

有界領域上の実解析解の大域的存在的ための  
 s h a r p な十分条件

東大 教養 金子 晃  
 (Akira KANEKO)

$P(D)$  を定数係数線型偏微分作用素,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  を有界領域とする. 河合 [1] は超局所解析の大域解析への一つの応用として局所双曲型作用素の基本解の特異性伝播の評価を徹底させることにより  $\Omega$  に対するある種の幾何学的条件の下に (即ち何らの函数解析的手段を使うことなく)  $P(D)A(\Omega) = A(\Omega)$  を示す方法を開発した. 即ち,  $P(D)$  の局所伝播錐を  $\pm K_\xi$  とすれば

$$(1) \quad SS E^\pm \subset \{0\} \times S^{n-1} \cup \bigcup_{\xi \in N(P_m)} \pm K_\xi \times \{\xi\}$$

なる評価を持つ “良い” 基本解が存在し, 従って領域  $\Omega$  について

$$(2) \quad \Omega \times S^{n-1} = X^+ \cup X^-, \\
 (x, \xi) \in X^\pm \Rightarrow \{x\} \pm K_\xi \cap \Omega = \emptyset$$

という閉集合による分解 (より正確には被覆) が存在するという条件を課せば,  $f \in A(\Omega)$  の延長  $[f] \in B[\bar{\Omega}]$  をマイクロ函数の層  $C$  の脆弱性を用いて

$$[f] = f^+ + f^-, \quad SS f^\pm \subset X^\pm,$$

と分解したとき

$$u = f^+ * E^+ + f^- * E^-$$

は  $\Omega$  内では実解析的となり  $P(D)u = f$  の一つの解を与えるというものである. 前回の講演ではフーリエ超函数の適当なクラスを用いれば河合氏のこの論法を  $\Omega$  が無限領域の場合にも拡張できることをお話したのであった ([2]).

さて, 河合氏は [1] において主要定理としては条件 (2) そのものではなくそれを保証するより具体的な条件をいくつか用いている. ただし

$$(3) \quad (x, \xi) \in \Omega \times S^{n-1} \text{ に対し, } \{x\} \pm K_\xi \text{ のどちらか } \cap \Omega = \emptyset$$

という誰もが自然と考える条件で置き換えられるかどうかは未解決であった. 最近 ZAMPIERI [6] は (3) を仮定しても必ずしも (2) のような分解が存在しない例を与えた. これは

$$P(D) = D_1^2 D_2^2 - D_2^2 D_3^2 - D_3^4 - D_4^4 - D_3^2 D_4^2$$

という作用素で,  $\Omega$  として  $x_1 + x_3 = \text{const.}$  の一部を境界に含む適当な凸有界領域, 例えば,

$$\Omega = \{|x_1 + x_3| < 1, |x_1 - x_3| < 1, |x_2| < 1, |x_4| < 1\}$$

をとれば、容易にわかるように (3) は成り立つが一方  $x_1 + x_3 = 1$  なる境界点において  $\xi = (0, 1, 0, 0)$  に対応する局所伝播錐

$$K_\xi = \{x_1 \geq |x_3|, \quad x_2 = x_4 = 0\}$$

の付近で (2) のような分解が不可能な例となることがわかる。実際この  $\xi$  に収束する単純特性的な方向の列でそれに対応する局所伝播錐が  $\Omega$  と交わりながら上の  $K_\xi$  に近づく様なものが存在する。

さて今日の話は、それにも拘らず河合の論法を少し精密化すれば条件 (3) から直接  $P(D)A(\Omega) = A(\Omega)$  が示せることがわかったのでそれを報告しようというものである。それは

$$S^{n-1} = \Xi_0 \sqcup \Xi_1 \sqcup \dots \sqcup \Xi_N$$

$$\Xi_k = \{\xi \in S^{n-1}; \xi \text{ における } P_m \text{ の局所化が丁度 } k \text{ 階}\}$$

という stratification を用いるもので (ただし空集合のものがあれば飛ばして番号をつけ直すのはもちろんである), こうすると  $\xi$  がある一つの  $\Xi_k$  内を動くとき  $K_\xi$  は連続的に変化する (集合として急に増えたり減ったりしない意味で位相同型に動くとは限らない) ことが容易にわかるので各  $\Omega \times \Xi_k$  は (2) と類似の相対閉部分集合への分解

$$\Omega \times \Xi_k = X_k^+ \cup X_k^-,$$

$$X_k^\pm = \{(x, \xi) \in \partial\Omega \times \Xi_k; \{x\} \pm K_\xi \cap \Omega = \emptyset\}$$

