数理解析研究所講究録
第559巻 1985年 42-58

Boltzmann方程式とGevrey Class

阪市大工　鵜飼正二（Seiji Ukai）

1. 問題

Boltzmann方程式の初期値問題は

$$
(1.1)\quad \begin{cases} f_t = -\xi\cdot\nabla_x f + Q[f,f], \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}
$$

である。未知関数 $f=f(t,x,\xi)$ は $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ のscalar関数であって，物理的には，時刻 t に於ける位置 x，速度 ξ の気体粒子密度である。また，

$$
(1.2)\quad \begin{aligned} Q[f,g](t,x,\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_{\xi'}\times S^{n-1}} q(v,\theta)\{&f(\eta)g(\eta')+f(\eta')g(\eta) \\ &-f(\xi)g(\xi')-f(\xi')g(\xi)\}\,d\xi' d\omega, \end{aligned}
$$

は気体粒子の衝突を記述する双線型対称作用素であって，

$$
v=|\xi-\xi'|,\quad \theta=\cos^{-1}\{(\xi-\xi')\cdot\omega/v\},\quad \omega\in S^{n-1}.
$$

但し・は $\mathbb{R}^n$ の内積，$f(\eta)=f(t,x,\eta)$ etc，であって，

$$
(1.3)\qquad \eta=\xi-(v\cos\theta)\omega,\qquad \eta'=\xi'+(v\cos\theta)\omega
$$

は，速度 ξ の粒子と ξ' の粒子が衝突したときの衝突後の粒子

の速度（またはその逆）である.

$q(v,\theta)$ は衝突断面積であり，気体粒子の種類，即ち粒子の相互作用 potential で決まる．粒子が剛球の場合（hard ball gas）ならば，σ_0 を球の表面積として，

(1.4)′ $\quad q(v,\theta) = \sigma_0 v|\cos\theta|$.

また相互作用ポテンシアル が逆べき法則に従うとき，即ち r^{-s} (r：粒子間距離)，$s>1$，に比例すれば ($n=3$ のとき)

(1.4) $\quad q(v,\theta) = v^{\gamma}|\cos\theta|^{-\gamma'} q_0(\theta)$,

$$\gamma = 1-\frac{4}{s},\quad \gamma' = 1+\frac{2}{s};\quad q_0(\theta)\geqq 0,\ \text{有界},\ \theta=\pi/2\ \text{の近傍で}\neq 0,$$

で与えられる．この場合 $\gamma'>1$ であるので $q(v,\theta)$ は $\theta=\pi/2$ で強い（非可積分性の）singularity を持ち，従って (1.2) で f，g が単に有界と仮定しただけでは ω に関する積分は収束しない．しかし (1.3) から $\theta=\pi/2$ ならば $\eta=\xi$，$\eta'=\xi'$ であるので f，g が滑らかならば (1.2) の右辺の $\{\cdots\}$ は $\theta=\pi/2$ で 0 となり，$q(v,\theta)$ の singularity を相殺し，Q は well-defined となる可能性がある．即ち Q は（非線型）singular integral operator または pseudo-differential operator と考えねばならないことになる．

従って (1.1) を解くのは難しくなるので，従来は種々の cutoff 近似が用いられていた．即ち (1.4) で言えば $\gamma'<1$ を仮定することに相当する．(1.4)′ はこの仮定を満たす．特に Grad [2]

による angular cutoff は $q(v,\theta)$ を

$$(1.5)\quad \begin{aligned} &q^{\varepsilon}(v,\theta)=\chi^{\varepsilon}(\theta)q(v,\theta), \quad \varepsilon>0, \\ &\chi^{\varepsilon}(\theta)=1,\ |\theta-\pi/2|>\varepsilon; \quad \chi^{\varepsilon}(\theta)=0,\ |\theta-\pi/2|<\varepsilon \end{aligned}$$

で置き代える近似であるが，この近似の下では，(1.1) に対する初期値問題のみならず種々の初期値－境界値の時間的大域解の存在が知られている．

non-cutoff の場合，即ち $\gamma'\geq 1$ の場合は (1.1) について殆んど結果がない．本稿では Q を gevrey class で定義すれば (1.1) が時間的局所解を持つことを示す．既に述べた様に Q は pseudo-differential operator なので derivative loss が起る．従って (1.1) を解くには Nishida-Nirenberg-Obsjamikov の abstract non-linear Cauchy-Kowalewski 定理 [3] と同様の工夫を要す．即ち (1.1) を Banach scale で設定しなければならない．但し Q の (微分に関する) 階数は 1 より小なので [3] より簡単に，通常の縮小写像の原理で解ける．Banach scale は gevrey class の指標 t に関して線型に変化させたものを用いる．類似の scale は Boltzmann 方程式では [1], [4] で，また weakly hyperbolic equation でも (Bronstein, Kajitani‥) 用いられている．

本稿では更に (1.5) で $\varepsilon\to 0$ としたときの解の収束についても触れる．詳しい証明は [6] を参照して頂きたい．

2. Gevrey class での Q の評価.

以下では $q(v,\theta)$ は v,θ について可測でかつ次を仮定する.

