数理解析研究所講究録
第 558 巻 1985 年 236-264



# 作用素としての大内の解
## —非正則度条件の必要性—

東大理　小松彦三郎 ( Hikosaburo Komatsu )

## 1. 特異同次解

$P(z,\partial)$ を $\mathring{z}\in\mathbb{C}^{n+1}$ の近傍 $\Omega_0$ で定義された整型函数を係数とする $m$ 階の線型偏微分作用素, $\varphi(z)$ を $\Omega_0$ で定義された整型函数で, $S=\{z\in\Omega_0;\ \varphi(z)=0\}$ は $\mathring{z}$ を通る一定の重複度 $d$ をもつ特性面とする. すなわち, $\varphi(\mathring{z})=0$, $\mathrm{grad}\,\varphi(z)$ は $S$ 上 $0$ でなく, $z\in S$ に対し $(z,\mathrm{grad}\,\varphi(z))$ は特性方程式 $\sigma(P)(z,\xi)=0$ のちょうど $d$ 重の零点であるとする. このとき,一般性を失うことなく

(1) $\qquad \sigma(P)(z,\mathrm{grad}\,\varphi(z))\equiv 0 \quad , \quad z\in\Omega_0,$

としてよい. さらに, $S$ の上の $\sigma(P)$ の単純因子に関する陪特性曲線は超平面 $\{z\in\Omega_0;\ z_0=\mathring{z}_0\}$ と横断的に交わると仮定する. 以上の仮定の下で, $S$ にのみ特異性のある解析的同次解を作る問題は古くから扱われた. 浜田[9, 10]は

$g_0(z'), \cdots, g_{d-1}(z')$ が $S' = \{z' \in \mathbb{C}^n ;\ \varphi(\mathring{z}_0, z') = 0\}$ を極とする $n$ 変数の有理型函数であるとき，初期値問題

$$(2) \qquad \begin{cases} P(z,\partial)u(z) = 0 \\ \partial_0^{\,k} u(\mathring{z}_0, z') = g_k(z'), \quad k = 0, \cdots, d-1 \end{cases}$$

は $S$ のみに特異点をもつ解析解 $u(z)$ をもつことを証明し，大内 [31,32] はこのような解は $S$ の近傍で整型な解の差を除いて一意であること，および $P$ が後で述べる仮定をみたすとき，$z$ が $S$ に近ずくときの $u(z)$ の漸近的挙動を明らかにした。浜田の方法も大内の方法も，まず形式解を構成し，次にその収束を証明するのであるが，形式解の構成法は異なる。

## 2. 形式解

$w(X)$ を 1 変数の（超）函数，$w^{(i)}(X)$ をその導函数とする。Leibniz の公式により

$$(3) \quad P(z,\partial)\bigl(w(\varphi(z))u(z)\bigr) = \sum_{i=0}^{m} w^{(i)}(\varphi)\, P_{\varphi}^{m-i}(z,\partial)u(z)$$

となる高々 $m-i$ 階の偏微分作用素 $P_{\varphi}^{m-i}(z,\partial)$ がある。特に，$\lambda$ をパラメータとして，$w(X) = e^{\lambda X}$ とすれば，

$$(4) \quad P(z,\partial)\bigl(e^{\lambda\varphi(z)}u(z)\bigr) = e^{\lambda\varphi(z)} P_{\varphi}(z,\partial,\lambda)u(z),$$

$$(5)\qquad P_\varphi(z,\partial,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}P_\varphi^{m-i}(z,\partial)\,\lambda^i$$

と書ける.

波形函数 $w^{(j)}(x)$, $j\in\mathbb{Z}$, を $dw^{(j)}/dx=w^{(j+1)}$ をみたす(超)函数族とするとき, 級数

$$(6)\qquad u(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}u_j(z)\,w^{(j)}(\varphi(z))$$

が $P(z,\partial)u(z)=0$ の形式解であるとは, 各項に(3)を適用, 次に項の順序を交換したときの $w^{(j)}(\varphi(z))$ の係数

$$(7)\qquad \sum_{i=0}^{m}P_\varphi^{m-i}(z,\partial)\,u_{j-i}(z)=0$$

がすべての $j$ に対しなりたつことであると定義する.

波形函数として Hadamard, 清畑らは, $\alpha$ を実数とし

$$w^{(j)}(x)=\begin{cases}x_+^{\alpha-j}/\Gamma(\alpha-j+1), & \alpha-j\neq-1,-2,-3,\cdots\\ \delta^{(j-\alpha-1)}(x), & \alpha-j=-1,-2,\cdots\end{cases}$$

をとった. 浜田らは $w^{(j)}(x)=f^{(j+k)}(x)$,

$$(8)\qquad f^{(j)}(x)=\begin{cases}(-1)^j j!\,x^{-j-1}, & j\geq 0,\\ \dfrac{x^{-j-1}}{(-j-1)!}\left\{\log x-\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{-j-1}\right)\right\}, & j<0\end{cases}$$

を用いて(2)を解いた. これらの場合(6)は収束して, 真

の解となる．P. D. Lax [24] は $w^{(j)}(x) = \lambda^j e^{\lambda x}$ を用いた．このときは (6) は収束しないのが普通で漸近解ともよばれる．条件 (7) からわかるように，形式解であるかどうかは波形函数によらない．そこで Lax の形をとり，$\lambda, \lambda^{-1}$ に関する形式的巾級数

$$(9) \qquad u(z, \lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j(z) \lambda^j$$

が，形式的巾級数として

$$(10) \qquad P_\varphi(z, \partial, \lambda) u(z, \lambda) = 0$$

をみたすとき，形式解とよぶのが適当である．これを作用素としての形式解とよぶ．任意に，一つの波形函数 $w^{(0)}(x)$ をあたえたとき，(6) は形式的に

$$(11) \qquad u(z) = u(z, \partial_\varphi) w^{(0)}(\varphi)$$

と書けるからである．

## 3．非正則度と形式解の評価

第二超局所化理論の立場では Lagrange 多様体 $\Lambda = \{(z, \mathbb{C}\, \mathrm{grad}\, \varphi(z));\ z \in S\}$ に関する非正則度が定義できるだろうが，ここではより原始的に，$\varphi$ を単純特性位相函数とする微分作用素 $K(z, \partial)$ に関する非正則度の定義 [17]

