数理解析研究所講究録
第559巻 1985年 59-77

Emden-Fowler型常微分方程式の解の漸近的性質

徳島大教育 内藤 学 (Manabu Naito)

§1 序.

本講演ではEmden-Fowler型と呼ばれている次の形の単独二階常微分方程式を考察する:

(1.1) $x'' + a(t)|x|^{\gamma}\operatorname{sgn} x = 0, \quad t \geq t_0$.

ここに $a(t)$ は $[t_0, \infty)$ 上の実数値連続関数、γ は正の定数とする. 方程式(1.1)は一般には非線形で、普通、$\gamma > 1$ のとき superlinear、$\gamma < 1$ のとき sublinear といわれる. もちろん $\gamma = 1$ のときが線形方程式である. ここでの目的は、微分方程式に対する振動理論と解の有界性等の理論を方程式(1.1)に限って展開し、いままでに得られている結果の概略をまとめることである.

与えられた微分方程式に対してその解の有界性・安定性等を調べることは、微分方程式の定性的理論の中で最も基本的な問題の一つである. また、一般に、微分方程式の解 $x(t)$ は $[t_x, \infty)$ 上定義されていて ある点列 $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$ $(k \to \infty)$,

に対して $x(t_k)=0$ となるとき振動と呼ばれ、そうでないとき、すなわち十分大きなすべての t に対して $x(t)\neq 0$ となるとき非振動と呼ばれる。この振動・非振動の観点から微分方程式の解の構造を探るのがいわゆる振動理論である。

解の振動性あるいは解の有界性というからには、解が少なくとも ∞ の近くで定義されていることが前提であるが、そういう解の存在性についての議論は当然しなければならない。§2 で解の延長可能性及びそれと密接な関連が知られている解の一意性についてまとめる。§3 は振動理論に関係した結果である。3.1 で $\lim_{t\to\infty} x(t)=C_1\neq 0$ または $\lim_{t\to\infty} x(t)/t=C_2\neq 0$ という特別な漸近行動をする非振動解 $x(t)$ の存在性についてまとめる。3.2 ですべての解が非振動であるための条件をまとめる。3.3 で振動解の存在性についてまとめる。3.4 ですべての解が振動であるための条件をまとめる。§4 は解の有界性等の理論に関係した結果である。4.1 ですべての解が有界であるための条件をまとめる。4.2 ですべての解が 0 に収束するための条件をまとめる。線形方程式についての固有な結果を述べると膨大な量となり、またこれについてはある程度単行本等に書かれていることもあって、ここでは主として非線形方程式についてまとめてみたい。非線形方程式 (1.1) の振動理論において非常に興味深いことは、superlinear $\gamma>1$

の場合とsublinear $\gamma<1$ の場合にある種の"双対性"が存在していることである。

具体的に記述するのは(1.1)という形の常微分方程式についての結果である。しかし次の様に考えれば偏微分方程式

$$(1.2)\qquad \Delta u + a(|x|)|u|^{\gamma}\operatorname{sgn} u = 0,\quad |x| > R > 0,$$

ただし $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$,

の特別な解を考察していることにもなる。方程式(1.2)の解で $r=|x|$ だけに依存するもの $u(r)$ は常微分方程式

$$(1.3)\qquad u'' + \frac{n-1}{r}u' + a(r)|u|^{\gamma}\operatorname{sgn} u = 0,\quad r > R \quad \left({}' = \frac{d}{dr}\right)$$

に帰着されるが、(1.3)は変換

$$\begin{cases} v(t) = u(e^t) & (n=2) \\ v(t) = t\,u\left(\left[\frac{t}{n-2}\right]^{\frac{1}{n-2}}\right) & (n\geq 3) \end{cases}$$

によって

$$\begin{cases} \ddot{v} + e^{2t}a(e^t)|v|^{\gamma}\operatorname{sgn} v = 0 & (n=2) \\ \ddot{v} + t^{-3-\gamma}\left[\frac{t}{n-2}\right]^{\frac{2n-2}{n-2}} a\left(\left[\frac{t}{n-2}\right]^{\frac{1}{n-2}}\right)|v|^{\gamma}\operatorname{sgn} v = 0 & \end{cases}$$