(2.1) $$|q(v,\theta)| \leq C(1+v^{-\mu}+v^{\gamma})|\cos\theta|^{-\gamma'},$$

但し $C \geq 0$ は定数, $\mu, \gamma, \gamma' \geq 0$ については

(2.2) $$0 \leq \mu < n, \quad 0 \leq \gamma < 2, \quad 1 \leq \gamma' < 2$$

および

(2.3) $$\gamma + 3\gamma' < 5,$$

を仮定する. この仮定の下で $Q[f,g]$ を評価する. 本節では f, g は ξ のみの関数とする. ノルムを

(2.4) $$\|f\|_\alpha = \sup_\xi \rho_\alpha(\xi)|f(\xi)|,$$
$$\rho_\alpha(\xi) = e^{\alpha\langle\xi\rangle^2}, \quad \alpha > 0. \quad \langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2},$$

と定義する.

$u = \rho_\alpha f$, $w = \rho_\alpha g$ とおくと, (1.3) より $\langle\xi\rangle^2 + \langle\xi'\rangle^2 = \langle\eta\rangle^2 + \langle\eta'\rangle^2$ なので

(2.5) $$Q[f,g] = \frac{1}{2}\rho_\alpha^{-1}\{\Gamma_\alpha^{(1)}[u,w] + \Gamma_\alpha^{(1)}[w,u] + \Gamma_\alpha^{(2)}[u,w] + \Gamma_\alpha^{(2)}[w,u]\},$$

となる. 但し

(2.6) $$\Gamma_\alpha^{(1)}[u,w] = \int_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} q(v,\theta)\rho_\alpha(\xi')^{-1}\{u(\eta) - u(\xi)\}w(\eta')\,d\xi'\,d\omega,$$

及び $\Gamma_\alpha^{(2)}[u,w]$ は上で $\{u(\eta)-u(\xi)\}w(\eta')$ を $\{u(\eta')-u(\xi')\}w(\eta)$ で置き代えたものである. 仮定 (2.1)(2.2) の下で次が成り立つ.

Lemma 2.1. $\forall\alpha > 0$, $\forall\delta \in (\gamma'-1, 1]$, $\exists C \geq 0$, $\forall\varepsilon > 0$,

$$|\Gamma_\alpha^{(j)}[u,w](\xi)| \leq C\langle\xi\rangle^{\gamma+\delta}\{(\langle\xi\rangle^{\delta} + \varepsilon^{-\delta})\|f\|_\alpha +$$

$$+\varepsilon^{1-\delta}\|\nabla_\xi f\|_\alpha\}\|g\|_\alpha \quad . \quad j=1,2.$$

ここで $C=C_\alpha$ は $\alpha>0$ について単調減少で，$C_\alpha\to\infty(\alpha\to 0)$，$C_\alpha\to 0\ (\alpha\to\infty)$ である．

証明．$u=\rho_\alpha f$ の Hölder ノルムの補間不等式として

$$|u(\eta)-u(\xi)|\le 2|\eta-\xi|^\delta\{(\alpha^\delta(|\xi|^\delta+|\eta-\xi|^\delta)+\varepsilon^{-\delta})\|f\|_\alpha$$
$$+\varepsilon^{1-\delta}\|\nabla_\xi f\|_\alpha\}$$

が得られる．但し $\alpha\geqq 0$, $\delta\in[0,1]$, $\varepsilon>0$．これを (2.6) から従う

$$|\Gamma_\alpha^{(1)}[u,w](\xi)|\le\int|q(v,\theta)|\rho_\alpha(\xi')^{-1}|u(\eta)-u(\xi)||w(\eta')|d\xi' d\omega$$

に代入する．(1.3) より $|\eta-\xi|=v|\cos\theta|$．また $|w(\eta')|\le\|g\|_\alpha$．よって上式右辺は

$$2(1+\alpha^\delta)\{(I_1(|\xi|^\delta+\varepsilon^{-\delta})+I_2)\|f\|_\alpha+\varepsilon^{1-\delta}I_1\|\nabla_\xi f\|_\alpha\}\|g\|_\alpha$$

で評価される．但し

$$I_k=\int|q(v,\theta)|\rho_\alpha(\xi')^{-1}|v|^{k\delta}|\cos\theta|^{k\delta}d\xi' d\omega,\quad k=1,2.$$

ここで (2.1) を仮定すると

$$(2.7)\qquad \le C\int_{\mathbb{R}^n}(1+v^{-\mu}+v^{\gamma})v^{k\delta}e^{-\alpha\langle\xi'\rangle^2}d\xi'\int_0^\pi|\cos\theta|^{-\gamma'+k\delta}d\theta .$$