をおもいだしておく．超局所的定義については青木[1]を見よ．

§1の仮定の下で，$\dot{z}$ の近傍で定義された整型函数を係数とする偏微分作用素 $K(z,\partial)$ があり，$(\dot{z}, \operatorname{grad}\varphi(\dot{z}))$ は特性多項式 $\sigma(K)$ の一重の零点となる．さらに，偏微分作用素 $Q_i(z,\partial)$ および $d_i = 0, 1, \cdots, \infty$ を用いて

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
P(z,\partial) = {} & Q_m(z,\partial)\, K(z,\partial)^{d_m} \\
& + Q_{m-1}(z,\partial)\, K(z,\partial)^{d_{m-1}} \\
& + \cdots \\
& + Q_0(z,\partial)\, K(z,\partial)^{d_0}
\end{aligned}
$$

と表わすことができる．ここで，$Q_i(z,\partial) \equiv 0$，$d_i = \infty$ または $\operatorname{ord}(Q_i K^{d_i}) = i$ かつ $K$ の特性多様体 $Ch(K) = \{(z,\xi);\, \sigma(K)(z,\xi) = 0\}$ の上で $\sigma(Q_i)(z,\xi) \neq 0$．このとき，

$$
(13)\qquad \sigma = \max\left\{1,\ \max_{0 \leqq i \leqq m-1} \frac{d_m - d_i}{m - i}\right\}
$$

を $P$ の $K$ に関する非正則度という．[5]で類似の分解が導入されたことにちなんで(12)を $P$ の De Paris 分解という．これは一意的でなく，座標系のとり方にも依存するが，非正則度は超局所的に不変な量である．$d_m = d$ かつ定義から明らかなように $1 \leqq \sigma \leqq d$ が成立する．

$\sigma = 1$ のとき $P$ は $K$ (または $(\mathring{z}, \mathrm{grad}\,\varphi(\mathring{z}))$) に関して Levi 条件をみたすという.

浜田 [10] の評価を少し改良して, [17] で次の定理を証明した.

定理 1. 以上の仮定の下で, $h_0(z'), \cdots, h_{d-1}(z')$ を $\mathring{z}'$ の近傍で定義された任意の $n$ 変数の整型函数とするとき, $\mathring{z}$ の近傍 $\Omega_1$ 上の整型函数 $u_j(z)$ を係数とする作用素としての形式解 (9) で, 初期条件

$$(14) \qquad \partial_0^{\,k} u_j(\mathring{z}_0, z') = \delta_{j,0}\, h_k(z'), \quad 0 \leqq k < d,$$

および次の評価をみたすものがある:

$$(15) \qquad |u_j(z)| \leqq \begin{cases} C^{-j+1}(-j)!\,, & j \leqq 0 \\ C^{j+1}\left(\dfrac{|z_0 - \mathring{z}_0|^j}{j!}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, & j > 0,\ \sigma > 1 \\ 0\,, & j > 0,\ \sigma = 1. \end{cases}$$

ここで $C$ は定数である.

上で述べた大内の一意性定理を用いれば, $j \leqq 0$ に対しては (15), $j > 0$ に対してはもう少し一般に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $C_\varepsilon$ があり

$$|u_j(z)| \leqq C_\varepsilon\, \varepsilon^j / j!$$

をみたす解は一意であることがわかる.

[17] ではこの評価を用いて Gevrey 族の零解, 特異性スペクトルの小さい解を構成した. これは上からの評価であるが, 大内の解析 [31] を用いれば, 下からの評価が得られる. 大内は作用素としての形式解 $u(z,\lambda)$ に, 初期値 $g_i(z')$ の Laplace 変換を掛けたものを評価しているが, $u(z,\lambda)$ のみに対する結果として述べれば次のようになる.

<u>定理2.</u> 非正則度 $\sigma > 1$, かつ $I_0 = \{i \in \{0,1,\cdots,d\};\ \sigma(m-i) = d-d_i\}$ として $\tau$ に関する代数方程式

$$(16)\qquad \sum_{i\in I_0} \sigma(Q_i)(\mathring{z}, \operatorname{grad}\varphi(\mathring{z}))\,\tau^{d_i} = 0$$

は単根のみをもつとする. このとき,

$$(17)\qquad \alpha = 1 - \frac{1}{\sigma} = \frac{\ell}{q},\quad (q,\ell) = 1,\quad 0 < \alpha < 1,$$

で有理数 $\alpha$ を定義し, その分母を $q$ とすれば, 形式解は次のように分解される:

$$u(z,\lambda) = u_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}(z,\lambda) + u_{\mathrm{III}}(z,\lambda).$$

ここで $u_{\mathrm{III}}(z,\lambda)$ はその整型函数を係数とする $\lambda^{-1/q}$ の形式的巾級数

$$u_{\mathrm{III}}(z,\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{-1} u_{\mathrm{III},j}(z)\,\lambda^{j/q}$$

であり，係数 $u_{\mathrm{III},j}(z)$ は $M$ を定数として

$$(18) \qquad |u_{\mathrm{III},j}(z)| \leqq M^{1-j}\,\Gamma(1-j/q)$$

をみたす．$u_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}(z,\lambda)$ は $\lambda^{1/q}$ と $\lambda^{-1/q}$ の形式的巾級数であり，ある $\Lambda_1$ に対し $|\lambda|>\Lambda_1$ で収束する．さらに $\Sigma$ を $\lambda$ 平面における開きが $\pi/\alpha$ 未満の角領域とするとき，これを $u_{\mathrm{I}}(z,\lambda)+u_{\mathrm{II}}(z,\lambda)$ と分解することができ，それぞれは $|\lambda|\to\infty$ のとき

$$(19) \quad u_{\mathrm{I}}(z,\lambda) \sim \sum_{i=1}^{d} e^{\lambda^{\alpha}\psi_i(z,\lambda)} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}(z,\lambda)\,\lambda^{-\alpha j}$$

$$(20) \qquad u_{\mathrm{II}}(z,\lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j(z,\lambda)\,e^{-\alpha j}$$

