数理解析研究所講究録
第559巻 1985年 123-147

プラズマ閉じこめ研究にあらわれる双曲型線形発展方程式

電気通信大学　牛島照夫（Teruo Ushijima）

要旨

プラズマ閉じこめ研究においてひろく受け入れられている基本的な数理モデルとして，磁気流体系（Magnetohydrodynamic system，MHD系）がある。この系はプラズマの大局的挙動を良く記述していると考えられている。この系で電気抵抗が0のものを理想MHD系という。適当な未知関数の組をとれば，理想MHD系は保存則の形にあらわされる非線型双曲型発展系である。時間に依存せず，速度が0であるMHD系の解を静止平衡解という。静止平衡解が線形的に安定であるか否かを問う基準としての線形安定理論は，Bernstein et al. [1] などによって物理としては確立されたものになっており，この基準にもとづき多くの解析的ならびに数値的な研究がなされている。

本稿では，この線形安定理論で主役を果たす，数学的には

やゝ古典的ではないと思われる双曲型線形発展方程式を紹介し，しかるべき条件を静止平衡解がみたしているならば，この方程式はプラズマ領域上でのL^2空間における定作用素係数の二階の常微分方程式の初期値問題として考察できることを述べる。

1．理想MHD系と静止平衡解.

このモデルでは，プラズマは空間内の有界領域Ω_p全体にひろがっている一成分流体と考える。そこで以下の方程式系によって記述されると考える。

(1) $\dfrac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} v$,

(2) $\rho \dfrac{Dv}{Dt} = -\nabla P + J \times B$,

(3) $\dfrac{D}{Dt}(P\rho^{-\gamma}) = 0$,

(4) $\dfrac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot} E$,

(5) $\operatorname{div} B = 0$,

(6) $\operatorname{rot} B = \mu J$,

(7) $E + v \times B = 0$.

スカラー関数ρ，ベクトル関数vは，それぞれ，プラズマの密度，速度をあらわす。スカラー関数Pは圧力，ベクトル関数B，E，Jは，それぞれ，磁束密度，電場，電流密度である。慣習的にBは磁場とよばれている。μは真空の

透磁率，γは比熱比をあらわす正定数である。質量微分：$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(v,\nabla)$，$\nabla=grad$ を用い，×は通常のベクトルの外積である。

（1）は質量保存則であり，（2）の運動方程式の力の項は流体の粘性を考慮せずに圧力勾配と電磁場の相互作用による$J\times B$力を主要項とする。（3）は断熱条件の式である。（4）はマックスウェル方程式を構成するファラデイの電磁誘導の法則であり，（5）は単極磁場の不存在を示す。（6）はアンペールの電流磁気関係の法則：

$$\frac{\partial D}{\partial t}+J=rot\,H$$

において電気変位Dの時間変化が注目している閉じこめ現象の特徴的な時間に比べて無視出来るものとし，構成法則：

$$B=\mu H$$

を代入して得たものである。（7）は，オームの法則であって，有限抵抗の場合は，ローレンツ力$E+v\times B$に対して

$$\eta J=E+v\times B$$

によって電流Jが定まるのであるが，理想系であることより電気抵抗ηは0である。

（6）を（2）に，（7）を（4）に代入して，

（2）$_0$ $\rho\frac{Dv}{Dt}=-\nabla P+\frac{1}{\mu}rot\,B\times B$，

（4）$_0$ $\frac{\partial B}{\partial t}=rot\,(v\times B)$．

結局、プラズマ領域Ω_pにおける支配方程式系は(1),(2)$_0$,(3),(4)$_0$,(5)となる。

プラズマ領域Ω_pの閉包は有界領域Ωに完全に含まれているとする。Ω_pとΩの境界を、それぞれ、Γ_pとΓであらわす。Γは完全電気伝導度をもっているものとする。$\Omega_v=\Omega-\overline{\Omega_p}$を真空領域と考える。以下では、$\Omega_p$, Ω_v, Ωは全て連結しているものを考える。(図1参照)。

真空領域Ω_vでは、

(8) $\rho = P = 0$, $v = J = 0$,

(4)$_v$ $\frac{\partial B}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, E$,

(5)$_v$ $\mathrm{div}\, B = 0$,

(6)$_v$ $\mathrm{rot}\, B = 0$,

が成立していると考え、境界Γでは

(9) $n \times E = 0$,

又は、

(10) $(B, n) = 0$

を与える。nはΓの各点における外向き単位法線である。

プラズマ境界Γ_pでは、

(10)$_{p,v}$ $(B_p, n) = (B_v, n) = 0$,

(11) $(E_p + v_p \times B_p) \times n = (E_v + v_p \times B_v) \times n$,

(12) $P_p + \frac{1}{2\mu} B_p^2 = \frac{1}{2\mu} B_v^2$

の三条件が成立しているものとする。ここで添字 p と v は、それぞれ、プラズマ領域側からと真空領域側とからの境界値をあらわす。(10) と (10)$_{p,v}$ は、Γ と Γ_p がいわゆる磁気面であることを要請している。(11) は、プラズマの動きに沿って測った電界の接平面成分の連続性を要請している。(12) は圧力平衡の式とよばれており、線形化問題が非古典的付境界値問題になる源になっている。