$-\gamma'+k\delta>-1$ ならば θ に関する積分は収束する．また

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\xi-\xi'|^\lambda e^{-\alpha\langle\xi'\rangle^2}d\xi'\le C\langle\xi\rangle^\lambda$$

が $\lambda>-n$ について成り立つ．これより Lemma が $j=1$ について成り立つ．$j=2$ も同様に証明できる．(証終)

Lemma 2.2. $\forall\alpha>0$, $\forall\delta\in(\gamma'-1,1]$, $\exists C\geqq 0$, $\forall\beta\in[0,\alpha]$, $\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$,

$$\|Q[f,g]\|_{\alpha-\beta} \leq C\,\beta^{-(\gamma+\delta)/2}\{(\beta^{-\delta/2}+\varepsilon_1^{-\delta}+\varepsilon_2^{-\delta})\|f\|_\alpha\|g\|_\alpha$$
$$+\varepsilon_1^{1-\delta}\|\nabla_\xi f\|_\alpha\|g\|_\alpha+\varepsilon_2^{1-\delta}\|f\|_\alpha\|\nabla_\xi g\|_\alpha\}.$$

但し $C=C_\alpha$ は Lemma 2.1 と同様の α 依存性を持つ.

証明. (2.5) の左辺を Lemma 2.1 を用いて評価する. 但し $\Gamma_\alpha^{(\xi)}[u,w]$ については $\varepsilon=\varepsilon_1$, $\Gamma_\alpha^{(\xi)}[w,u]$ については $\varepsilon=\varepsilon_2$ と置く. 更に $\rho_\alpha(\xi)^{-1}=\rho_{\alpha-\beta}(\xi)^{-1}e^{-\beta\langle\xi\rangle^2}$, 及び $\lambda\geq 0$ に対し

$$\langle\xi\rangle^\lambda e^{-\beta\langle\xi\rangle^2} \leq C_\lambda\beta^{-\lambda/2}, \qquad C_\lambda=\sup_{s>0} s^\lambda e^{-s^2}$$

が成り立つことに注意すればよい. (証了)

上の Lemma は Q に derivative loss 及び weight loss が生じていることを示している. 同種の空間での Q の評価が必要である. これは次の Gevrey class で可能となる.

Definition 2.3. $f\in\gamma^{(\nu)}_{\alpha,\rho}$, $\nu\geq 1$, $\alpha\geq 0$, $\rho\geq 0$,

$\Longleftrightarrow$ $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$,

$$\|f\|_{\alpha,\rho,\nu} \equiv \sum_{l\in\mathbb{N}^n}\frac{\rho^{|l|}}{(l!)^\nu}\|\partial_\xi^l f\|_\alpha < +\infty.$$

Theorem 2.4. $\forall\alpha>0$, $\forall\delta\in(\gamma'-1,1]$, $\forall\nu\geq 1$, $\exists C\geq 0$,

$\forall\beta\in(0,\alpha)$, $\forall\rho>0$, $\forall\sigma\in(0,\rho)$, $\forall f,g\in\gamma^{(\nu)}_{\alpha,\rho}$,

$$\|Q[f,g]\|_{\alpha-\beta,\rho-\sigma,\nu} \leq C\,a_0(\beta,\rho,\sigma)\|f\|_{\alpha,\rho,\nu}\|g\|_{\alpha,\rho,\nu},$$

$$a_0(\beta,\rho,\sigma)=\beta^{-(\gamma+\delta)/2}\{\beta^{-\delta/2}+(1+\rho)\rho^{\nu\delta-1}\sigma^{-\nu\delta}\}.$$

証明. (1.2)で $\xi' \to y = \xi - \xi'$ なる変数変換を行う. 簡単の為 $g = f$ の場合を記すと

$$Q[f, f] = \int q(|y|, \theta)\{f(\xi - \zeta) f(\xi - y - \zeta) - f(\xi) f(\xi - y)\} dy\, d\omega,$$

但し $\cos\theta = y\cdot\omega/|y|$, $\zeta = (y\cdot\omega)\omega$ は ξ に独立となる. 故に積分記号下の微分により,

$$\partial_\xi^\ell Q[f, g] = \sum_{k+m=\ell} \frac{\ell!}{k!\,m!} Q[\partial_\xi^k f, \partial_\xi^m g],$$

が $\ell \in \mathbb{N}^n$ について成り立つ. Lemma 2.2 で

$$f \to \partial_\xi^k f, \quad g \to \partial_\xi^m g, \quad \varepsilon_1 = (1 + |k|)^{-\nu}, \quad \varepsilon_2 = (1 + |m|)^{-\nu}$$

とおく. また

(2.8) $\quad k!\,m!/(k+m)! \le 1, \quad \forall k, m \in \mathbb{N}^n$

に注意すると次を得る.