という漸近展開をもつ $\Omega_1\times\Sigma$ 上の整型函数となる．但し $\psi_i(z,\lambda)$，$a_{i,j}(z,\lambda)$ および $b_j(z,\lambda)$ は $\Omega_1\times\{\lambda;\,|\lambda|>\Lambda_1\}$ 上の $z$ および $\lambda^{-1/q}$ の整型函数であり，$(z,\lambda)$ が $(\mathring{z},\infty)$ に近づくとき，次の漸近挙動を示す：

$$(21) \quad \psi_i(z,\lambda) = \tilde{\tau}_i(z_0-\mathring{z}_0) + O((|z-\mathring{z}|+|\lambda|^{-1/q})^2),$$

$$(22) \quad a_{i,j}(z,\lambda) = a_{i,j} + O(|z-\mathring{z}|+|\lambda|^{-1/q}),$$

$$(23) \quad b_j(z,\lambda) = b_j + O(|z-\mathring{z}|+|\lambda|^{-1/q}).$$

ここで $\tilde{\tau}_i$, $a_{i,j}$ および $b_j$ は定数であり，(16) の根がすべて 0 と異なるならば，$\tilde{\tau}_i$ および $a_{i,0}$ もすべて 0 と異なる．

この定理の証明については §7 で述べる．

## 4. Heaviside の演算子法

波形函数 $w^{(0)}(x)$ をきめたとき，$w^{(j)}(x)$, $j \geqq 0$, は微分によって定まるが，$j < 0$ に対しては積分定数だけの不定さがある．したがって，(11) という表現にはあいまいさが残る．しかし，$w^{(0)}(x)$ が全軸上定義された（超）函数であって，台が左または右へ有限ならば，原始函数も同じ性質をもつとすれば，一意に定まる．このとき $w^{(j)}(x)$ および $\lambda$ の形式的巾級数 $v(\lambda)$ に対して $v(\partial_x)w^{(0)}(x)$ を計算する有効な方法として Laplace 変換を用いた演算子法がある．

$w(x)$ を台が $[a, \infty)$ に含まれる指数型の超函数とすれば，その Laplace 変換

$$(24) \qquad \hat{w}(\lambda) = \int_R w(x)\, e^{-\lambda x}\, dx$$

は半平面 $\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda_0$ で整型な函数となる．

次に，$v(x, \lambda)$ を $[a, \infty)$ の一定の複素近傍で定義された整型函数を係数とする $\lambda$, $\lambda^{-1}$（または $\lambda^{1/q}$, $\lambda^{-1/q}$）

の形式的巾級数であり，$\mathrm{Re}\,\lambda > \Lambda_1$ で収束し，適当な増大度の評価をもつとする．このとき，$\Lambda > \max\{\Lambda_0, \Lambda_1\}$ にとり

$$(25)\qquad V(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}^{\infty} v(\zeta, \lambda)\,\hat{w}(\lambda)\,e^{\lambda\zeta}\,d\lambda$$

と定義すれば，$v(x) = v(x, \partial_x)w(x)$ は佐藤超函数の意味で

$$(26)\qquad v(x) = V(x+i0) - V(x-i0)$$

と表わされる．これは $v(x,\lambda) = \lambda^j$ のときは容易に示され，一般には積分と和の順序変更による．

$$(27)\qquad w_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^{\frac{1}{s-1}}}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqq 0 \end{cases}$$

で定義される実軸上の函数は，$s > 1$ のとき，Gevrey 族 $\mathcal{E}^{\{s\}}(\mathbb{R})$ に属し，$\mathcal{E}^{(s)}(\mathbb{R})$ には属さない．但し，$f \in C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, が $\mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega)$（あるいは $\mathcal{E}^{(s)}(\Omega)$）に属するとは，任意の $K \subset\subset \Omega$ に対して定数 $h$, $C$ があり（あるいは任意の $h > 0$ に対し定数 $C$ があり），

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha f(x)| \leqq C\,h^{|\alpha|}\,|\alpha|!^s$$

がなりたつことをいう．$c > 0$ に対して $w_c(x) = w_1(cx)$

で定義される函数 $w_c(x)$ も同様である.

この函数の Laplace 変換 $\hat{w}_c(\lambda)$ は, 積分路を次々に回転してゆけばわかるように, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の普遍被覆面上の整型函数である. $s'<s$ とする角領域 $|\arg\lambda|\leq \pi s'/2$ 上では峠道の方法で $|\lambda|\to\infty$ のときの漸近展開を求めることができ, $c_0$, $c_1$ を定数として

$$(28)\qquad \hat{w}_c(\lambda)=\frac{c_0}{c}\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{-1+\frac{1}{2s}} e^{-c_1\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{\frac{1}{s}}}\left(1+O\left(\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{-\frac{1}{s}}\right)\right)$$

という一様な展開がなりたつ.

次節では作用素としての形式解 $u(z,\lambda)$ を $w_c(\varphi(z))$ に施して非正則度条件の必要性を証明する. 残念ながら, §3 で述べた評価では, $u(z,\lambda)$ が函数として収束しないので, 演算子法を直接適用することはできない. しかし $j<0$ に対する $\partial_x^{j/q} w(x)$ は Riemann-Liouville 積分

$$\partial_x^{j/q} w(x)=\int_0^\infty \frac{\eta^{-1-j/q}}{\Gamma(-j/q)}\, w(x-\eta)\,d\eta$$

に等しいので, 評価 (15), (18) からわかるように, 元の近傍を十分小さくすれば, そこでは $\sum_{j=-\infty}^{-1} u_j(z)\,\partial_\varphi^{\,j}$ あるいは $u_{\mathrm{III}}(z,\partial_\varphi)$ は有界な整型函数を核とする積分作用素になり, $w\in\mathcal{E}^{\{s\}}(\mathbb{R})$ ならば, 結果も同じ Gevrey 族に属する. そして, 残りの $\sum_{j=0}^{\infty} u_j(z)\,\partial_\varphi^{\,j}$ または $u_{\mathrm{I+II}}(z,\partial_\varphi)$ に対しては

演算子法を適用することができる.

