場に対応する場合、$\partial_{\eta_2}^2\psi_{01}=0$ から $\partial_{\eta_1}\partial_{\eta_2}^2(-\psi_{11}+\psi_{10}\psi_{01})=0$ が出る。同様に、(1.6)との両立性から、一般の i, j に対する ψ_{ij} が、初期空間において満たすべき微分方程式が順に求まる。この場合も、導出・記述ともξの言葉が有利である：

<u>命題9</u>　(反)自己双対場に対応する(2.1) & (2.2)の解に対し

(3.4)　$p+q \ge i-k,\ k \ge 0,\ r+s > j-l \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\zeta_1}^q \partial_{\eta_2}^r \partial_{\zeta_2}^s \xi^{ij}_{kl} = 0$

$\left(p+q > i-k,\ r+s \ge j-l,\ l \ge 0 \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\zeta_1}^q \partial_{\eta_2}^r \partial_{\zeta_2}^s \xi^{ij}_{kl} = 0 \right)$

これは(2.1)の条件下、次と同値

(3.5)　$p+q \ge i,\ r+s > -l \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\zeta_1}^q \partial_{\eta_2}^r \partial_{\zeta_2}^s \xi^{i0}_{0l} = 0$

$\left(p+q > -k,\ r+s \ge j \Rightarrow \partial_{\eta_1}^p \partial_{\zeta_1}^q \partial_{\eta_2}^r \partial_{\zeta_2}^s \xi^{0j}_{k0} = 0 \right)$ ■

定理３　(2.1) & (2.2) の解 ξ に対し．$\xi^{(0)}=\xi|_{\bar{\zeta}_1=\bar{\eta}_1=\zeta_2=\bar{\eta}_2=0}$ とおく時．ξ が(反)自己双対場に対応するための必要十分条件は．$\xi^{(0)}$ が (3.4) 乃至 (3.5) を満たすことである。

§4. 例

命題10　命題４の対応で $\psi(\lambda)\Leftrightarrow\xi$，それぞれの初期値を $\psi^{(0)}(\lambda)\Leftrightarrow\xi^{(0)}$ とする．($\psi(\lambda)|_{\bar{\zeta}_1=\bar{\eta}_1=\zeta_2=\bar{\eta}_2=0}=\psi^{(0)}(\lambda)$, $\xi|_{\bar{\zeta}_1=\bar{\eta}_1=\zeta_2=\bar{\eta}_2=0}=\xi^{(0)}$)

$\psi(\lambda)$ が (1.6) の解の時．任意の $p,q\in\mathbb{N}$ に対し次は同値：

(i) $i>p$ 又は $j>q \Rightarrow \psi^{(0)}_{ij}=0$

(ii) $i>p$ 又は $j>q \Rightarrow \psi_{ij}=0$

(iii) $k<-p$ 又は $l<-q \Rightarrow \xi^{(0)ij}_{kl}=0 \quad ((i.j)\in\mathbb{Z})$

(iv) $k<-p$ 又は $l<-q \Rightarrow \xi^{ij}_{kl}=0 \quad ((i.j)\in\mathbb{Z})$ ■

従って $\psi^{(0)}(\lambda)$ が λ_1,λ_2 の有限級数になる様な初期値から出発すれば、解 $\psi(\lambda)$ も λ_1,λ_2 の有限級数として得られる。そこで今、$\psi(\lambda)=1+\psi_{10}\lambda_1^{-1}+\psi_{01}\lambda_2^{-1}$ の場合を考える。$\xi^{i0}_{0l}=-\sum_{g=0}^{i}\psi^*_{i-g,0}\psi_{g,-l}$

$$=\begin{cases}-\psi^*_{i0}\psi_{01} & (i\geq 0,\ l=-1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}\quad \xi^{0j}_{k0}=-\sum_{h=0}^{j}\psi^*_{0,j-h}\psi_{-k,h}=\begin{cases}-\psi^*_{0j}\psi_{10} & (j\geq 0,k=-1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

$\psi^*_{i0}=(-\psi_{10})^i$, $\psi^*_{0j}=(-\psi_{01})^j$ $(i,j\geq 0)$ なので、初期値 $\psi^{(0)}(\lambda)=1+\psi^{(0)}_{10}\lambda_1^{-1}+\psi^{(0)}_{01}\lambda_2^{-1}$ に対する条件 (2.5) は

$$p+q=i+1\Rightarrow \partial^p_{\eta_1}\partial^q_{\zeta_1}(\psi^{(0)i}_{10}\cdot\psi^{(0)}_{01})=0,\quad p+q=j+1\Rightarrow \partial^p_{\eta_2}\partial^q_{\bar{\zeta}_2}(\psi^{(0)j}_{01}\cdot\psi^{(0)}_{10})=0$$

更にこの条件の下.