$$\|Q[f, g]\|_{\alpha-\beta, \rho-\sigma, \nu} \le \sum_{k, m \in \mathbb{N}^n} \frac{(\rho - \sigma)^{|k|+|m|}}{(k!\,m!)^\nu} \|Q[\partial_\xi^k f, \partial_\xi^m g]\|_{\alpha-\rho}$$

$$\le C \beta^{-(\gamma+\delta)/2} \left([f]\|g\|_{\alpha, \rho, \nu} + \|f\|_{\alpha, \rho, \nu}[g]\right),$$

ただし,

$$[f] = \beta^{-\delta/2}\|f\|_{\alpha, \rho, \nu} + [f]_1 + [f]_2,$$

$$[f]_1 = \sum_\ell \frac{(\rho - \sigma)^{|\ell|}}{(\ell!)^\nu} (1 + |\ell|)^{\nu\delta} \|\partial_\xi^\ell f\|_\alpha,$$

$$[f]_2 = \sum_\ell \frac{(\rho - \sigma)^{|\ell|}}{(\ell!)^\nu} (1 + |\ell|)^{-(1-\delta)\nu} \|\partial_\xi^\ell \nabla_\xi f\|_\alpha.$$

そこで, $0 < \sigma < \rho$ ならば

(2.9) $\quad \sup_{s \ge 0} (1 - \sigma/\rho)^s (s+1)^\nu \le C_\nu (\rho/\sigma)^\nu, \qquad C_\nu = \sup_{s \ge 0} e^{-s}(s+1)^\nu$

が成り立つので

$$[f]_1 \le C_{\nu\delta}\, \rho^{\nu\delta} \sigma^{-\nu\delta} \|f\|_{\alpha,\rho,\nu},$$

$$[f]_2 \le C_{\nu\delta}\, \rho^{\nu\delta-1} \sigma^{-\nu\delta} \|f\|_{\alpha,\rho,\nu}.$$

以上をまとめると定理を得る. (証了)

(2.9) を用いると

$$\|\nabla_\xi f\|_{\alpha,\rho-\sigma,\nu} \le C_\nu\, \rho^{\nu-1} \sigma^{-\nu} \|f\|_{\alpha,\rho,\nu}$$

がわかる. これと定理2.4を比較すると Q は次数 $\delta \in (\gamma^{-1}, 1]$ の pseudo-differential operator であることがわかる. 尚, この定理は (2.3) を仮定する必要はない.

3. 局所解の構成.

まず (1.1) は(形式的に)

(3.1) $\quad f(t) = U(t) f_0 + \int_0^t U(t-s)\, Q[f(s), f(s)]\, ds,$

と同値であるのでこれを解くことを考える. ここで

(3.2) $\quad U(t) f_0 = f_0(x - t\xi, \xi)$

は $-\xi\cdot\nabla_x$ が生成する群である. x, ξ の関数の gevrey class を定義しよう.

Definition 3.1. $\alpha, \mu, \rho \geqq 0$, $\kappa, \nu \geqq 1$ とする.

$$f \in \gamma^{(\kappa,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho} \iff f \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi),$$

$$\|f\|_{\alpha,\mu,\kappa,\rho,\nu} = \sum_{k,\ell \in \mathbb{N}^n} \frac{\mu^{|k|} \rho^{|\ell|}}{(k!)^\kappa (\ell!)^\nu} \|\partial_x^k \partial_\xi^\ell f\|_\alpha < +\infty.$$

ただしノルム $\|\cdot\|_\alpha$ は (2.4) で x についても sup を取ったも

のとする．

まず (3.2) の作用素 $U(t)$ をこの空間で考えよう．

Lemma 3.2. $f_0 \in \gamma^{(\kappa,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho}$, $\nu \geq \kappa \geq 1$ とすると $|t| \leq \mu/\rho$ ならば

$$\|U(t)f_0\|_{\alpha,\mu',\kappa,\rho,\nu} \leq \|f_0\|_{\alpha,\mu,\kappa,\rho,\nu}$$

が成り立つ．ただし $\mu' = \mu'(t,\mu,\rho)$ は次のものである．

$$\mu' = \{\mu^{1/\kappa} - (\rho|t|)^{1/\kappa}\}^{\kappa}.$$

証明．(3.2) を ξ_j で微分するとわかるように，

$$\partial_\xi^\ell U(t) f_0 = U(t)\{(-t\partial_x + \partial_\xi)^\ell f_0\}$$

$$= U(t)\left\{\sum_{m+r=\ell} \frac{\ell!}{m!\,r!}(-t)^{|m|}\partial_x^m \partial_\xi^r f_0\right\},$$