## 5. 非正則度条件

この節では, $\mathring{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ の近傍で定義された実解析函数を係数とする形式的双曲型作用素 $P(x, \partial)$ を考える. すなわち $P$ は $m$ 階の偏微分作用素であり, 超平面 $x_0 = \mathrm{const}$ は非特性的, かつ特性方程式 $\sigma(P)(x; \xi_0, \xi') = 0$ は $x \in \Omega_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\xi' \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して実根 $\xi_0$ のみをもつと仮定する. このとき, 対応する Cauchy 問題

$$
(29) \qquad \begin{cases} P(x, \partial)u(x) = f(x) \\ \partial_0^j u(\mathring{x}_0, x') = g_j(x'), \quad 0 \leqq j < m \end{cases}
$$

がいかなる (超) 函数族 $\mathcal{F}$ で適切になるかという問題は古くから興味をもたれてきた. そしてまだ完全には解決されていない問題である.

函数空間 $\mathcal{F}$ としては, $C^\infty$ 函数の空間 $\mathcal{E}$, Schwartz 超函数の空間 $\mathcal{D}'$, 実解析函数の空間 $\mathcal{A}$, 佐藤超函数の空間 $\mathcal{B}$, これらの補間である二つの Gevrey 族の空間 $\mathcal{E}^{\{s\}}$ および $\mathcal{E}^{(s)}$, これらの双対である Gevrey 族の超函数の空間 $\mathcal{D}^{\{s\}'}$ および $\mathcal{D}^{(s)'}$ を考えるのが自然である. Gevrey 族の指数は普通 $1 < s < \infty$ をみたす数であるが, $\{1\}$ および $(\infty)$ も許し, $\mathcal{E}^{\{1\}} = \mathcal{A}$, $\mathcal{D}^{\{1\}'} = \mathcal{B}$, $\mathcal{E}^{(\infty)} = \mathcal{E}$, $\mathcal{D}^{(\infty)'} = \mathcal{D}'$

とすると具合のよいことが多い.

Bony-Schapira [2] は $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ および $\mathcal{B}$ に対しては (29) は常に適切であることを示した. 特性根$\xi_0$がすべて単根であれば, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$ および $\mathcal{D}'$ に対して適切であることは昔から知られていたが, Ivrii-Petkov は低階項にかかわらず $\mathcal{E}$ で適切であるための必要条件を求め, 実効的双曲型と呼ばれる新しい型を導入した [14]. これが実際低階項の如何にかかわらず $\mathcal{E}$ および $\mathcal{D}'$ で適切であることは岩崎 [15, 16] が証明した. これ以外のとき $\mathcal{E}$ における適切性は低階の項に依存する. Levi 条件 $\sigma = 1$ は, 多重度一定の特性根に対し, $\mathcal{E}$ 適切であるための条件として導入された. $n = 1$ の場合の E. E. Levi, A. Lax の仕事を除けば, 溝畑-大矢 [28, 29] が最初の結果で, 多重度が高々 2 のとき, Levi 条件が $\mathcal{E}$-適切のための必要十分条件であることを証明した. 多重度が一般のときの Levi 条件の十分性は Chazarain [4] が, 必要性は Flaschka-Strang [8], Ivrii-Petkov [14] が証明した.

Gevrey 族 $\mathcal{E}^{\{s\}}$ における適切性についての一般的結果は Trépreau [34] と Bronstein [3] による. 彼らは特性根の多重度が $d$ を越えないとき, $1 \leqq s < d/(d-1)$ ならば, 低階の項にかかわらず, (29) は $\mathcal{E}^{\{s\}}$ において

適切であることを証明した．多重度が一定の場合，すなわち特性根$\xi_0$の多重度が任意の根$\xi_0$の近傍で，$x, \xi'$を少しかえてもかわらない場合は，これより以前に，大矢[30]，Leray-大矢[25,26]，浜田-Leray-Wagschal[11]，De Paris-Wagschal[6]達の仕事があった．[19]ではこれらを改良して以下の結果を得た．

$(\mathring{x}, \mathring{\xi})$，$\mathring{\xi} \neq 0$，を$P(x, \partial)$の特性要素，すなわち特性多項式$\sigma(P)(x, \xi)$の零点とする．このとき，$(\mathring{x}, \mathring{\xi})$を単純特性要素とする偏微分作用素$K(x, \partial)$と偏微分作用素$Q_i(x, \partial)$を用いて(12)の形にDe Paris分解ができる．そこで，(13)によって$(\mathring{x}, \mathring{\xi})$における$P(x, \partial)$の非正則度$\sigma$を定義する．$(\mathring{x}, \mathring{\xi})$が$P$の特性要素全体を動くときの非正則度$\sigma$の上限を$\sigma_0$とし，$P$の非正則度という．次に$* = (s)$，$1 < s \leqq \infty$，または$\{s\}$，$1 \leqq s < \infty$，でGevrey族の指数を表わす．

(30) $$s_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - 1}$$

とおき，

(31) $$1 \leqq s < s_0, \ * = \{s\}; \quad 1 < s \leqq s_0, \ * = (s)$$

がなりたつとき，$P(x, \partial)$は$*$に関し<u>非正則度条件</u>をみ

たすという．このとき，$P(x,\partial)$ に関する Cauchy 問題は $\mathcal{E}^*$ および $\mathcal{D}^{*\prime}$ において適切である．すなわち，次の定理が成立する．