(1) ～ (12) をみたす解で、速度が 0 で時間に依存しないものを静止平衡解という。$\{\rho, v(=0), P, J, B, E\}$ が平衡解であるとすると、$\{P, J, B\}$ は、

$$
(13)\begin{cases}
\nabla P = J \times B,\ \mathrm{div}\, B = 0,\ \mathrm{rot}\, B = \mu J & \text{in } \Omega_p, \\
P = 0\ \ \ \ ,\ \mathrm{div}\, B = 0,\ \mathrm{rot}\, B = 0 & \text{in } \Omega_v, \\
(B, n) = 0 & \text{on } \Gamma_p \cup \Gamma, \\
P_p + \frac{1}{2\mu} B_p^2 = \frac{1}{2\mu} B_v^2 & \text{on } \Gamma_p
\end{cases}
$$

をみたすものとして記述される。

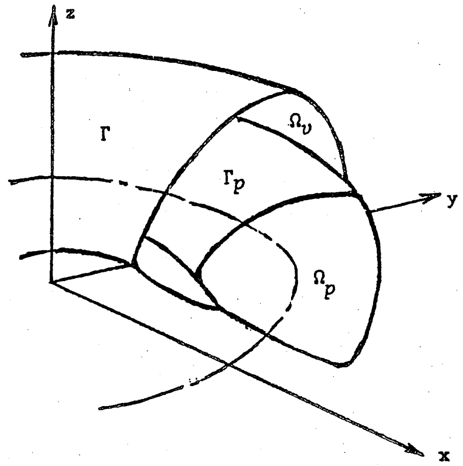

図1. トーラス状
プラズマ閉じこめの模式図

2. 線形化MHD方程式の発見的導出.

静止平衡解 $\{\rho,\ v=0,\ P,\ J,\ B,\ E\}$ が与えられたとしよう。$\{P,\ J,\ B\}$ は,(1.13) をみたしている。この解の近くで次の形をした理想MHD系の解 $\{\tilde{\rho},\ \tilde{v},\ \tilde{P},\ \tilde{J},\ \tilde{B},\ \tilde{E}\}$ が存在したと考える.

$$(1)\quad \begin{cases} \tilde{\rho} = \rho + \varepsilon\rho_1, \quad \tilde{v} = \varepsilon v_1, \quad \tilde{P} = P + \varepsilon P_1, \\ \tilde{J} = J + \varepsilon J_1, \quad \tilde{B} = B + \varepsilon B_1, \quad \tilde{E} = E + \varepsilon E_1 \end{cases}$$

ここで ε は十分小さい実のパラメタである。プラズマ領域 Ω_p は. 変換:

$$(2)\quad \tilde{r}(t, r) = r + \varepsilon\xi(t, r)$$

によって $\tilde{\Omega}_p$ にうつされると考える。(1) を (1.1), (1.2), (1.3), (1.4)。, (1.5) に形式的に代入する。その方程式系を ε の巾で整頓し, ε の一次の項の係数を比較することによって $\{\rho_1,\ v_1,\ P_1,\ J_1,\ B_1\}$ についての次の線形系が得られる。

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho_1}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v_1) = 0, \\ \rho\dfrac{\partial v_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + J \times B_1 + J_1 \times B. \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial t} + (v_1, \nabla)P + \gamma P\,\mathrm{div}\, v_1 = 0, \\ \dfrac{\partial B_1}{\partial t} = \mathrm{rot}(v_1 \times B). \\ \mathrm{div}\, B_1 = 0. \end{cases}$$

これは, 各時刻 t で $\Omega_p \cap \tilde{\Omega}_p$ において成立していると考え

るべきであろうが、ここでは、（３）が、全ての時刻 t に対して Ω_p で成立するものと考える。初期条件として、

（４）　$\xi(0, \mathbb{r}) = 0, \quad \mathbb{r} \in \Omega_p.$

および

（５）　$\rho_1(0, \mathbb{r}) = P_1(0, \mathbb{r}) = 0, \quad B_1(0, \mathbb{r}) = 0$

$\qquad J_1(0, \mathbb{r}) = 0, \qquad\qquad \mathbb{r} \in \Omega_p$

を要請する。

（６）　$v(t, \mathbb{r}(t, \mathbb{r}_0)) = \frac{d}{dt}\tilde{\mathbb{r}}(t, \mathbb{r}_0) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\xi(t, \mathbb{r}_0).$

であり、テイラー展開可能とすれば、

$$v(t, \mathbb{r}(t, \mathbb{r}_0)) = \varepsilon v_1(t, \mathbb{r}_0) + O(\varepsilon^2)$$

となるはずだから（６）より、

（７）　$v_1(t, \mathbb{r}) = \frac{\partial}{\partial t}\xi(t, \mathbb{r}), \quad t > 0, \quad \mathbb{r} \in \Omega_p$

の成立を認めよう。（７）を（３）に代入し初期条件（４）（５）を考慮して、

$$(8)\begin{cases} \rho_1 = -\mathrm{div}(\rho\xi), \\ \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\nabla P_1 + \frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}\,B \times B_1 + \mathrm{rot}\,B_1 \times B), \\ P_1 = -(\xi, \nabla)P - \gamma P\,\mathrm{div}\,\xi, \\ B_1 = \mathrm{rot}(\xi \times B) \end{cases}$$

が Ω_p で成立していると考える。

真空領域 Ω_v では、$\tilde{B}$ と $\tilde{E}$ を $(1.4)_v$, $(1.5)_v$, $(1.6)_v$ に代入して、ε の一次の係数を比較して

$$(9)\begin{cases} \dfrac{\partial B_1}{\partial t} = -\mathrm{rot}\, E_1\,, \\ \mathrm{div}\, B_1 = 0\,, \\ \mathrm{rot}\, B_1 = 0 \end{cases}$$