がすべての $\ell \in N^n$ について成り立つ．また $\partial_x^k U(t) f_0 = U(t)\partial_x^k f_0$ は明らか．故に $\|U(t)f_0\|_\alpha = \|f_0\|_\alpha$ に注意すると

$$\|U(t)f_0\|_{\alpha,\mu',\kappa,\rho,\nu} \leq \sum_{k,\ell}\sum_{m+r=\ell} \frac{(\mu')^{|k|}\rho^{|\ell|}}{(k!)^\kappa(\ell!)^\nu}\frac{\ell!}{m!\,r!}|t|^{|m|}\|\partial_x^{m+k}\partial_\xi^r f_0\|_\alpha$$

(2.8) を用いると

$$\leq \sum_{k,m,r\in N^n} \frac{(\mu')^{|k|}\rho^{|m|+|r|}|t|^{|m|}}{(k!)^\kappa(m!\,r!)^\nu}\|\partial_x^{m+k}\partial_\xi^r f_0\|_\alpha,$$

$m+k=s$ とおくと

$$= \sum_{s,r\in N^n} \frac{(\mu')^{|s|}\rho^{|r|}}{(s!)^\kappa(r!)^\nu} K_s \|\partial_x^s \partial_\xi^r f_0\|_\alpha,$$

ただし，
$$K_s = \sum_{m\leq s} \frac{(s!)^\kappa}{(m!)^\nu\{(s-m)!\}^\kappa}\left(\frac{\rho|t|}{\mu'}\right)^{|m|}.$$

$\nu \geq \kappa \geq 1$ を仮定したので，2項展開の公式を用いると

$$K_s \leq \Big(\sum_{m \leq s} \frac{s!}{m!(s-m)!} \Big(\frac{\rho|t|}{\mu'} \Big)^{|m|/\kappa} \Big)^{\kappa} = \Big(1 + \Big(\frac{\rho|t|}{\mu'} \Big)^{1/\kappa} \Big)^{\kappa|s|}$$
$$= \Big(\frac{\mu}{\mu'} \Big)^{|s|}$$

がわかる. これを上式に代入すればよい. (証了)

$U(t)$ は簡単な作用素であるが空間 $\mathcal{Y}^{(\kappa,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho}$ ではあまり良い性質を持っていない. さて N_0, N を

$$N_0[f,g](t) = \int_0^t U(t-s)\,Q[f(s),g(s)]\,ds\,,$$

(3.3) $$N[f](t) = U(t)f_0 + N_0[f,f](t)\,,$$

と定義すると (3.1) は $f = N[f]$, 即ち N の不動点が求まればよい. まず N_0 を評価するために次のノルムを導入する.

(3.4) $$|||f||| = \sup_{|t|\leq T} \|f(t)\|_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,\kappa,\,\rho-\sigma|t|,\,\nu}$$

但し T は

(3.5) $$T = \min\Big(\frac{\alpha}{2\beta}, \frac{\mu}{2\lambda}, \frac{\rho}{2\sigma}\Big),$$

もちろん $\alpha, \beta, \mu, \lambda, \rho, \sigma > 0$, $\kappa, \nu \geq 1$ である. さらに以下では

(3.6) $$\kappa = 1, \quad 1 \leq \nu < (3-\gamma-\gamma')/2(\gamma'-1)\,,$$

を仮定する. (2.3) (及び (2.2)) より $(3-\gamma-\gamma')/2(\gamma'-1) > 1$ だから上の第2式は意味をもつ. このとき $\gamma'-1 < (2-\gamma)/(1+2\nu) < 1$ が成り立つので

(3.7) $$\gamma'-1 < \delta < (2-\gamma)/(1+2\nu)$$

なる δ が選べる.

ノルム (3.4) では t に応じて変化する空間 $\mathcal{Y}^{(\kappa,\nu)}_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,\rho-\sigma|t|}$

を考えていることになる．こうすることによって (3,3) の N_0 が同一ノルム $|||\cdot|||$ で閉じた評価が可能になるのである．即ち

Lemma 3.3. (2.1)(2.2)(2.3) を仮定する．$\alpha, \beta, \mu, \lambda, \rho, \sigma > 0$, $\lambda \geq \rho$ とし T, κ, ν, δ を (3.4)〜(3.7) を満たすものとすると

$$|||N_0[f, g]||| \leq C_0\, a_1(\beta, \sigma)\, |||f|||\, |||g|||,$$

(3.8) $$a_1(\beta, \sigma) = \beta^{-(\gamma+\delta)/2}(\beta^{-\delta/2} + \sigma^{-\nu\delta}),$$

が成り立つ．但し C_0 は α, ρ にのみ依存する定数である．

証明．明らかに

$$\partial_x^k Q[f, g] = \sum_{m \leq k} \frac{k!}{m!(k-m)!} Q[\partial_x^m f, \partial_x^{k-m} g]$$

がすべての $k \in \mathbb{N}^n$ について成り立つ．よって (2.8) より

$$\|Q[f, g]\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu} \leq \sum_{k, m} \frac{\mu^{|k|+|m|}}{(k!\, m!)^\kappa} \|Q[\partial_x^k f, \partial_x^m g]\|_{\alpha, \rho, \nu}.$$