<u>定理 3.</u> $P(x,\partial)$ を，$\Omega_T=(-T,T)\times\mathbb{R}^n$ 上で定義された $*$ 族の函数を係数とする多重度一定の形式的双曲型作用素とする．$P$ は Gevrey 族 $*$ に関して非正則度条件をみたし，階数は $m$，かつ特性根 $\xi_0$ は $\Omega_T\times S^{n-1}$ 上有界とする．このとき，任意のデータ

$$f\in\mathcal{E}((-T,T),\mathcal{D}^{*\prime}(\mathbb{R}^n)),$$
$$g_j\in\mathcal{D}^{*\prime}(\mathbb{R}^n),\quad j=0,1,\cdots,m-1,$$

に対して (29) は一意的な解

$$u\in\mathcal{E}((-T,T),\mathcal{D}^{*\prime}(\mathbb{R}^n))$$

をもつ．もし

$$f\in\mathcal{E}((-T,T),\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n))\ (\text{あるいは}\ \mathcal{E}^*(\Omega_T))$$
$$g_j\in\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n),\quad j=0,1,\cdots,m-1,$$

ならば，

$$u\in\mathcal{E}((-T,T),\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n))\ (\text{あるいは}\ \mathcal{E}^*(\Omega_T)).$$

また，

$$f\in\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_T)\ \text{かつ}\ \operatorname{supp} f\subset\{x_0\geq 0\}$$

ならば，$P(x,\partial)u(x)=f(x)$ は一意的な解

$$u\in\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega_T)\ \text{かつ}\ \operatorname{supp} u\subset\{x_0\geq 0\}$$

をもつ.

$* = (\infty)$ のときは Chazarain [4] の結果と一致している. 証明はより初等的である. もう少し局所的な定式化もできるが, ここではふれない. Ivrii [12] は, $* = \{\omega\}$ の場合について, 非正則度という概念は用いないものの, ほぼ上と同じ結果を与えている.

この節で述べた特性要素 $(\mathring{x}, \mathring{\xi})$ に関する $P$ の非正則度は一般に $(\mathring{x}, \mathring{\xi})$ が非特異特性要素, すなわち特性多様体 $\{\sigma(P)(x, \xi) = 0\}$ の非特異点であれば, 同じに定義できる. $P$ が多重度一定という仮定は $P$ の特性要素がすべて非特異ということと同じである. 特異特性要素に対しても非正則度を定義し, 定理3を多重度一定の仮定のない形に拡張することが望まれる. Ivrii [13] はこのような場合を扱っているが究極には達していないように思われる.

## 6. 非正則度条件の必要性

次の定理は非正則度条件が一般の非特異特性要素においても必要であることを示している.

定理4. $P(x, \partial)$ を $\mathring{x} \in R^{n+1}$ の近傍で実解析的な函数を係数とする形式的双曲型作用素とする. もしある非特異特性要素 $(\mathring{x}, \mathring{\xi})$ において $P$ の非正則度 $\sigma$ が $1$ より大きく, かつ $I_0 = \{i \in \{0, 1, \cdots, m\} ; d - d_i = \sigma(m - i)\}$ として

$$(32) \qquad \sum_{i \in I_0} \sigma(Q_i)(\mathring{x}, \mathring{\xi})\,\tau^{d_i} = 0$$

が零と異なる単根 $\tau_1, \cdots, \tau_d$ ばかりをもつならば，$\mathring{x}$ の近傍 $\Omega_1$ があり，$\Omega_1$ に含まれる $\mathring{x}$ の任意の開近傍 $\Omega$ に対して，$P(x, \partial)\,u(x) = 0$ の解

$$(33) \qquad u \in \mathcal{D}^{(s)\prime}(\Omega) \setminus \mathcal{D}^{\{s\}\prime}(\Omega)$$

であって，初期値 $\partial_0^{\,k} u(\mathring{x}_0, x'),\ k = 0, 1, \cdots,$ がすべて $\mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega')$ に属するものがある．但し，

$$(34) \qquad s = \frac{\sigma}{\sigma - 1},$$

かつ $\Omega' = \{x' ; (\mathring{x}_0, x') \in \Omega\}$ とする．

証明．$\varphi(z)$ を $(\mathring{x}, \mathring{\xi})$ を通る整型位相函数，すなわち $\operatorname{grad}\varphi(\mathring{x}) = \mathring{\xi}$ をみたす

$$\sigma(K)(z, \operatorname{grad}\varphi(z)) = 0$$

の解とする．$z$ が実ならば $\varphi(z)$ も実になるようにとる．このとき，§3 の作用素としての形式解 $u(z, \lambda)$ と §4 の函数 $w(\chi) = w_c(\chi)$ を用い，$c$ が十分大ならば，$u(x) = u(x, \partial_\varphi)\,w(\varphi) = u_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}(x, \partial_\varphi)\,w(\varphi) + u_{\mathrm{III}}(x, \partial_\varphi)\,w(\varphi)$ が求める解であることを証明する．この $u(x)$ が $c$ の如何に

かかわらず $\mathcal{D}^{(s)\prime}(\Omega_1)$ に属する $P(x,\partial)u(x)=0$ の解となることは定理1の評価から簡単に示される[17]. 同様に, $c$によって定まる $\Omega_1'=\{x';(\mathring{x}_0,x')\in\Omega_1\}$ の近傍 $\Omega_c$ があり, そこで $u$ は $\mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega_c)$ に属することが示される. 特に初期値 $\partial_0^k u(\mathring{x}_0,x')$ は $\mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega_1')$ に属する. また §4で注意したように, 定理2の評価(18)より $u_{\mathrm{III}}(x,\partial_\varphi)w(\varphi)$ が $\mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega_1)$ に属することがわかる. したがって, $\Omega$ に応じて $c$ を大きくとれば, $u_{\mathrm{I+II}}(x,\partial_\varphi)w(\varphi)\notin\mathcal{D}^{\{s\}\prime}(\Omega)$ となることを示せば証明が終る.