が成立しているものと考える。さらに次の性質（10）をみたすB_1のベクトルポテンシャルαが存在すると考える。

$$(10)\begin{cases} B_1 = \mathrm{rot}\,\alpha\,,\quad E_1 = -\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} & \text{in } \Omega_v, \\ n \times \alpha(0, r) = 0\,, & r \in \Gamma_p\,. \end{cases}$$

（9）の第3式をみたすために，

$$(11)\quad \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\alpha = 0 \qquad \text{in } \Omega_v,$$

を要請し，（1.10）をみたすために，

$$(12)\quad n \times \alpha = 0 \qquad \text{on } \Gamma.$$

を要請する。

接続条件（1.11）に対応する条件を導出しよう。

$$(\widetilde{1.7})\quad \hat{E} + \tilde{v} \times \hat{B} = 0 \qquad \text{in } \widetilde{\Omega_p}$$

より，εの1次の項の係数比較により

$$(13)\quad E_{1p} + v_1 \times B_p = 0 \qquad \text{in } \overline{\Omega_p}$$

であると考える。（1.11）の両辺に$\hat{E}$，$\tilde{v}$，$\hat{B}$ を代入することにより

$$(14)\quad n\times(E_{1p} + v_1 \times B_p) = n\times(E_{1v} + v_1 \times B_v) \quad \text{on } \Gamma_p$$

であると考える。（14）の左辺に（13），右辺に（10）の第2式と（7）を代入することにより，

$$0 = n \times \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \times B_v\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(n \times (-\alpha + \xi \times B_v)\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(-n \times \alpha + (n, B_v)\xi - (n, \xi) B_v\right).$$

(1,10)$_v$ により.

(15) $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(n \times \alpha + (n, \xi) B_v\right) = 0 \qquad \text{on } \Gamma_p.$

(5)の初期条件がΓ_p上でも成立するとし，(10)の第3式をあわせ使うと，(15)より.

(16) $n \times \alpha = -(n, \xi) B_v \qquad \text{on } \Gamma_p$

となる。この(16)を(1,11)から遺伝した接続条件と見なそう。

接続条件(1.12)に対応する条件は次のようにして導びかれる。$\mathbb{r}_0$ をΓ_pの点とする。$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t, \mathbb{r}_0) = \mathbb{r}_0 + \varepsilon \xi(t, \mathbb{r}_0)$ を $\mathbb{r}_0$ に対応する$\widetilde{\Omega}_p$ の境界$\widetilde{\Gamma}_p$ 上の点とする。摂動を受けた圧力$\widetilde{P}(t, \mathbb{r})$ に対して次のテイラー展開が成立することを認める:

$$\widetilde{P}(t, \mathbb{r}) = \widetilde{P}(t, \mathbb{r}_0) + (\varepsilon \xi(t, \mathbb{r}_0), \nabla) \widetilde{P}(t, \mathbb{r}_0) + O(\varepsilon^2).$$

$\widetilde{P} = P + \varepsilon P_1$ であるから

(17) $\widetilde{P}(t, \mathbb{r}) = P(\mathbb{r}_0) + \varepsilon\left(P_1(t, \mathbb{r}_0) + (\xi(t, \mathbb{r}_0), \nabla) P(\mathbb{r}_0)\right) + O(\varepsilon^2).$

圧力と同様に，次の展開の成立を認める.

(18) $\widetilde{B}_p(t, \mathbb{r}) = B_p(\mathbb{r}_0) + \varepsilon\left(B_{1p}(t, \mathbb{r}_0) + (\xi(t, \mathbb{r}_0), \nabla) B_p(\mathbb{r}_0)\right) + O(\varepsilon^2),$

(19) $\widetilde{B}_v(t, \mathbb{r}) = B_v(\mathbb{r}_0) + \varepsilon\left(B_{1v}(t, \mathbb{r}_0) + (\xi(t, \mathbb{r}_0), \nabla) B_v(\mathbb{r}_0)\right) + O(\varepsilon^2).$

(17), (18), (19)を,

$$(\widetilde{1.12})\quad \widetilde{P_p}+\frac{1}{2\mu}\widetilde{B_p}^2=\frac{1}{2\mu}\widetilde{B_v}^2 \qquad \text{on } \widetilde{\Gamma_p}$$

に代入して, εの1次の項の係数を比較して

$$(20)\quad P_1+(\xi,\nabla)P+\frac{1}{\mu}(B_p,\,B_{1p}+(\xi,\nabla)B_p)$$
$$=\frac{1}{\mu}(B_v,\,B_{1v}+(\xi,\nabla)B_v) \qquad \text{on } \Gamma_p.$$

を得る。(8)の第3式, 第4式と(10)の第1式を代入すると,

$$(21)\quad -\gamma P\,\mathrm{div}\,\xi+\frac{1}{\mu}(B_p,\,\mathrm{rot}(\xi\times B_p)+(\xi,\nabla)B_p)$$
$$=\frac{1}{\mu}(B_v,\,\mathrm{rot}\,\alpha+(\xi,\nabla)B_v) \qquad \text{on } \Gamma_p$$