この右辺を定理 2.4 を用いて評価すると

(3.9) $$\|Q[f, g]\|_{\alpha-\beta, \mu, \kappa, \rho-\sigma, \nu}$$
$$\leq C a_0(\beta, \rho, \sigma) \|f\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu} \|g\|_{\alpha, \mu, \kappa, \rho, \nu}$$

を得る．さて (3.3) の N_0 についてまず Lemma 3.2 より

(3.10) $$\|N_0[f, g](t)\|_{\alpha-\beta|t|, \mu-\lambda|t|, \kappa, \rho-\sigma|t|, \nu}$$
$$\leq \left| \int_0^t \|w(s)\|_{\alpha-\beta|t|, \mu''(t), \kappa, \rho-\sigma|t|, \nu}\, ds \right|,$$

を得る．但し $w(s) = Q[f(s), g(s)]$ とおいた．また

$$\mu''(t) = \{(\mu - \lambda|t|)^{1/\kappa} + (\rho - \sigma|t|)^{1/\kappa} |t-s|^{1/\kappa}\}^\kappa.$$

仮定により $\kappa = 1$, $\lambda \geq \rho$, また $0 \leq s \leq t$ または $0 \geq s \geq t$ であるから

$$\mu''(t) \leq \mu - \lambda|t| + \lambda|t-s| = \mu - \lambda|s|$$

である．他方 (3.9) で

$$\alpha \to \alpha - \beta|s|, \quad \beta \to \beta|t-s|,$$

$$\rho \to \rho - \sigma|s|, \quad \sigma \to \sigma|t-s|$$

なる置き代えを行い，$\alpha-\beta|s|-\beta|t-s| = \alpha - \beta|t|$ 等に注意すれば，

$$\|w(s)\|_{\alpha-\beta|t|,\, \mu''(t),\, \kappa,\, \rho-\sigma|t|,\, \nu}$$

$$\leq C_{\alpha-\beta|s|}\, a_0(\beta|t-s|,\, \rho-\sigma|s|,\, \sigma|t-s|)\, |||f|||\, |||g||| \ .$$

但し $C = C_\alpha$ は補題 2.1 のもの．故に $C_{\alpha-\beta|s|} \leq C_{\alpha/2}$ ((3.5) により $\alpha-\beta|s| \geq \alpha/2$ が $|s| \leq T$ で成立.) また

$$a_0(\beta|t-s|,\, \rho-\sigma|s|,\, \sigma|t-s|)$$

$$\leq (1+2(1+\rho)\rho^{\nu\delta-1})\, a_1(\beta,\sigma)\, a_2(|t-s|),$$

a_1 は (3.8) で定義した．また

$$a_2(\tau) = \tau^{-(\gamma+2\delta)/2} + \tau^{-(\gamma+\delta+2\nu\delta)/2} \ .$$

(3.7) で δ を定めたので $(\gamma+2\delta)/2 \leq (\gamma+\delta+2\nu\delta)/2 < 1$ ．よって

$$\sup_{|t|\leq T} \left| \int_0^t a_2(|t-s|)\, ds \right| < +\infty \ .$$

これらを (3.10) に代入すれば補題を得る．(証了)

さて X_a, $a>0$ を

$$X_a = \{ f = f(t,x,\xi) \mid |||f||| \leq a \}$$

と定めると距離 $|||f-g|||$ で完備である．(3.3) の N について：

Lemma 3.4. $\alpha, \mu, \rho > 0$ かつ κ, ν は (3.6) のもの，また $f_0 \in \gamma^{(1,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho}$ とする．このとき N が X_a で縮小写像となるように β, λ, σ 及び a を定めることができる．T は (3.5) で定める．

証明. (3.8) で $\beta,\sigma\to\infty$ ならば $a_1(\beta,\sigma)\to 0$ となるから

$$d \equiv 1-4C_0\, a_1(\beta,\sigma)\, \|f_0\|_{\alpha,\mu,1,\rho,\nu} > 0$$

となる β,σ が選べる. そこで a を

(3.11) $$a = (1-\sqrt{d})/(2C_0\, a_1(\beta,\sigma))$$

と定める. 最後に $\sigma \geqq \rho$ と σ を選ぶ. Lemma 3.2, 3.3 より

$$|||N[f]||| \le \|f_0\|_{\alpha,\mu,1,\rho,\nu} + C_0 a_1(\beta,\sigma)\, |||f|||^2$$

であるから $f\in X_a$ ならば, a の選び方より $|||N[f]|||\le a$, 即ち $N[f]\in X_a$ が従う. 即ち N は X_a を X_a に写す. 同様に $f,g\in X_a$ ならば

(3.12) $$|||N[f]-N[g]||| = |||N[f-g,\, f+g]||| \le 2a\, C_0\, a_1(\beta,\sigma)\, |||f-g|||$$

であるが, $2aC_0a_1(\beta,\sigma) = 1-\sqrt{d} < 1$. (証了).