$(n\geq 3)$ いずれの場合も $\dot{} = \dfrac{d}{dt}$

にうつる。これはまさに(1.1)の形である。

一般的な参考書として次のものを挙げておく。線形の場合：Bellman [1; 2章, 6章], Cesari [2; 2章], Coppel [3; 3章, 4章], Hartman [4; 11章, 14章1部], Reid [7; 4章], Swanson [8; 1章, 2章], Willett [9]; 非線形の場合：

Bellman [1; 7章], Kiguradze [5], 内藤[6], Wong[10].
このうち[9], [5], [6], [10] は survey paper であって他は単行本である。

以下において、現われる関数はすべて考えている区間上実数値連続関数とする。また、ある命題では現われる関数の適当な連続微分可能性を仮定しなければならないが、そのことは一々明記しない。その命題に書かれているだけの連続微分可能性があらかじめ仮定されていると了解されたい。関数 $f(t)$ に対して

$$[f(t)]_+ = \max\{f(t), 0\},\quad [f(t)]_- = \max\{-f(t), 0\}$$

の記号を用いる。さらに、例えば "$f(t) \geqq 0$" とは、$f(t)$ はある区間 $[t_f, \infty)$ 上定義されていて十分大きなすべての t について $f(t) \geqq 0$ の意味である。

§3 以降において (1.1) の "解" とは proper な解を意味する。ここに $x(t)$ が (1.1) の proper な解であるとは、$x(t)$ はある区間 $[t_x, \infty)$ 上定義されていてそこで (1.1) を満たし、終局的に非自明であること、すなわち任意の $T \geqq t_x$ に対して $\sup\{|x(t)| : t \geqq T\} > 0$ を満たすことである。

§2 解の一意性と延長可能性.

単独の方程式 (1.1) を標準的な方程式系に書き換えれば

$$(2.1)\qquad \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x' \\ -a(t)|x|^{\gamma}\operatorname{sgn} x \end{pmatrix}, \qquad t \geqq t_0,$$

となる。この右辺は (t, x, x') について $[t_0, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ 上連続であるから、Cauchy-Peano の存在定理によって(1.1)は任意の初期条件

$$(2.2)\qquad x(t_1) = \alpha,\ x'(t_1) = \beta \qquad (t_1 \geqq t_0)$$

に対して t_1 の近傍で定義された解すなわち局所解をもつ。また、(2.1)式の右辺は $\gamma \geqq 1$ のとき $[t_0, \infty) \times (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$ 上、$\gamma < 1$ のとき $[t_0, \infty) \times \{|x| \geqq \varepsilon\} \times (-\infty, \infty)$ $(\varepsilon > 0)$ 上局所リプシッツ条件を満たすから、Picard-Lindelöf の一意存在定理によって、$\gamma \geqq 1$ のとき任意の初期条件(2.2)に対する、$\gamma < 1$ のとき $\alpha \neq 0$ なる初期条件(2.2)に対する局所解は一意的である。$\gamma < 1$ のとき初期条件

$$(2.3)\qquad x(t_1) = 0,\ x'(t_1) = \beta \qquad (t_1 \geqq t_0)$$

に対して一意性はどうなっているかという疑問が当然残る。これについて次が知られている。

<u>定理2.1</u>　$\gamma < 1$ とする。もし $\beta \neq 0$ ならば(2.3)に対する(1.1)の局所解は一意的である。

従って結局

$$(2.4)\qquad x(t_1) = 0,\ x'(t_1) = 0 \qquad (t_1 \geqq t_0)$$

という初期条件に対してだけ疑問が残るが、実はこのときは

状況が少し複雑である。

<u>定理2.2</u>　$\gamma<1$, $a(t)>0$ $(t\geq t_0)$ とする。このとき $a(t)$ が $[t_0,\infty)$ 上局所有界変動ならば、(2.4)に対する(1.1)の解は $x(t)\equiv 0$ $(t\geq t_0)$ に限る。

上の定理の結論が成り立つとき"(1.1)の零解は一意である"といわれる。定理2.2は $a(t)$ の局所有界変動性の条件を落とすともはや成立しない。$a(t)>0$ $(t\geq t_0)$ の条件も本質的である。