$0<s'<s$ をとり, $\Sigma=\{\lambda;|\lambda|>\Lambda_1,|\arg\lambda|<s'\pi/2\}$ に対する定理2の分解を

$$u_{\mathrm{I+II}}(z,\lambda)=u_{\mathrm{I}}(z,\lambda)+u_{\mathrm{II}}(z,\lambda)$$

とする. §4で述べたように $u_{\mathrm{I}}(x)=u_{\mathrm{I}}(x,\partial_\varphi)w(\varphi(x))$ は逆Laplace変換

$$U_{\mathrm{I}}(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda^\infty e^{\lambda\zeta}u_{\mathrm{I}}(z,\lambda)\hat{w}_c(\lambda)\,d\lambda$$

を用いて

$$u_{\mathrm{I}}(x)=U_{\mathrm{I}}(x,\varphi(x)+i0)-U_{\mathrm{I}}(x,\varphi(x)-i0)$$

と表わすことができる. $\alpha=1/s$ に注意し, 漸近展開(19),

(28) を用いると，積 $u_I(z,\lambda)\hat{w}_c(\lambda)$ の漸近展開の各項の指数

$$\lambda^{\alpha}\psi_i(z,\lambda)-c_1(\lambda/c)^{1/s}=\lambda^{\alpha}(\psi_i(z,\lambda)-c_1c^{-\alpha})$$

は収束級数

$$t_l(z)\lambda^{l/q}+t_{l-1}(z)\lambda^{(l-1)/q}+\cdots+t_0(z)+t_{-1}(z)\lambda^{-1/q}+\cdots$$

に展開できる．この主要項は $z$ が $\mathring{x}$ に近ずくとき

(35) $$t_l(z)\sim\tilde{\tau}_i(z_0-\mathring{x}_0)-c_1c^{-\alpha}+O(|z-\mathring{x}|^2)$$

と漸近展開される．ここで $\tilde{\tau}_i$ は (32) の根 $\tau_i$ を一定の正数で割ったものであり，すべて 0 と異なる．

少くとも 1 つの $\tilde{\tau}_i$ が $\mathrm{Re}\,\tilde{\tau}_i\geq 0$ （または $<0$ ）をみたすとする．このような $\tilde{\tau}_i$ のうち最小(大)$|\arg\tilde{\tau}_i|$ をもつものを $\tilde{\tau}_i$ とする．$\mathring{x}$ に十分近い点 $x\in\Omega$ で $\varphi(x)=0$ および $x_0-\mathring{x}_0>0$ （$<0$）をみたすものをとる．このとき，$c$ を十分大とすれば，$x$ の複素近傍 $\Omega_2$ があり，$z\in\Omega_2$ に対しては一様に $|t_l(z)|\geq\delta>0$ および $|\arg t_l(z)|\leq(1+\alpha)\pi/2-\delta$ が成立する．そこで

$$|\arg(-\zeta)-\arg t_l(z)|<(1-\alpha)s'\pi/2,$$
$$|\alpha\arg(-\zeta)-\arg t_l(z)|<(1-\alpha)\pi/2$$

で定義される角域をZとすれば，$\zeta$がZの中で0に近ずくとき，峠道の方法で積分

(36) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}^{\infty} e^{\lambda\zeta}\, e^{\lambda^{\alpha}\psi_i(z,\lambda)}\, a_{ij}(z,\lambda)\lambda^{-\alpha j}\hat{w}_c(\lambda)\,d\lambda$$

を漸近展開することができる．但し，$a_{ij}(z,\lambda)$は漸近展開(19)の係数である．他の$i'$に対しても同様の展開ができる．(22)で$a_{i',0}\neq 0$となることを用いれば，Zを細分したある角域$Z_1$の上では，ある$i'$と$j=0$とした積分(36)のみが優勢となることがわかる．したがって，$Z_1$上では，正の数$C_1$，$C_2$が存在し

$$|U_I(z,\zeta)| \geq C_1 \exp(C_2|\zeta|^{-1/(s-1)})$$

が成立する(詳しくは[20]を見よ)．他方$U_{II}(z,\zeta)$は$|\arg\zeta|<\pi$で有界となる．故に$y\in R^{n+1}\setminus\{0\}$がある近ずき方で0に近ずくとき

$$|U_{I+II}(x+iy,\varphi(x+iy))| \geq C_3 \exp(C_4|y|^{-1/(s-1)})$$

となる正の数$C_3$，$C_4$がある．この評価はこの函数の境界値として定義される超函数$u_{I+II}(x)$が$x$の近傍で$\mathcal{D}^{\{s\}'}$に属しないことを示している([21]，Petzsche [33]，de Roever [7])．これで(33)が証明できた．

[18]では，定理4よりゆるく(32)が0でない根をもつという仮定の下で同じ結論を主張したが，そこでスケッチした証明を完全にすることはできなかった．他に Ivrii [12, 13] と清堀[27]が Gevrey 族での可解性の必要条件を与えている．明らさまには述べられてはいないが，多重度一定の場合彼らが与えた条件は非正則度条件と同等である．但し(29)の右辺 $f \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ が残る形になっている．この形であれば，われわれの方法でも，(32)の根に関する仮定を少くとも1つ0でない単根をもつまで弱めることができるようである．

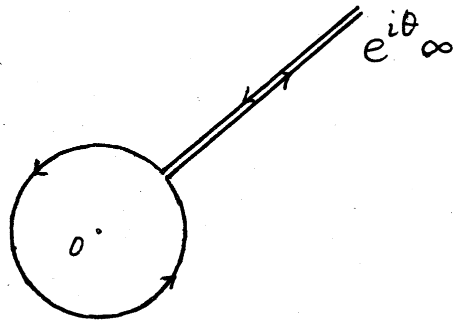
## 7. 大内の解析

既に紙数はつきており，定理2の証明の概略を与えることもできないが，大内[31]の基本的アイディアのみを述べておく．De Paris 分解(12)より

$$
(37)\quad P_\varphi(z,\partial,\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda^{i-d_i}\Big\{\sigma(Q_i)(z,\operatorname{grad}\varphi(z)) \times K_\varphi^1(z,\partial)^{d_i}+\sum_{j=1}^{i-d_i}\lambda^{-j}(Q_i K^{d_i})_\varphi^{d_i+j}\Big\}.
$$