を常に持つことがわかる。故に、マイクロ函数に対する方程式  $P(D)u = [f]$  を  $R^n \times \Xi_k, k=0, \dots, N$  の上で基本解  $E^\pm$  を用いて次元の高い strata の方から順に解いてゆけば  $SS$  が  $\Omega$  内に侵み込まぬ解が求まり、従ってその超函数としての代表元を ( $\Omega$  の近傍における実解析解で調節したあと)  $\Omega$  に制限したものが  $P(D)u = f$  の求める実解析解の一つとなる。念の為  $R^n \times \Xi_k$  での解法をやや初等的にして説明し直せば次の通りである: 帰納法により

$$SS u_k \subset (R^n \setminus \Omega) \times \overline{\Xi_k}$$

$$SS (P(D)u_k - f) \subset \partial\Omega \times \overline{\Xi_{k+1}}$$

を満たす超函数  $u_k$  を求めてゆけばよい。そこで次の段階では  $f_{k+1} = P(D)u_k - f$  を

$$f_{k+1} = f_{k+1}^+ + f_{k+1}^-, \quad SS f_{k+1}^\pm \subset \overline{X_{k+1}^\pm}$$

と分解し

$$v_{k+1} = f_{k+1}^+ * E^+ + f_{k+1}^- * E^-$$

とおくと、基本解の“良い”性質により  $\xi \in \Xi_{k+1}$  なる方向成分を持つ  $SS$  は  $\Omega$  内に侵み込まない。従って

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= u_{k+1} + w_{k+1}, \\ SS u_{k+1} &\subset (R^n \setminus \Omega) \times \overline{\Xi_{k+1}}, \\ SS w_{k+1} &\subset \overline{\Omega} \times \overline{\Xi_{k+2}} \end{aligned}$$

と分解すれば、

$$P(D) u_{k+1} = f_{k+1} - P(D) w_{k+1}$$

従って各評価の共通部分をとれば

$$SS (P(D) u_{k+1} - f_{k+1}) \subset \partial\Omega \times \overline{\Xi_{k+2}}$$

となり先へ進むことができる。

以上は簡単のため“良い”基本解  $E^\pm$  が  $S^{n-1}$  上大域的に存在すると仮定したが、マイクロ局所的な基本解でこと足りる。その場合二つより沢山存在することも有り得るが、これに応じて条件(3)をその様に弱めることができる。これらを含めた詳しい議論は[3]及び[4]に与えられている。[3]では無限領域を同時に扱うため Fourier 超函数的考察が不断に用いられているが[4]では通常の超函数論の範囲内で証明がなされている。無限領域の場合は  $R^n$  のコンパクト化  $D^n$  の位相の有界領域とのかかわりあいの不十分性のため同様の仮定で存在定理を証明しようとの試みは破綻する。それを救うためには領域  $\Omega$  に応じたコンパクト化を用いねばならぬであろう。

なお ZAMPIERI は[5]において  $\Omega$  が凸の場合に HÖRMANDER の結果に基づいて(3)の条件における  $K_\xi$  を更に  $P_m(\xi)$  の各既約成分で置き換えたものでも十分であることを示している。また、各既約成分の重複度が2以下のときはその形の条件が必要であることをも示している。 $\Omega$  が凸のときは HÖRMANDER の結果により最初から  $P$  の主部のみを考察すれば十分なので、例えば ZAMPIERI が挙げた例

$$P(D) = (D_1^2 + D_2^2 - D_3^2) (2D_1^2 + 2D_3^2 - D_2^2) + D_4$$

などはそれ自身局所双曲型でないにも拘らず有種の非有界凸領域で大域可解となる。一方我々の方法ではこの様な作用素は扱えない。(そもそも  $\Omega$  が凸でないときは大域可解性が主部のみで決まるかどうか少しも明らかではない。HÖRMANDER の理論でもこのところはかなり深遠である。) しかしながら有界領域  $\Omega$  を考える限り上の様な作用素は各点毎の条件(3)を満たすことは有り得ず、従って最初から考えるには及ばないのである。さらに、 $P$  自身局所双曲型の場合でも有界領域を考える限り局所伝播錐を  $P_m$  の各既約成分のレベルで考えても本質的には少しも条件として弱くならないように思われる。故に筆者は有界領域  $\Omega$  に対しては存在し得るマイクロ局所基本解のすべてを用いて書き直した各点毎の条件(3)が実解析函数での大域可解性の必要十分条

件であろうと想像している。この必要性の方をマイクロ局所解析の立場で論じる方法を見出すことは残された非常に面白い問題である。

#### 引用文献

- [1] Kawai T.: On the global existence of real analytic solutions of linear differential equations (I), J. Math. Soc. Japan 24(1972), 481-517.
- [2] Kaneko A.: 大域的実解析解に対する河合氏の存在定理の非有界領域への拡張 数理解析研究所講究録 NO. 508, pp. 67-91
- [3] ——— : On the global existence of real analytic solutions of linear partial differential equations on unbounded domain, submitted to J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.
- [4] ——— : A sharp sufficient geometric condition for the existence of global real analytic solutions on a bounded domain, submitted to J. Math. Soc. Japan.
- [5] Zampieri G.: Propagation of singularity and existence of real analytic solutions of locally hyperbolic equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A 31(1984), to appear.
- [6] ——— : Personal correspondence, June 1983.