<u>定理2.3</u>　$\gamma<1$, ある $T\geq t_0$ に対して $a(T)<0$ とする。このとき(1.1)は次のような解 $x(t)$ をもつ：

$[t_0,\infty)$ 上 $x(t)\not\equiv 0$, ある $t_1>t_0$ に対して $[t_1,\infty)$ 上 $x(t)\equiv 0$。

次に大域解すなわち $[t_0,\infty)$ 上定義された解について述べよう。常微分方程式系の解の延長可能性に対するWintnerの定理によって、$\gamma\leq 1$ のとき(1.1)のすべての解は $[t_0,\infty)$ 上延長可能である。$\gamma>1$ のときどうなっているかという疑問に対して次のことが知られている。

<u>定理2.4</u>　$\gamma>1$, $a(t)>0$ $(t\geq t_0)$ とする。このとき $a(t)$ が $[t_0,\infty)$ 上局所有界変動ならば、(1.1)のすべての解は $[t_0,\infty)$ 上延長可能である。

この定理も $a(t)$ の局所有界変動性の条件を落とすと成立しない。$a(t)>0$ $(t\geq t_0)$ の条件も本質的である。

定理2.5　$\gamma>1$, ある $T \geq t_0$ に対して $a(T)<0$ とする。このとき(1.1)は次のような $[t_0,\infty)$ 上には延長できない解 $x(t)$ をもつ：　ある $t_1>t_0$ に対して $\lim_{t\to t_1-0}|x(t)|=\infty$。

ここで、$\gamma<1$ の場合の零解の一意性と $\gamma>1$ の場合の解の延長可能性の間に、綺麗な"双対性"があることは興味深い。上述のことより状況が単純な場合として次がわかる：$\gamma>0$, $a(t)>0$ $(t\geq t_0)$ とする。このとき $a(t)$ が $[t_0,\infty)$ 上局所有界変動ならば、(1.1)に対する初期条件(2.2)の解は $[t_0,\infty)$ 上存在し、一意であり、自明解 $x(t)\equiv 0$ $(t\geq t_0)$ 以外は proper である。

§3 解の振動性・非振動性.

3.1 非振動解の存在　方程式(1.1)において $a(t)\equiv 0$ ならばその解は c_1+c_2t (c_1, c_2 は定数) であるから、(1.1)は $|a(t)|$ が $t\to\infty$ のとき何等かの意味で小さいとき $x(t)\sim c_1+c_2t$ $(t\to\infty)$ の形の解 $x(t)$ をもつであろう、と予想することは自然である。これについて以下のことが知られている。

定理3.1　もし

$$\int^{\infty} t|a(t)|\,dt<\infty \tag{3.1}$$

ならば、(1.1)は次を満たす解 $x(t)$ をもつ：

$$x(t)=c+o(1),\quad x'(t)=o(t^{-1})\quad (t\to\infty)\quad (c \text{ は定数} \neq 0). \tag{3.2}$$

逆に、$a(t) \geqq 0$ または $a(t) \leqq 0$ のとき、(1.1) が (3.2) を満たす解 $x(t)$ をもてば (3.1) が成立する。

定理 3.2　もし

(3.3) $$\int^{\infty} t^{\gamma} |a(t)|\, dt < \infty$$

ならば、(1.1) は次を満たす解 $x(t)$ をもつ：

(3.4) $$x(t) = ct + o(t),\quad x'(t) = c + o(1) \quad (t \to \infty) \quad (c \text{ は定数} \neq 0).$$

逆に、$a(t) \geqq 0$ または $a(t) \leqq 0$ のとき、(1.1) が (3.4) を満たす解 $x(t)$ をもてば (3.3) が成立する。

講演者は最近次のことを示した。方程式 (1.1) の係数 $a(t)$ はある t について（従ってすべての t について）

(3.5) $$A(t) \equiv \lim_{T \to \infty} \int_t^T a(s)\, ds \quad \text{が存在し有限値}$$

と仮定する。このとき

定理 3.3　もし

(3.6) $$tA(t) \to 0 \ (t \to \infty) \quad \text{かつ} \quad \int^{\infty} |A(t)|\, dt < \infty$$

ならば、(1.1) は (3.2) の形の解 $x(t)$ をもつ。逆に、$A(t) \geqq 0$ または $A(t) \leqq 0$ のとき、(1.1) が (3.2) の形の解 $x(t)$ をもてば (3.6) が成立する。