これに対し，(9)の形の展開をもち，初期条件(14)をみたす(10)の形式解 $u(z,\lambda)$ を求めるのが目的である．大内は積分変換

(38) $$u(z,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda^{\alpha} r}\, v(z,\lambda,r)\, dr$$




によって $v(z,\lambda,r)$ に関する方程式に変換する。ここで積分路 $\Gamma$ は図のように，適当な偏角 $\theta$ をもつ無限遠点から出発し，$0$ を正のむきに1まわりし，もとにもどる路である．部分積分により，$u$ に対して $\lambda^{\alpha}$ を掛ける作用は $v$ に対して $\partial_r$ を施す作用に変換される．これを (37) の各項に $m-d_i-j$ 回行えば，(10) は次の方程式に変換される：

(39) $$L(z,\lambda,\partial_z,\partial_r)\, v(z,\lambda,r)=0,$$

$$L(z,\lambda,\partial_z,\partial_r)=(P_0^d+P_1^d(\lambda))\,\partial_r^{m-d}+\sum_{k=d+1}^{m} P^k(\lambda)\,\partial_r^{m-k},$$

$$P_0^d=\sum_{i\in I_0}\sigma(Q_i)(z,\operatorname{grad}\varphi)\,K_{\varphi}^{1}(z,\partial_z)^{d_i}\,\partial_r^{d-d_i},$$

$$P_1^d(\lambda)=\sum_{i\notin I_0}\lambda^{-\beta_i}\,\sigma(Q_i)(z,\operatorname{grad}\varphi)\,K_{\varphi}^{1}(z,\partial_z)^{d_i}\,\partial_r^{d-d_i},$$

$$P^k(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}\lambda^{-(1-\alpha)(k-d)-\beta_i}\,(Q_iK^{d_i})_{\varphi}^{k+d_i-d}\,\partial_r^{d-d_i}.$$

但し，$\beta_i$ は $i\in I_0$ に対しては $0$，$i\notin I_0$ に対しては $>0$ となる定数である．したがって，$P_1^d(\lambda)$，$P^k(\lambda)$ は $\lambda$ の負

巾を係数にもつ微分作用素である．

方程式（39）を大体は2通りに解く．第1の解法では

(40) $$v(z,\lambda,r)=\sum_{k=0}^{\infty}v_k(z,\lambda,r)$$

(41) $$v_k(z,\lambda,r)=\sum_{j=-k}^{\infty}v_{k,j}(z,\lambda)f^{(j)}(r)$$

の形の解を$(P_0{}^d+P_1^d(\lambda))\partial_r{}^{m-d}$を主部，他を摂動項とみなして逐次近似で解く．但し$f^{(j)}$は（8）で定義した函数である．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{-\lambda^{\alpha}r}f^{(j)}(r)\,dr=\lambda^{\alpha j}$$

ゆえ，初期条件（14）は

$$\partial_0^{l}v_{k,j}(\mathring{x}_0,z',\lambda)=\delta_{k,0}\delta_{j,0}h_l(z'),\quad 0\leq l<d$$

となる．浜田［10］らとは反対に（41）では$j$が$+\infty$の方に無限になっていることに注意する．（40），（41）の項の順序をかえて，$j\geq 0$の項の和と$j<0$の項の和をそれぞれ$v^{+}(z,\lambda,r)$，$v^{-}(z,\lambda,r)$と定義する．$|\lambda|$が十分大ならば，$v^{+}$は領域$|r|>a|z_0-\mathring{x}_0|$で収束し，一価整型函数となる．また$v^{-}$は$|r|<R_0$で収束し，$r=0$で対数的分岐点のある多価解析函数になる．定理2の形式的巾級数$u_{I+II}(z,\lambda)$，$u_{II}(z,\lambda)$はそれぞれ

$$(42)\qquad u_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}(z,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda^{\alpha} r}\, v^{+}(z,\lambda,r)\,dr$$
$$=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} v_{k,j}(z,\lambda)\,\lambda^{\alpha j},$$

$$(43)\qquad u_{\mathrm{III}}(z,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{-\lambda^{\alpha} r}\, v^{-}(z,\lambda,r)\,dr$$
$$=\sum_{j=-\infty}^{-1}\sum_{k=-j}^{\infty} v_{k,j}(z,\lambda)\,\lambda^{\alpha j}$$

で与えられる．但し，(42) は収束積分と和であるが，(43) は少しく解釈が必要である．評価 (18) は $v_{k,j}(z,\lambda)$ の評価より直ちに得られる．

$u_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}(z,\lambda)$ の漸近展開を求めるための第2の解法では $z$ と $r$ の微分を同格にみなし，浜田 [9], Wagschal [35] の解法で，$v(z,\lambda,r)$ と同じ初期値を与え
$$\tilde{v}(z,\lambda,r)=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=-\infty}^{0}\tilde{v}_{i,j}(z,\lambda)\,f^{(j)}(\varphi_i(z,\lambda)+r)$$
の形の解を求める．$\varphi_i(z,\lambda)+r$ は $z_0=\mathring{x}_0$ において初期値 $r$ をもつ $d$ 個の $L(z,\lambda,\partial_z,\partial_r)$ の単純整型位相函数である．ここで (16) が単根のみをもつという仮定が使われる．$\tilde{v}$ は，$|\lambda|>\Lambda_1$，$|r|<R_1$ で収束し，$\varphi_i(z,\lambda)+r=0$ を分岐点とする多価解析函数になる．しかし，二つの解の差

$$v^0(z,\lambda,r)=v^+(z,\lambda,r)+v^-(z,\lambda,r)-\tilde{v}(z,\lambda,r)$$

は$\{z\in\Omega_1,\ |\lambda|>\Lambda_1,\ |r|<R_1\}$上の一価整型函数に延長することができる.