となる。この(21)が(1.12)から遺伝した接続条件である。結局(8)の第2式, (11), (12), (16), (21)から我々は次の線形化MHD方程式(LMHD系と略す)の初期値境界値問題を得る。

問題 ベクトル値関数の組$\{\xi,\alpha\}$:

$$\xi=\xi(t,\mathbb{x}) : [0,\infty)\times\overline{\Omega_p}\longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
$$\alpha=\alpha(t,\mathbb{x}) : (0,\infty)\times\overline{\Omega_v}\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

で次の条件(22)をみたすものを求めよ。

$$(22)\begin{cases}\rho\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+K\xi=0 & \text{in } (0,\infty)\times\Omega_p,\\ \xi(0,\mathbb{x})=0 & \text{in } \Omega_p,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\xi(0,\mathbb{x})=v(\mathbb{x}) & \text{in } \Omega_p,\\ -(\xi,n)B_v=\alpha\times n & \text{on } (0,\infty)\times\Gamma_p,\end{cases}$$

$$\begin{cases} L(\xi, \alpha) = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma_p, \\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\alpha = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \Omega_v, \\ n \times \alpha = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \Gamma. \end{cases}$$

ここで，

$$(23) \quad K\xi = -\nabla\{(\xi, \nabla P) + \gamma P \,\mathrm{div}\,\xi\} - \frac{1}{\mu}\{\mathrm{rot}\,B \times \mathrm{rot}(\xi \times B) + [\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}(\xi \times B)] \times B\},$$

$$(24) \quad L(\xi, \alpha) = -\gamma P \,\mathrm{div}\,\xi + \frac{1}{\mu}(B_p, \mathrm{rot}(\xi \times B_p) + (\xi, \nabla)B_p) - \frac{1}{\mu}(B_v, \mathrm{rot}\,\alpha + (\xi, \nabla)B_v).$$

3．線形化MHD作用素の確立．

前節の問題は，ヒルベルト空間 $X = \{L^2(\Omega_p)\}^3$ における発展方程式：

$$(1) \quad \begin{cases} M\dfrac{d^2\xi}{dt^2} + A\xi = 0, & t > 0, \\ \xi(0) = \xi^1, \quad \dfrac{d\xi}{dt}(0) = \xi^0 \end{cases}$$

において初期値を $\{\xi^1, \xi^0\} = \{0, v\}$ とした問題と見なせることを解説する。（1）における M は，静止平衡解における質量 $\rho = \rho(\mathbf{r})$ を乗ずる作用素であり，

$$(2) \quad 0 < \underline{\rho} \le \rho(\mathbf{r}) \le \overline{\rho} < \infty, \qquad \mathbf{r} \in \Omega_p$$

なる正定数 $\underline{\rho}$ と $\overline{\rho}$ が存在するものと仮定している。 A は微分作用素 K の空間 X での実現とみなせる自己共役作用素である。 静止平衡解に対して次の条件（A.1）～（A.6）を仮

定する。

(A.1) Ω, Ω_p, Ω_v はいずれも有界な連結領域で、その境界はC^3級である。

(A.2) $B|_{\Omega_p}$と$B|_{\Omega_v}$は、それぞれ$C^2(\overline{\Omega_p})$と$C^2(\overline{\Omega_v})$に属す拡張をもつ。

(A.3) $P|_{\Omega_p}$は、正であり、$C^2(\overline{\Omega_p})$に属す拡張をもつ。(Γ_pでは0になり得る。) その臨界点集合$C_P = \{\mathbb{r} \in \Omega_p : (\nabla P)(\mathbb{r}) = 0\}$は、有限個の連結成分よりなり、おのおのの連結成分は、C^3級の単純曲線であるか、又はC^3級の曲面であってその曲面上の各点でBが接平面に含まれている、すなわち磁気面である、かのいずれかである。

(A.4) $\overline{P_1} = \sup_{\mathbb{r} \in \Omega_p - C_P} |(e, \mathrm{rot}\, e)| < \infty$

$(e = \nabla P / \|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3})$

又は、

$$\overline{P_2} = \sup_{\mathbb{r} \in \Omega_p} \frac{\|\nabla P\|_{\mathbb{R}^3}}{|P|^{1/2}} < \infty$$

のいずれかが成立つ。

(A.5) B_pはΓ_p上で決して0にならないか、又は、

PはΩ_p上で正定数で下からおさえられる

のいずれかが成立する。

(A.6) Ω_pからΩ_vへ向かうΓ_p上の単位法線ベクトルに沿った微分$\frac{\partial}{\partial n}$に関して食い違い

$$G = \frac{\partial}{\partial n}\frac{B^2}{2\mu}\Big|_v - \frac{\partial}{\partial n}\left(p+\frac{B^2}{2\mu}\right)\Big|_p$$

は，Γ_p上の非負値関数で，その平方根$\sqrt{G}$はΓ_p上でC^1級である。

自己共役作用素Aを線形化MHD作用素とよぶ。この作用素は(2.22)の第4式から第7式で表わされるベクトルポテンシャルに関する条件をある意味で含んだものである。プラズマ領域Ω_p上のベクトル関数ξが与えられると(2.22)の第4式から第7式をみたすαは存在し，rotαはξに対してある意味で一意に決まる。したがってこの第4式から第7式をξに関する同次境界条件：