定理 3.4　もし

(3.7) $$\int^{\infty} |A(t)|\, dt < \infty \quad \text{かつ} \quad \int^{\infty} t\,(A(t))^2\, dt < \infty$$

ならば、(1.1) は次の形の解 $x(t)$ をもつ：

(3.8) $$x(t) = c + o(1) \quad (t \to \infty) \quad (c \text{ は定数} \neq 0).$$

逆に、$A(t) \geq 0$ のとき、(1.1)が(3.8)の形の解 $x(t)$ をもてば(3.7)が成立する。

<u>定理3.5</u>　もし

(3.9)　$t^{\gamma} A(t) \to 0 \ (t \to \infty)$ かつ $\int^{\infty} t^{\gamma-1} |A(t)| dt < \infty$

ならば、(1.1)は(3.4)の形の解 $x(t)$ をもつ. 逆に、$A(t) \geq 0$ または $A(t) \leq 0$ のとき、(1.1)が(3.4)の形の解 $x(t)$ をもてば(3.9)が成立する。

<u>定理3.6</u>　もし

(3.10)　$\int^{\infty} t^{\gamma-1} |A(t)| dt < \infty$ かつ $\int^{\infty} t^{2\gamma-1} (A(t))^2 dt < \infty$

ならば、(1.1)は次の形の解 $x(t)$ をもつ：

(3.11)　$x(t) = ct + o(t) \quad (t \to \infty)$　(cは定数$\neq 0$).

逆に、$A(t) \geq 0$ のとき、(1.1)が(3.11)の形の解 $x(t)$ をもてば(3.10)が成立する。

定理3.3, 3.5はそれぞれ定理3.1, 3.2の拡張になっている. また、$A(t) \geq 0$ のときに注目すれば、解 $x(t)$ 自身の漸近行動は同じでもその導関数 $x'(t)$ の漸近行動を指定するのと指定しないのでは本質的な違いがあることがわかる. このことは $a(t)$ の絶対可積分性を要求する既存の結果からだけでは取らえきれない.

<u>3.2 非振動定理</u>　前項では、$a(t)$ が適当な条件を満足していれば(1.1)にはある非振動解が存在することをい

った。この項では、$a(t)$がさらに強い条件を満足していれば、(1.1)のすべての解は非振動であることをいう。係数$a(t)$に条件

$$\int^{\infty} \frac{[a'(t)]_+}{a(t)} dt < \infty \tag{3.12}$$

を課して次のことが知られている。

<u>定理3.7</u>　$\gamma > 1$, $a(t) > 0$で(3.12)が満たされているとする。このとき

$$\lim_{t\to\infty} t^{\gamma+1} a(t) = 0$$

が成立していれば、(1.1)のすべての解は非振動である。

<u>定理3.8</u>　$\gamma < 1$, $a(t) > 0$で(3.12)が満たされているとする。このとき

$$\lim_{t\to\infty} t^2 a(t) = 0$$

が成立していれば、(1.1)のすべての解は非振動である。

すべての解が非振動であるための十分条件は、もう一つ別の系列のものが知られている。

<u>定理3.9</u>　$\gamma > 1$, $a(t) > 0$とする。このとき、ある$\varepsilon > 0$に対して

$$\frac{d}{dt}\left\{ t^{\frac{\gamma+3}{2}+\varepsilon} a(t) \right\} \leqq 0$$

ならば、(1.1)のすべての解は非振動である。

<u>定理3.10</u>　$\gamma < 1$, $a(t) > 0$とする。このとき、あるε, $0 < \varepsilon < (1-\gamma)/2$, に対して

$$\frac{d}{dt}\left\{t^{\frac{\gamma+3}{2}+\varepsilon}a(t)\right\}\geqq 0 \quad かつ \quad \lim_{t\to\infty} t^{\frac{\gamma+3}{2}+\varepsilon}a(t)<\infty$$

ならば、(1.1)のすべての解は非振動である。

3.3 振動解の存在　前項の定理の対偶命題を作れば、それは(1.1)が振動解をもつための必要条件を得ていることになる。この項では(1.1)が振動解をもつための十分条件を考える。