ところで, $v^+(z,\lambda,r)$は1価函数なので積分(42)の積分路$\Gamma$は原点を中心とする円だけとれば十分である. この円を始点を明らかにして$\Gamma_\theta$と書く. こうした上で, $v^+=\tilde{v}-v^-+v^0$を(42)に代入する. Cauchyの積分定理により$v^0$の積分は消え,

$$u_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}(z,\lambda)=u_{\mathrm{I}}(z,\lambda)+u_{\mathrm{II}}(z,\lambda),$$

(44) $$u_{\mathrm{I}}(z,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta}e^{-\lambda^\alpha r}\tilde{v}(z,\lambda,r)\,dr,$$

(45) $$u_{\mathrm{II}}(z,\lambda)=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\theta}e^{-\lambda^\alpha r}v^-(z,\lambda,r)\,dr$$

となる. これが定理2の分解である. $\Sigma$に応じて$\theta$を選び, (44), (45)を評価すれば, 漸近展開(19), (20)が得られる.

詳しくは大内[31]または[20]を見られたい.

# 文献

[1] T. Aoki, An invariant measuring the irregularity of a differential operator and a microdifferential operator, J. Math. Pures Appl., 61(1982), 131 - 148.

[2] J.-M. Bony - P. Schapira, Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, Lecture Notes in Math., 287(1973), 82 - 98.

[3] M. D. Bronsteĭn, The Cauchy problem for hyperbolic opearators with characteristics of variable multiplicity, Trans. Moscow Math. Soc., 41(1980), 87 - 103 (Original Russian: Trudy, Moskov. Matem. Obšč., 41(1980), 83 - 99).

[4] J. Chazarain, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24 (1974), 173 - 202.

[5] J.-C. De Paris, Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples; lien avec l'hyperbolicité, J. Math. Pures Appl., 51(1972), 231 - 256.

[6] J.-C. De Paris - C. Wagschal, Problème de Cauchy non caractéristique à données Gevrey pour un opérateur analytique à caractéristiques multiples, J. Math. Pures Appl., 57(1978), 157 - 172

[7] J. W. de Roever, Hyperfunctional singular support of ultradistributions, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 31(1985), 585 - 631.

[8] H. Flaschka - G. Strang, The correctness of the Cauchy problem, Advances in Math., 6(1971), 347 - 379.

[9] Y. Hamada, The singularities of the solutions of the Cauchy

problem, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 5(1969), 21 - 40.

[10] Y. Hamada, Problème analytique de Cauchy à caractéristiques multiples dont les données de Cauchy ont des singularités polaires, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 276(1973), 1681 - 1684.

[11] Y. Hamada - J. Leray - C. Wagschal, Système d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples: problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle, J. Math. Pures Appl., 55(1976), 297 - 352.

[12] V. Ya. Ivriĭ, Conditions for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Siberian Math. J., 17(1976), 422 - 435 (Original Russian: Sibirsk. Mat. Ž., 17(1976), 547 - 563).

[13] V. Ya. Ivriĭ, Cauchy problem conditions for hyperbolic operators with characteristics of variable multiplicity for Gevrey classes, Siberian Math. J., 17(1976), 921 - 931 (Original Russian: Sibirsk. Mat. Ž., 17(1976), 1256 - 1270).

[14] V. Ya. Ivriĭ - V. M. Petkov, Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed, Russian Math. Surveys, 29(1974), no. 5, 1 - 70 (Original Russian: Uspehi Mat. Nauk, 29(1974), no. 5, 3 - 70).

[15] N. Iwasaki, The Cauchy problem for effectively hyperbolic equations (general cases), to appear.

[16] 岩崎敦久 実効的双曲型方程式の初期値問題, 数学, 36(1984), 227 - 239.

[17] H. Komatsu, Irregularity of characteristic elements and construction of null-solutions, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 23(1976), 297 - 342.

[18] H. Komatsu, Irregularity of characteristic elements and hyperbolicity , Publ. RIMS., Kyoto Univ., 12 Suppl.(1977), 233 - 245.

[19] H. Komatsu, Linear hyperbolic equations with Gevrey coefficients, J. Math. Pures Appl., 59(1980), 145 - 185.

[20] H. Komatsu, Irregularity of hyperbolic operators, to appear in the Proceedings of the Workshop on Hyperbolic Equations and Related Topics, Katata, 1984.

[21] H. Komatsu, Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 20(1973), 25 - 105.

[22] H. Komatsu, Ultradistributions, II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 24(1977), 607 - 628.

[23] H. Komatsu, Ultradistributions, III, Vector valued ultradistributions and the theory of kernels, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 29(1982), 653 - 718.

[24] P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems, Duke Math. J., 24(1957), 627 - 646.

[25] J. Leray - Y. Ohya, Systèmes linéaires, hyperboliques non stricts, Colloque C. B. R. M., 1964, pp. 105 - 144.

[26] J. Leray - Y. Ohya, Equations et systèmes non-linéaires, hyperboliques non-stricts, Math. Ann., 170(1967), 167 - 205.

[27] S. Mizohata, Sur l'indice de Gevrey, to appear in Séminaire de Vaillant 1984 - 1985.

[28] S. Mizohata - Y. Ohya, Sur la condition de E. E. Levi concernante des équations hyperboliques, Publ. RIMS, Kyoto

Univ., 4(1968), 511 - 526.

[29] S. Mizohata - Y. Ohya, Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples, II, Japan. J. Math., 40(1971), 63 - 104.

[30] Y. Ohya, Le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques à caractéristique multiple, J. Math. Soc. Japan, 16(1964), 268 - 286.

[31] S. Ōuchi, An integral representation of singular solutions of linear partial differential equations in the complex domain, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 27(1980), 37 - 85.

[32] 大内忠, 複素領域における線型偏微分方程式の特異点をもつ解について, 数学, 35(1983), 316 - 331.

[33] H.-J. Petzsche, Generalized functions and the boundary values of holomorphic functions, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 31(1984), 391 - 431.

[34] J.-M. Trépreau, Le problème de Cauchy hyperbolique dans les classes d'ultrafonctions et d'ultradistributions, Comm. Partial Differential Equations, 4(1979), 339 - 387.

[35] C. Wagschal, Problème de Cauchy analytique, à données méromorphes, J. Math. Pures Appl., 51(1972), 375 - 397.