以上から N は X_a で唯1つの不動点 $f=N[f]$ を持つ. これは (3.1) の解である. この f は x,ξ についてもちろん C^∞ であるが, 更に

(3.13) f, f_t は t について連続, x,ξ について C^∞

であることが容易にわかるので (1.1) の古典解である. また

(3.14) $$f\in C^0([-T,T]:\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha/2,\mu/2,\rho/2}) \cap C^1([-T,T]:\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha/2-\varepsilon,\mu/2-\varepsilon,\rho/2-\varepsilon})$$

が任意の $\varepsilon>0$ について成り立つこともわかる.

更に N はこれ以外の不動点を持たない. 実際 $g\in X_{a'}$, $a'\neq a$ を N の f と異る不動点とすると (3.12) と同様にして

$$|||f-g||| = |||N_0[f-g,\, f+g]||| \le (a+a')\, C_0\, a_1(\beta,\sigma)\, |||f-g|||$$

を得るが, β,σ を十分大きく取りなおすと $|||f-g|||=0$ を得る.

最後に (3.6) で $\kappa=1$ を仮定したのは, $\kappa>1$ では Lemma 3.3 が,

従って Lemma 3.4 が成り立たないからである．実際，(3.10) では $\mu-\lambda|t|$ の代りに，

$$\{\mu(t)^{1/\kappa}+(\rho-\sigma|t|)^{1/\kappa}|t-s|^{1/\kappa}\}^{\kappa}\leq\mu(s)$$

を満たす $\mu(t)$ ならばどんなものでもよいのであるが，これを

$$\mu(s)^{1/\kappa}-\mu(t)^{1/\kappa}\geq(\rho-\sigma|t|)^{1/\kappa}|t-s|^{1/\kappa}$$

と書いてみればわかるように，$\mu(t)^{1/\kappa}$ は $t>0$ $(t<0)$ で単調減少（増加）でなければならない．しかしもし $\kappa>1$ ならばこの式は $\mu(t)^{1/\kappa}$ が至る所微分不可能であることを示し矛盾となる．

$\kappa=1$ は x に関して解析的であることを意味する．より正確には $f\in X_a$ は $f(t)\in\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,\rho-\sigma|t|}$ を意味するから，

(3.15) $f(t,x,\xi)$ は x に関して $\mathbb{R}^n+i\{y\in\mathbb{R}^n \mid |y|<\mu-\lambda|t|\}$ で解析的．

以上をまとめておく．

定理 3.5．(2.1)～(2.3) を仮定する．$\alpha,\mu,\rho>0$，ν は (3.6) を満たすとする．$f_0\in\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha,\mu,\rho}$ ならば $\beta,\sigma,\lambda,T>0$ が定まり，

(i) (1.1) は $[-T,T]\times\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi$ で古典解 f を持つ．

(ii) f は (3.13)，(3.14)，(3.15) の性質の他に，$|t|\leq T$ で

(iii) $f(t)\in\gamma^{(1,\nu)}_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,\rho-\sigma|t|}$

$$\|f(t)\|_{\alpha-\beta|t|,\,\mu-\lambda|t|,\,1,\,\rho-\sigma|t|,\,\nu}\leq 2\|f_0\|_{\alpha,\mu,1,\rho,\nu}$$

を満たす．

この最後の不等式は (3.11) から $a\leq 2\|f_0\|$ が従うことによる．より一般の f_0 に対する(局所)解の存在については現在のところ

何もわかっていない.

4. Angular cutoff 近似の収束

(1.2) で $g(v,\theta)$ を (1.5) の $g^{\varepsilon}(v,\theta)$ で置き代えて得られる Q を Q^{ε} と記す. $g^{\varepsilon}(v,\theta)$ は最早 $\theta=\pi/2$ での singularity を持たないので Q^{ε} は通常の積分作用素として扱えるので Q^{ε} に対する初期値問題 (1.1) はより一般の f_0 に対し局所解を持つことがわかっている [1]. さらに大域解も初期値問題のみならず種々の初期値ー境界値問題に対して得られている ([4], [5] 及びそこに掲げられている参考文献を参照).

本節では $\varepsilon\to 0$ の極限について考察する. $g(v,\theta)$ が (2.1)～(2.3) を満せば $g^{\varepsilon}(v,\theta)$ ももちろんこれらを, しかも ε に関して一様に満たす. 従って Q^{ε} についても定理 3.5 が適用でき, 特にそこで定められた ρ,σ,λ,T は ε に依存しない. こうして得られた解を f^{ε} と記す. すると $|||f^{\varepsilon}-f|||\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$ が示せる. f は定理 3.5 の本来の ($\varepsilon=0$ の) 解である. もちろん初期値 f_0 は f^{ε}, f に共通の同一のものを考えている. 故に cutoff 近似 (1.5) は少くとも Gevrey class の枠内では正当化できたことになる. 詳しくは次が示せる.