(3) $L(\xi) = 0$ on Γ_p

と考えてよいというのが，我々の主張である。この推論の基礎になるのは，Morrey [4] の Theorem 7.8.2 からしたがう次の補題1である。

<u>補題1</u> Ωを$\mathbb{R}^3$内の有界領域でC^2級の境界Γをもつものとする。任意の$\eta \in \mathbb{H}^1(\Omega)$に対して，次の条件をみたす$\omega \in \mathbb{H}^1(\Omega)$が存在する．

$$\text{rot rot } \omega = 0 \qquad \text{in } \Omega,$$

$$n\times\omega = n\times\eta \qquad \text{on } \Gamma.$$

上の補題において，Ω上の１階のソボレフ空間を$H^1(\Omega)$とし，$\mathbb{H}^1(\Omega)=\{H^1(\Omega)\}^3$である。微分作用素$\mathrm{rot\,rot}$は超関数の意味であり，$n$は$\Gamma$上の外向き単位法線ベクトルである。補題１から次の命題２がしたがう。

<u>命題２</u>　任意の$\xi\in\mathbb{H}^1(\Omega_p)$に対して次の条件をみたす$\alpha\in\mathbb{H}^1(\Omega_v)$が存在する。

$$\begin{cases} \mathrm{rot\,rot}\,\alpha = 0 & \text{in } \Omega_v, \\ n\times\alpha = -(n,\xi)B_v & \text{on } \Gamma_p, \\ n\times\alpha = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases}$$

さらにこのようなξに対して，$\mathrm{rot}\,\alpha$は一意に定まる。

この補題によって，$\mathbb{V}_0=\mathbb{H}^1(\Omega_p)$上に次のようにプラズマエネルギー二次形式$a(\xi,\eta)$を定めることができる。

$$(4)\quad \begin{cases} a = a_p + a_s + a_v, \quad a_p = a_1 + a_2, \\ a_1(\xi,\eta) = \int_{\Omega_p}\{\gamma P\,\mathrm{div}\,\xi\,\mathrm{div}\,\eta + \frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}(\xi\times B),\mathrm{rot}(\eta\times B))\}\,dx \\ a_2(\xi,\eta) = \int_{\Omega_p}\{(\xi,\nabla P)\,\mathrm{div}\,\eta - \frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}(\xi\times B),\eta\times\mathrm{rot}\,B)\}\,dx \\ a_s(\xi,\eta) = \int_{\Gamma_p} G(\xi,n)(\eta,n)\,d\Gamma, \\ a_v(\xi,\eta) = \int_{\Omega_v}\frac{1}{\mu}(\mathrm{rot}\,\alpha,\mathrm{rot}\,\beta)\,dx. \end{cases}$$

ここで，a_gの右辺におけるGは（A.6）で定めたものであり，a_vの右辺におけるαは命題2でξに対して定まるものであり，βは命題2のξをηとして定まるものである。　$a_2(\xi,\eta)$は見かけ上非対称であるが，P，Bが静止平衡解であることと，臨界点集合CPに対する仮定（A.3）を使ってξとηについて対称であることをしめすことができる。

一般に$\mathbb{H}^m(\Omega)=\{H^m(\Omega)\}^3$とする。

<u>命題3</u>　$\xi\in\mathbb{H}^2(\Omega_p)$と$\eta\in\mathbb{H}^1(\Omega_p)$に対して，

（5）　$\int_{\Omega_p}(K\xi,\eta)dV=a(\xi,\eta)+\int_{\Gamma_p}L(\xi,\alpha)(n,\eta)d\Gamma$

が成立つ。（5）の右辺のαは，命題2によってξに対して定まるものである。

この命題3は，境界条件：$L(\xi,\alpha)=0$は，微分作用素Kに対するいわば自然境界条件の役割をしていることを示唆している。　本質的境界条件に対応する

（6）　$(\xi,n)=0$　　　　on Γ_p

を採用する問題は固定境界問題と呼ばれている。摂動変位として境界と直交する成分を持つものは許さないことを意味している。

仮定（A.1）～（A.6）を使うと，対称二次形式$a(\xi,\eta)$

は下半有界であることがわかる。すなわちある$\kappa_0 \in \mathbb{R}$が存在して、

(7) $a(\xi, \xi) + \kappa(\xi, \xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)} \geqq 0$, $\kappa \geqq \kappa_0$, $\xi \in \mathbb{H}^1(\Omega_p)$

を示すことができる。ここで、$\mathbb{L}^2(\Omega_p) = \{L^2(\Omega_p)\}^3$である。

Lüst-Martensen [3] による真空における摂動磁場の表示式をソボレフ空間のわくで証明しなおした上で、$a_\kappa(\xi, \eta) = a(\xi, \eta) + \kappa(\xi, \eta)_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)}$が、$\mathbb{V}_0 = \mathbb{H}^1(\Omega_p)$上で、$\kappa \geqq \kappa_0$なら可閉である、すなわち、$\{\xi_m\} \subset \mathbb{V}_0$が、

$$
(8)\quad \begin{cases} \|\xi_m\|_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)} \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty) \\ \text{かつ} \\ a_\kappa(\xi_m - \xi_{m'}) \longrightarrow 0 \quad (m, m' \longrightarrow \infty) \\ \text{ならば} \\ a_\kappa(\xi_m) \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow \infty) \end{cases},
$$

($a_\kappa(\xi) = a_\kappa(\xi, \xi)^{1/2}$) であることを示すことが出来る。$\mathbb{V}_0$の$a_\kappa$ノルムによる完備化を$\mathbb{V}$とすると、