定理3.11　$\gamma \neq 1$, $a(t)>0$ とする。このとき

$$\frac{d}{dt}\left\{t^{\frac{\gamma+3}{2}}a(t)\right\}\geqq 0$$

ならば、(1.1)は振動解をもつ。

定理3.12　$\gamma \neq 1$, $a(t)>0$ とする。このとき

$$\frac{d}{dt}\left\{t^{\frac{\gamma+3}{2}}a(t)\right\}\leqq 0 \quad かつ \quad \lim_{t\to\infty} t^{\frac{\gamma+3}{2}}a(t)>0$$

ならば、(1.1)は振動解をもつ。

3.4 振動定理　この項では、$a(t)$が$t\to\infty$のときある意味で十分大きいかまたは十分振動していれば、(1.1)のすべての解は振動であることを述べる。まず$a(t)$が十分大きな場合に相当する結果から始めよう。

定理3.13　$\gamma>1$とする。もし

$$-\infty<\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int^{T}\left(\int^{s}a(\tau)d\tau\right)ds\leqq\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int^{T}\left(\int^{s}a(\tau)d\tau\right)ds=\infty$$

ならば、(1.1)のすべての解は振動である。

以下において関数$\varphi(t)$は少なくとも次の条件を満たすと仮定する：

(3.13) $\varphi(t)>0,\ \varphi'(t)\geq 0,\ \varphi''(t)\leq 0.$

定理 3.14 $\gamma>1$ とする．もし (3.13) を満たす $\varphi(t)$ に対して

$$\int^{\infty}\varphi(t)a(t)dt=\infty$$

ならば、(1.1) のすべての解は振動である。

上の定理は $\varphi(t)\equiv t$ の場合重要である．またこの場合定理3.1 を考慮すれば次がわかる．

定理 3.15 $\gamma>1$，$\int^{\infty}t[a(t)]_{-}dt<\infty$ とする．このとき、(1.1) のすべての解が振動であるための必要十分条件は

$$\int^{\infty}ta(t)dt=\infty$$

が成立することである。

この命題は $a(t)\geq 0$ のとき Atkinson によって示された．

定理 3.16 $\gamma<1$ とする．もし (3.13) を満たす $\varphi(t)$ に対して

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int^{T}\left(\int^{s}(\varphi(\tau))^{\gamma}a(\tau)d\tau\right)ds=\infty$$

ならば、(1.1) のすべての解は振動である。

上の定理の直接の帰結として

定理 3.17 $\gamma<1$ とする．もし (3.13) を満たす $\varphi(t)$ に対して

$$\int^{\infty}(\varphi(t))^{\gamma}a(t)dt=\infty$$

ならば、(1.1) のすべての解は振動である。

定理 3.17 において $\varphi(t)\equiv t$ とし、定理 3.2 を考慮すれば次がわかる．

定理 3.18 $\gamma<1$，$\int^{\infty}t^{\gamma}[a(t)]_{-}dt<\infty$ とする．このとき、

(1.1)のすべての解が振動であるための必要十分条件は

$$\int^{\infty} t^{\gamma} a(t)\,dt = \infty$$

が成立することである。

これは $a(t) \geqq 0$ のとき Belohorec によって示された。

定理3.14, 3.17において $\varphi(t) \equiv 1$ とすれば

<u>定理3.19</u>　$\gamma > 0$ とする。もし

$$\int^{\infty} a(t)\,dt = \infty$$

ならば、(1.1)のすべての解は振動である。

方程式(1.1)の係数 $a(t)$ が次の意味で振動していれば、(1.1)のすべての解は振動である。

<u>定理3.20</u>　$\gamma \geqq 1$ とする。もし

$$-\infty < \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int^{T}\left(\int^{s} a(\tau)\,d\tau\right)ds < \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int^{T}\left(\int^{s} a(\tau)\,d\tau\right)ds \leqq \infty$$

ならば、(1.1)のすべての解は振動である。

<u>定理3.21</u>　$\gamma < 1$ とする。もし(3.13)を満たし

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} \text{ が存在し正の有限値}$$

であるような $\varphi(t)$ と $\beta \in [0, \gamma)$ に対して

$$-\infty \leqq \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int^{T}\left(\int^{s} (\varphi(\tau))^{\beta} a(\tau)\,d\tau\right)ds < \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int^{T}\left(\int^{s} (\varphi(\tau))^{\beta} a(\tau)\,d\tau\right)ds \leqq \infty$$

ならば、(1.1)のすべての解は振動である。

§4 解の有界性と漸近安定性.