定理 4.1. $|||f^{\varepsilon}-f|||\leq C\varepsilon^{\delta-(\gamma'-1)}$. $C\geq 0$ は ε に依存しない定数, また δ は (3.7) で定めたものである.

証明. (3.3)で Q を Q^{ε} で置き代えたものを夫々 N_0^{ε}, N^{ε} とする. また $\overline{N}_0^{\varepsilon}=N_0^{\varepsilon}-N_0$ とおく. $f=N[f]$, $f^{\varepsilon}=N^{\varepsilon}[f^{\varepsilon}]$ だから $f^{\varepsilon}-f=N_0^{\varepsilon}[f^{\varepsilon},f^{\varepsilon}]-N_0[f,f]=N_0^{\varepsilon}[f^{\varepsilon}+f,f^{\varepsilon}-f]+\overline{N}^{\varepsilon}[f,f]$. $f^{\varepsilon}, f\in X_a$ であり, また明らかに N_0^{ε} についても Lemma 3.3 がそのまま成り立つから

$$|||f^{\varepsilon}-f||| \leq C_0 a_1(\beta,\sigma)|||f^{\varepsilon}+f|||\,|||f^{\varepsilon}-f|||+|||\overline{N}^{\varepsilon}[f,f]|||$$

$$\leq 2a\,C_0 a_1(\beta,\sigma)|||f^{\varepsilon}-f|||+|||\overline{N}^{\varepsilon}[f,f]|||.$$

(3.11)より $2a\,C_0 a_1(\beta,\sigma)=1-\sqrt{d}$. よって

(4.1) $\quad |||f^{\varepsilon}-f||| \leq |||\overline{N}^{\varepsilon}[f,f]|||/\sqrt{d}$.

さて (1.2)に於て $q(v,\theta)$ を $\overline{q}^{\varepsilon}(v,\theta)=q^{\varepsilon}(v,\theta)-q(v,\theta)=(1-\chi^{\varepsilon}(\theta))q(v,\theta)$ に置き代えたものを $\overline{Q}^{\varepsilon}$ とする. 上で定義した $\overline{N}_0^{\varepsilon}$ は (3.3)で Q を $\overline{Q}^{\varepsilon}$に置き代えたものに他ならない. $\overline{Q}^{\varepsilon}$に対し Lemma 2.1 が成り立つのは明らかだが, 特に $\overline{q}^{\varepsilon}=0$, $|\theta-\pi/2|>\varepsilon$ だから (2.7)の θ に関する積分は $\int_{J_\varepsilon}|\cos\theta|^{-\gamma'+k\delta}d\theta$, $k=1,2$, $J_\varepsilon=[\pi/2-\varepsilon,\pi/2+\varepsilon]$ で置き代えられる. この積分は上から $C\varepsilon^{1-\gamma'+k\delta}$ で抑えられる. $C\geqq 0$ は ε に依存しない定数. 故に Lemma 2.1, 2.2, Theorem 2.4 の C を $C\varepsilon^{1-\gamma'+\delta}$ で置き代えてよい. よって $\overline{N}_0^{\varepsilon}$ に対し Lemma 3.3 の C_0 を $C_0\varepsilon^{1-\gamma'+\delta}$ で置き代えたものが成り立つ. これと(4.1)より定理を得る. (証了).

この定理の系として

定理 4.2. $f_0\geq 0$ ならば $f(t)\geqq 0$, $0\leq t\leq T$.

証明 $f_0 \geq 0$ ならば $f^\varepsilon(t) \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ なることがわかる[1]ので，定理4.1で $\varepsilon \to 0$ としてこの定理を得る.

$f^\varepsilon \geq 0$ の証明は Q^ε が通常の積分作用素であることを本質的に使っているので f^ε を経由せず直接定理4.2を証明するのは難しいと思われる.

References

[1] K.Asano, Local solutions to the initial and initial boundary problems for the Boltzmann equation withan external force. J.Math.Kyoto Univ. (to appear).

[2] H.Grad, Asymptotic theory of the Boltzmann equation. Rarefied Gas Dynamics I.(Laurmann,J.A.,Ed), Academic Press, N.Y. 1963, 25-59.

[3] T.Nishida, A note on a theorem of Nirenberg. J.Diff. Geometry, 112(1977),629-633.

[4] S.Ukai and K.Asano, The Euler limit and initial layer of the nonlinear Boltzmann equation. Hokkaido Math. J. ,12(1983), 311-332.

[5] —— and ——. Steady solutions of the Boltzmann equation for a gas flow past an obstacle. Arch. Rational Mech. Anal., 84,(1983), 249-291.

[6] S.Ukai. Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff. Japan J.Appl.Math., 1 (1984), 141-156.