(9) $\mathbb{V}$は、$\mathbb{L}^2(\Omega_p)$の稠密な部分集合

になることが、a_κの可閉性からしたがう。このとき、連続性によって二次形式$a_\kappa(\xi, \eta)$は、$\mathbb{V}$を定義域とする二次形式に拡張される。自明な修正によって$a_\kappa(\xi, \eta)$を複素ヒルベルト空間$\mathbb{L}^2(\Omega_p)$において定義域を$\mathbb{V}$とする正定値な

閉じたエルミート形式であると見なすことができる。Kato [2]の才6章の Theorem 2.23 によって，次の性質(10), (11), (12) をもつ自己共役作用素A_κがただ一つ存在する。

(10) 定義域$D(A_\kappa)$はa_κノルムの意味で$\mathbb{V}$で稠密。

(11) $(A_\kappa\xi, \eta)_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)} = a_\kappa(\xi, \eta)$, $\xi \in D(A_\kappa)$, $\eta \in \mathbb{V}$.

(12) $D(A_\kappa^{1/2}) = \mathbb{V}$ であり，

$$(A_\kappa^{1/2}\xi, A_\kappa^{1/2}\eta) = a_\kappa(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{V}.$$

そこで，我々は，$\kappa > \kappa_0$ に対して，

(13) $A = A_\kappa - \kappa$, $D(A) = D(A_\kappa)$

によって，自己共役作用素Aを定義し，これをLMHD作用素と呼ぶことにする。かくして，発展方程式(1)の意味が確定する。2節の問題の解ξが存在し，十分に滑らかであれば(1)の解であることは容易にわかる。

4. プラズマエネルギーの下半有界性.

本節では，仮定(A.4)で，$\overline{P}_1 < \infty$ の場合の考察を行なう。出発点となるのは次の補題である。

<u>補題1.</u> $x \in \Omega_p - C_p$ において3ベクトル関数EとFを

(1) $E = \nabla\phi B \times e$, $F = (B, \nabla)e - (e, \nabla)B + \nabla\phi B \times e$

によって定める（$e = \nabla P / \| \nabla P \|_{\mathbb{R}^3}$）。このとき，$\xi \in \mathbb{V}_0$ で

$$(2) \quad a_p(\xi, \xi) = \int_{\Omega_p} \{ \gamma P |\operatorname{div} \xi|^2 + \frac{1}{\mu} \| \operatorname{rot}(\xi \times B) + (\xi, e) E \|^2 - \frac{1}{\mu}(E, F) |(\xi, e)|^2 \} d\mathbb{V}.$$

この補題を示すための計算はかなり長いので省略する。被積分関数は C_p 上では適当に定めるものとする。さて

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \underline{M} = \inf_{\mathbb{V} \in \Omega_p - C_p} (E, F), \quad \bar{M} = \sup_{\mathbb{V} \in \Omega_p - C_p} (E, F), \\ N = \sup_{\mathbb{V} \in \Omega_p - C_p} \| E \|^2_{\mathbb{R}^3} \end{array} \right.$$

とおく。仮定（A. 2）より，N は有限である。

<u>命題 2.</u> $\bar{P}_1 < \infty$ は，$\underline{M}$ と $\bar{M}$ が有限であることを保証する。

証明．ベクトル関数の等式

$$\nabla(e, B) = (B, \nabla)e + (e, \nabla)B + e \times \operatorname{rot} B + B \times \operatorname{rot} e, \quad \mathbb{V} \in \Omega_p - C_p$$

において，$(e, B) = 0$ であるから

$$(4) \quad (B, \nabla)e = -(e, \nabla)B - e \times \operatorname{rot} B - B \times \operatorname{rot} e, \quad \mathbb{V} \in \Omega_p - C_p$$

（1）の第 2 式に（4）を代入すると

$$F = -2(e, \nabla)B + 2 \operatorname{rot} B \times e - B \times \operatorname{rot} e, \quad \mathbb{V} \in \Omega_p - C_p.$$

したがって

$$(5) \quad (E, F) = 2 \{ \| \operatorname{rot} B \times e \|^2 - ((e, \nabla)B, \operatorname{rot} B \times e) \} - (\operatorname{rot} B \times e, B \times \operatorname{rot} e), \quad \mathbb{V} \in \Omega_p - C_p.$$

ベクトルの等式：$(A \times B, C \times D) = (A, C)(B, D) - (A, D)(B, C)$

を（5）の第2項に使うと，

$$(\mathrm{rot}\,B\times e,\ B\times\mathrm{rot}\,e)=(\mathrm{rot}\,B, B)(e,\mathrm{rot}\,e)$$
$$-(e, B)(\mathrm{rot}\,B, \mathrm{rot}\,e), \qquad \mathbf{r}\in\Omega_p-C_p$$

再び，$(e, B)=0$ なることにより，

（6）　$(\mathrm{rot}\,B\times e,\ B\times\mathrm{rot}\,e)=(\mathrm{rot}\,B, B)(e,\mathrm{rot}\,e), \ \mathbf{r}\in\Omega_p-C_p.$

（6）を（5）に代入すれば，

（7）　$(E,F)=2\{\|\mathrm{rot}\,B\times e\|^2-((e,\nabla)B,\ \mathrm{rot}\,B\times e)\}$
$$-(\mathrm{rot}\,B, B)(e,\mathrm{rot}\,e), \qquad \mathbf{r}\in\Omega_p-C_p.$$