自己双対場に対応 $\Leftrightarrow \partial_{\eta_1}^{p}\partial_{\xi_1}^{i-p}\psi_{10}^{(0)i}\cdot\partial_{\eta_2}^{r}\partial_{\bar{\xi}_2}^{2-r}\psi_{01}^{(0)}=0\ (i\geq 0, p=0,\cdots,i, r=0,1,2)$

$\Leftrightarrow \partial_{\eta_2}^{r}\partial_{\bar{\xi}_2}^{2-r}\psi_{01}^{(0)}=0\quad (r=0,1,2)$

反自己双対場に対応 $\Leftrightarrow \partial_{\eta_1}^{p}\partial_{\xi_1}^{2-p}\psi_{10}^{(0)}=0\quad (p=0,1,2)$

そこで. 例えば $\psi_{10}^{(0)}=a\eta_1^2+b\xi_1^2$, $\psi_{01}^{(0)}=c\eta_2^2+d\bar{\xi}_2^2$, $a,b,c,d\in M_n(\mathbb{C})$

とおけば. $\begin{cases}\text{自己双対場に対応} \Leftrightarrow c=d=0\\ \text{反自己双対場に対応} \Leftrightarrow a=b=0\end{cases}$

また. $\begin{cases}A_{\xi_1}^{(0)}=\partial_{\eta_1}\psi_{10}^{(0)}=2a\eta_1,\ A_{\eta_1}^{(0)}=-\partial_{\xi_1}\psi_{10}^{(0)}=-2b\xi_1\\ A_{\bar{\xi}_2}^{(0)}=\partial_{\eta_2}\psi_{01}^{(0)}=2c\eta_2,\ A_{\eta_2}^{(0)}=-\partial_{\bar{\xi}_2}\psi_{01}^{(0)}=-2d\bar{\xi}_2\end{cases}$

なので. $[a,b],[c,d]\neq 0$, $a,b,c,d\neq 0$ とすれば. 特に自己双対場にも反自己双対場にも対応せず. また abelian でもない。また. 更に $\psi_{10}^{(0)}\psi_{01}^{(0)}=\psi_{01}^{(0)}\psi_{10}^{(0)}=0$ 即ち $ac=ca=ad=da=bc=cb=bd=db=0$ ならば特に(2.5)を満たす。

この様な a,b,c,d の組としては. 例えば

$$a=\begin{pmatrix}0&&&&&\\1&0&&&&\\&0&0&&&\\&&0&0&&\\&&&0&0&\\&&&&0&0\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\&1&0&&&\\&&0&0&&\\&&&0&0&\\&&&&0&0\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\&0&0&&&\\&&0&0&&\\&&&1&0&\\&&&&0&0\end{pmatrix},\ d=\begin{pmatrix}0&&&&&\\0&0&&&&\\&0&0&&&\\&&0&0&&\\&&&0&0&\\&&&&1&0\end{pmatrix}$$

がある。一般に.

<u>命題11</u> 命題10の場合に. 各 $\psi_{ij}^{(0)}$ 乃至 各 $\xi_{ij}^{(0)}$ が有理函数ならば. 各 ψ_{ij}, 各 ξ_{ij} も有理函数。■

が成り立つので. 上の例は有理解(各 ψ_{ij}, ξ_{ij} が有理函数)である。

参考文献

[1] Sato, M. : Soliton equations as dynamical systems on an infinite dimensional Grassmann manifold. 数理研講究録 439, 30-46, (1981)

[2] Sato, M. & Sato, Y. : Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold. Lecture Notes in Num. Appl. Anal. 5 259-271 (1982)

[3] Suzuki, N. : Structure of the solution space of Witten's gauge-field equations. Proc. Japan Acad., 60 A, 141-144 (1984)

[4] ——— : General solutions of Witten's gauge-field equations, Proc. Japan Acad. 60 A, 252-255 (1984)

[5] ——— : Higher-dimensional gauge-field equations and the universal Grassmann manifold. in preparation.

[6] Takasaki, K. : On the structure of solutions to the self-dual Yang-Mills equations. Proc. Japan Acad. 59 A, 418-421 (1983)

[7] ——— : A new approach to the self-dual Yang-Mills equations. Commun. Math. Phys., 94, 35-59 (1984)

[8] Ward, R. S. : Completely solvable gauge-field equations in dimension greater than four. Durham preprint (1983)

[9] Witten, E. : An interpretation of classical Yang-Mills fields. Phys. Lett. 77 B, 394-398 (1978)