<u>4.1 解の有界性</u>　ここでの目的は、主に、(1.1)のすべての解 $x(t)$ について、解 $x(t)$ およびその導関数 $x'(t)$ が有界であるための条件をまとめることである。係数 $a(t)$ が

$$(4.1)\qquad \int^{\infty}\frac{[a'(t)]_-}{a(t)}\,dt<\infty$$

を満足していれば、(1.1)のすべての解 $x(t)$ に対して $x(t)$ は有界である。実際次の定理が知られている。

<u>定理4.1</u>　$a(t)>0$ とする。もし(4.1)が満たされていれば、(1.1)のすべての解 $x(t)$ に対して

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{2}{\gamma+1}|x(t)|^{\gamma+1}+\frac{[x'(t)]^2}{a(t)}\right\}$$

が存在して非負有限値である；特に $x(t)$ および $x'(t)/\sqrt{a(t)}$ は有界である。

<u>定理4.2</u>　$a(t)>0$ とする。もし(4.1)および

$$\int^{\infty}[a'(t)]_+\,dt<\infty$$

が満たされていれば、(1.1)のすべての解 $x(t)$ に対して

$$(4.2)\qquad 0<\limsup_{t\to\infty}|x(t)|<\infty,\quad 0<\limsup_{t\to\infty}|x'(t)|<\infty$$

が成立する；特に $x(t)$ および $x'(t)$ は有界である。

上の定理より直ちに次がわかる。

<u>定理4.3</u>　$a(t)>0$ とする。もし

(i)　$a'(t)\geqq 0$, $\lim_{t\to\infty}a(t)<\infty$　または

(ii) $\quad a'(t) \leqq 0, \quad \lim_{t\to\infty} a(t) > 0$

ならば、(1.1) のすべての解 $x(t)$ に対して (4.2) が成立する。

一般に、$\lim_{t\to\infty} a(t) = l \ (0<l<\infty)$ または $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$ だけの条件から (1.1) の各解 $x(t)$ の有界性を結論することはできない。§3, 3.1 でいったように $a(t)$ がある意味で小さいと (1.1) は $x(t) \sim ct \ (t\to\infty)$ (c は定数 $\neq 0$) なる非有界な解 $x(t)$ をもつ。$\gamma=1$ のとき次が知られている。

<u>定理4.4</u> $\quad \gamma=1$ とする。もし

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$$

ならば、(1.1) は非有界な解をもつ。

非線形の場合、定理4.4 に対応する結果は得られていない。

<u>4.2 解の漸近安定性</u> ここでは、主に、(1.1) のすべての解 $x(t)$ に対して

$$(4.3) \qquad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{x'(t)}{\sqrt{a(t)}} = 0$$

が成立するための条件をまとめる。

<u>定理4.5</u> $\quad a(t) > 0$ とする。もし関数 $w(t)$ で

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty, \quad w'(t) > 0$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a'(t)}{a(t)\,w'(t)} > 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{w(t)} \int^{t} \frac{[w''(s)]_+}{\sqrt{a(s)}}\, ds = 0$$

なるものが取れれば、(1.1) のすべての解 $x(t)$ に対して (4.3)

が成立する。

<u>定理4.6</u>　$a(t)>0$ とする。もし(4.1)が満たされ、関数 $w(t)$ で

$$\lim_{t\to\infty} w(t)=\infty,\quad w'(t)\geqq 0$$
$$\limsup_{t\to\infty}\frac{w'(t)}{\sqrt{a(t)}}<\infty$$
$$\int^{\infty}\left|\sqrt{a(t)}\left(\frac{w'(t)}{a(t)}\right)'\right|dt<\infty$$
$$\int^{\infty}\left[\frac{a'(t)}{a(t)}-w'(t)\right]_{-}dt<\infty$$