したがって，仮定（A.2）によって，$\overline{P}_1<\infty$ であるから，

$$\sup_{\mathbf{r}\in\Omega_p-C_p}|(E,F)|<\infty.$$

すなわち，$\underline{M}$ と $\overline{M}$ は有限である。

命題3．仮定（A.4）において $\overline{P}_1<\infty$ が成立しているとする。$\kappa_0=\frac{1}{\mu}\max(N+\overline{M},\ 3N-\underline{M})$ とおくと

（8）
$$\begin{cases}\frac{1}{2}a_1(\xi,\xi)+(\kappa-\kappa_0)(\xi,\xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)}\\ \leq a_p(\xi,\xi)+\kappa(\xi,\xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)}\\ \leq\frac{3}{2}a_1(\xi,\xi)+(\kappa+\kappa_0)(\xi,\xi)_{\mathbb{L}^2(\Omega_p)},\quad \xi\in\mathbb{H}^1(\Omega_p).\end{cases}$$

証明．シュワルツの不等式による。

この命題3から，プラズマエネルギー二次形式 $a_p(\xi,\eta)$ は下半有界であり，仮定（A.6）を考慮すると，全エネルギー

に対応する二次形式 $a(\xi, \eta)$ も下半有界になる。

ところで、現実的なプラズマのモデルに対しては、条件 $\overline{P}_1 < \infty$ はどうなるであろうか。次の命題を挙げよう。

命題4　1)　z 方向に周期的な円柱プラズマ，2) 単純巣をもつトロイダルプラズマ，においては，$\overline{P}_1 = 0$ である。

命題4を解説するために，円柱プラズマとトロイダルプラズマについて説明する。プラズマが柱状であるとは，適当な直交座標系 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ をとったとき，プラズマを記述する量が z 方向に依存しないことである。柱状プラズマが円柱プラズマであるとは，適当な円柱座標系 $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$ をとったとき，それらの量が θ と z に依存しないことである。通常，円柱プラズマは z 方向に周期 L をもつものとされる。プラズマが，トロイダルプラズマであるとは，適当な円柱座標系 $\mathbf{r} = (r, z, \theta)$ をとったとき，それらの量が θ に依存しないことである。

円柱プラズマにおいて，

$$P = P(r), \quad \mathbf{B} = B_r(r)\mathbf{e}_r + B_\theta(r)\mathbf{e}_\theta + B_z(r)\mathbf{e}_z$$

とおく。単位ベクトル $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ は，それぞれ，r，θ，z 方向の単位ベクトルで右手系をなすものである。静

止平衡条件（1.13）のうちΩ_pとΓ_pに関係する条件は，

（9）$B_r \equiv 0, \quad 0<r<a,$

（10）$\mu\frac{dP}{dr}+B_z\frac{dB_z}{dr}+\frac{B_\theta}{r}\frac{d}{dr}(rB_\theta)=0, \quad 0<r<a$

に帰着される。ここでプラズマ領域は

（11）$\Omega_p=\{\mathbb{r}=(r,\theta,z): 0\le r<a\}$

であると仮定している。実際（9）は，$\mathrm{div}\,B=0$とΓ_pで$(B,n)=0$なることによっている。これから（10）は，$\nabla P=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,B\times B$よりしたがう。$B_\theta(r)$，$B_z(r)$と$p(r)$を与えることによって，$\Omega_p$での静止平衡解を作ることが出来る。この場合

$$e=\mathrm{sign}\left(\frac{dP}{dr}\right)e_r, \quad \mathbb{r}\in\Omega_p-C_p$$

であり，$\mathrm{rot}\,e_r=0$であるから，

$$\mathrm{rot}\,e=0, \qquad \mathbb{r}\in\Omega_p-C_p$$

となって，$\overline{P}_1=\sup_{\mathbb{r}\in\Omega_p-C_p}|(e,\mathrm{rot}\,e)|=0$がしたがう。

円柱プラズマとトロイダルプラズマを比較すると，円柱プラズマにおけるB_θとB_zは，トロイダルプラズマにおけるポロイダル磁束密度とトロイダル磁束密度に対応する。天下り的であるが，トロイダルプラズマにおける平衡座標系(ψ,χ,θ)を導入する。関数$\psi=\psi(r,z)$は，いわゆるグラド・シャフラノフ方程式：

（12）$-\Delta^*\psi=\mu r^2\frac{dP}{d\psi}+\frac{d}{d\psi}\left(\frac{T}{2}\right)^2 \quad \mathrm{in}\ \omega_p$

の解で附帯条件：

$$
(13)\begin{cases}
-\Delta^*\psi = 0 & \text{in } \omega_v, \\
\psi_a < \psi < \psi_b & \text{in } \omega_p, \\
\psi = \psi_b & \text{on } \gamma_p = \partial\omega_p, \\
\psi_b < \psi < \psi_c & \text{in } \omega_v, \\
\psi = \psi_c & \text{on } \gamma = \partial\omega,
\end{cases}
$$