なるものが取れれば、(1.1)のすべての解 $x(t)$ に対して(4.3)が成立する。

定理4.5, 4.6において、$w(t)=\int^{t}v(s)ds$ としてさらに状況を簡単化すれば、それぞれ次が得られる。

<u>定理4.7</u>　$a(t)>0$ とする。もし関数 $v(t)$ で

$$v(t)>0,\quad v'(t)\leqq 0,\quad \int^{\infty}v(t)dt=\infty$$
$$v(t)\leqq\frac{a'(t)}{a(t)}$$

なるものが存在すれば、(1.1)のすべての解 $x(t)$ に対して(4.3)が成立する。

<u>定理4.8</u>　$a(t)>0$ とする。もし関数 $v(t)$ で

$$v(t)>0,\quad \int^{\infty}|v'(t)|dt<\infty,\quad \int^{\infty}v(t)dt=\infty$$
$$v(t)\leqq\frac{a'(t)}{a(t)}$$

なるものが存在すれば、(1.1)のすべての解 $x(t)$ に対して(4.3)

が成立する。

定理4.7または4.8において、$v(t)=\dfrac{k}{\rho(t)}$（kは定数>0）としてさらに状況を簡単化すれば次が得られる。

定理4.9　$a(t)>0$とする。もし関数$\rho(t)$で

$$\rho(t)>0,\quad \rho'(t)\geqq 0,\quad \int^{\infty}\frac{dt}{\rho(t)}=\infty$$

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{a'(t)\rho(t)}{a(t)}>0$$

なるものが存在すれば、(1.1)のすべての解$x(t)$に対して(4.3)が成立する。

従って特に$\rho(t)=a(t)$として

定理4.10　$a(t)>0$とする。もし

$$\liminf_{t\to\infty} a'(t)>0,\quad \int^{\infty}\frac{dt}{a(t)}=\infty$$

ならば、(1.1)のすべての解$x(t)$に対して(4.3)が成立する。

また、定理4.9を適当に使えば次がわかる。

定理4.11　もし

(i)　$\lim\limits_{t\to\infty} a(t)=\infty,\quad a'(t)>0,\quad a''(t)\leqq 0$　または

(ii)　$\lim\limits_{t\to\infty} a(t)=\infty,\quad a'(t)>0,\quad a''(t)\geqq 0$

ならば、(1.1)のすべての解$x(t)$に対して(4.3)が成立する。

一般に、$\lim\limits_{t\to\infty} a(t)=\infty$, $a'(t)>0$だけの条件から(1.1)の各解$x(t)$が$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$を満たすということを結論することはできない。

これまでは、ある条件の下に(4.3)が成立するというもので、解の導関数については$\sqrt{a(t)}$で割ったものについての言及であった。定理4.1によって解の導関数についてこの条件を課すのは自然である。一方、安定性理論の一般論から鑑み、(1.1)のすべての解$x(t)$に対して

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x'(t) = 0$$

が成立する条件は何かという問題が想起される。これについて次が知られている。

<u>定理4.12</u>　$\gamma=1$とする。このとき(1.1)は必ず

$$\limsup_{t\to\infty} \left\{ |x(t)| + |x'(t)| \right\} > 0$$

なる解$x(t)$をもつ。

非線形の場合、定理4.12に対応する結果は得られていない。

REFERENCES

[1] R. Bellman, Stability Theory of Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1953. (Reprint: Dover, New York, 1969)

[2] L. Cesari, Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations, third edition, Springer, Berlin, 1971.

[3] W. A. Coppel, Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations, Heath, Boston, 1965.

[4] P. Hartman, Ordinary Differential Equations, second edition, Birkhäuser, Boston, 1982.

[5] I. T. Kiguradze, On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations, Arch. Math. (Brno), 14(1978), 21-44.

[6] 内藤学, Emden-Fowler型常微分方程式に対する振動理論, 日本数学会編集「数学」論説, 掲載予定.

[7] W. T. Reid, Sturmian Theory for Ordinary Differential Equations, Appl. Math. Sci., Vol. 31, Springer, New York, 1980.

[8] C. A. Swanson, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New York, 1968.

[9] D. Willett, Classification of second order linear differential equations with respect to oscillation, Adv. in Math., 3(1969), 594-623.

[10] J. S. W. Wong, On the generalized Emden-Fowler equation, SIAM Rev., 17(1975), 339-360.