をみたすものである。 ここで

$$\Delta^* = r\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

であり，PとTはψの与えられた関数であるとする（$P = P(\psi)$，$T = T(\psi)$）。 ωは，r-z右半平面内の領域でω_pをその内部に含み，$\omega_v = \omega - \overline{\omega_p}$であり，$\omega$，$\omega_p$，$\omega_v$は連結しているものとする。$\psi_a$，$\psi_b$，$\psi_c$は，実の定数である。(12)—(13)のなめらかな解ψが得られた場合に，

$$
(14)\begin{cases}
B = B_r e_r + B_z e_z + B_\theta e_\theta, \\
B_r = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial z}, \quad B_z = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}, \quad B_\theta = \dfrac{T}{r}, \\
\Omega_p = \{(r, z, \theta) : (r, z) \in \omega_p, \ 0 \le \theta < 2\pi\}
\end{cases}
$$

と定め，Ω_vとΩをΩ_pと同様に，ω_vとωを使って定義する。 このとき，$\{P, \text{rot}\, B, B\}$は，Ω_pにおける静止平衡解の条件（1.13）をみたす。 さらに，

(15) $P(\psi) = 0$, $T(\psi) = T(\psi_b - 0)$ for $\psi \ge \psi_b$

を仮定すると，ψが"$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_p = \left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_v$ on γ_p"をみたすよ

うに滑らかになっているならば，(1.13)の他の条件もみたされることになる。このようにして，自由境界型問題である(12)−(13)を解くことによって，トロイダルプラズマの静止平衡解{P, J, B}を定めることができる。

さて，問題(12)−(13)の解$\psi=\psi(r, z)$がω_pで十分滑らかであり次の諸条件(16)〜(19)をみたしているとする。

(16)　ψはその最小値ψ_aを内部の唯一点$(r_a, z_a)\in\omega_p$でとる。

(17)　任意の$\Psi\in(\psi_a, \psi_a)$に対して，等高線$\Gamma_\Psi=\{(r,z): \psi(r,z)=\Psi\}$は自分自身と交叉しないなめらかな閉曲線である。

(18)　二変数rとzの関数$\chi(r,z)$があって$\{\psi, \chi\}$は$\omega_p-\{(r_a, z_a)\}$をみたす直交曲線座標になっている。すなわち，すべての$X\in[0, 2\pi)$に対して，等高線$C_X=\{(r,z): \chi(r,z)=X\}$は自分自身と交叉しないなめらかな曲線で全ての等$\Psi$線$\Gamma_\Psi$と直交し，$\bigcup_{0\le X<2\pi} C_X=\omega_p-\{(r_a, z_a)\}$及び$C_{2\pi}=C_0$をみたす。

(19)　(ψ, X, θ)は，右手系に対応する向きづけを持った直交曲線座標系である。

上述の座標系(ψ, X, θ)を平衡座標系とよぶことにする。円周$\{\mathbf{r}=(r_a, z_a, \theta): 0\le\theta<2\pi\}$は磁気軸とよばれる。平衡座標系のメトリックを$h_\psi$, h_χ, h_θとする。すなわち，

(20) $h_\psi = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2}$, $h_\chi = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \chi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \chi}\right)^2}$, $h_\theta = r$.

ここで次の表現を使っている。

(21) $r = r(\psi, \chi)$, $z = z(\psi, \chi)$, $(r, z) \in \overline{\omega_p}$.

この座標系による単位ベクトル系を，$\mathbf{e}_\psi$, $\mathbf{e}_\chi$, $\mathbf{e}_\theta$ とすると

(22) $\mathrm{rot}\, \mathbf{e}_\psi = -\left(\frac{\partial h_\psi}{\partial \chi} / (h_\psi h_\chi)\right) \mathbf{e}_\theta$

であり，$P = P(\psi)$に対して，$e = \nabla P / \| \nabla P \|_{\mathbb{R}^3}$ であるから

(23) $e = \mathrm{sign}\left(\frac{dP}{d\psi}\right) \mathbf{e}_\psi$, $\quad \mathbf{r} \in \Omega_p - C_p$

となる。(22), (23) より．

(24) $\mathrm{rot}\, e = -\,\mathrm{sign}\left(\frac{dP}{d\psi}\right)\left(\frac{\partial h_\psi}{\partial \chi} / (h_\psi h_\chi)\right) \mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{r} \in \Omega_p - C_p$.

したがって (23), (24) により

$$(e, \mathrm{rot}\, e) = 0, \qquad \mathbf{r} \in \Omega_p - C_p$$

となり，この場合も $\overline{P}_1 = 0$ がしたがう。

本稿での議論の詳細は，Ushijima [5]，Ushijima-Nakamura-Hanada [6] を参照していただきたい。なお命題4においては，条件 (16) ～ (19) をみたす直交曲線座標系 (ψ, χ, θ) によって記述されるプラズマを単純巣をもつトロイダルプラズマとよんだ。

文献

[1] Bernstein, I., Frieman, E., Kruskal, M., Kulsrud, R., An energy principle for hydromagnetic stability problem, Proc. Royal Soc. A. 244, 17-40 (1958).

[2] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, Berlin, 1966.

[3] Lüst, von R., Martensen, E., Zur Mehrwertigkeit des skalaren magnetischen Potentials beim hydromagnetischen Stabilitätsproblem eines Plasmas, Z. Naturforsch, A 15, 706-713 (1960).

[4] Morrey, C. Jr., Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer, Berlin, 1966.

[5] Ushijima, T., On the linearized magnetohydrodynamic systems of equations for a contained plasma in a vacuum region, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, V, 509-527 (1982).

[6] Ushijima, T., Nakamura, M., Hanada, T., On the linearized magnetohydrodynamic system appearing in the plasma confinement study, preprint, Univ. of Electro-Comm.