

作用素の分数中に値をとる関数の滑らかさとその応用

大阪大理 八木厚志 (Atsushi Yagi)

1. 序

X を Hilbert 空間、 $A(\cdot)$ を区間 $[0, T]$ で定義された X の線型 (ω, M) 型作用素に値をとる関数とする ($0 \leq \omega < \pi$)。幾かの興味ある場合において、 $A(t)$ の定義域 $\mathcal{D}(A(t))$ は t と共に変わるにもかかわらず、十分小さい $0 < \theta < 1$ に対して分数中 $A(t)^\theta$ の定義域 $\mathcal{D}(A(t)^\theta)$ は t について一定となることがある。我々は、この様な場合の関数 $A(\cdot)^\theta$ の変数 t についての滑らかさについて関心がある。というのは、線型発展方程式論において、係数作用素 $A(t)$ の定義域が時間変数 t と共に変わる場合に、この様な分数中 $A(t)^\theta$ の定義域が一定であることを、 $A(t)^\theta$ の t についての適当な滑らかさを示すことにより利用することは非常に有用な方法の一つだからである (詳しくは、4 節を参照)。

2. 作用素の純虚数中

この節では、準備として、有界な逆を持つ線型 (ω, M) 型作用素 A についてその純虚数中 $A^{i\theta}$ が有界となるための条件について述べる。[9, Théorème 21] によれば、以下の3条件は互いに同値である：

(I) $A^{i\theta}$ $(-\infty < \theta < +\infty)$ は X の有界作用素

(II) すべての $0 < \theta < 1$ について

$$\Delta(A^\theta) = [\Delta(A), X]_{1-\theta}, \quad \Delta(A^{*\theta}) = [\Delta(A^*), X]_{1-\theta}$$

(III) すべての $0 < \theta < 1$ について

$$\left\{ \int_0^\infty \lambda^{1-2\theta} \|A^\theta(\lambda + A)^{-1}f\|_X^2 d\lambda \right\}^{1/2} \leq M_\theta \|f\|_X, \quad f \in X$$

$$\left\{ \int_0^\infty \lambda^{1-2\theta} \|A^{*\theta}(\lambda + A^*)^{-1}g\|_X^2 d\lambda \right\}^{1/2} \leq M_\theta^* \|g\|_X, \quad g \in X.$$

この結果より直ちに：

定理 2.1. 極大単調作用素 A は、上の条件 (I), (II), (III) を満たす。

もっと一般に、[9, Théorème B] より次のことが得られる：

定理 2.2. A について、ある $0 < \delta < 1$ が存在してすべての $0 < \theta < \delta$ に対して、 $\Delta(A^\theta) = \Delta(A^{*\theta})$ あるいは $[\Delta(A), X]_{1-\theta} = [\Delta(A^*), X]_{1-\theta}$ が成り立てば、 A は条件 (I),

(II), (III) を満たす。

A が極大単調ならば、すべての $0 < \theta < 1/2$ に対して $\mathcal{D}(A^\theta) = \mathcal{D}(A^{*\theta})$ となることが知られている ([13, 第2章, 予備定理 3.8] 参照)。

例 2.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域、 $A(x; D)$ を Ω 上の $2m$ 階適正楕円型作用素、 $\{B_j(x'; D)\}_{1 \leq j \leq m}$ を正規境界条件とする。 $H^0(\Omega)$ の線型作用素 A を

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = \{u \in H^{2m}(\Omega); B_j(x'; D)u|_{\partial\Omega} = 0, 1 \leq j \leq m\} \\ Au = A(x; D)u \end{cases}$$

と定義する。 A^* も同様に、共役境界条件 $\{C_j(x'; D)\}_{1 \leq j \leq m}$ を用いると

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A^*) = \{v \in H^{2m}(\Omega); C_j(x'; D)v|_{\partial\Omega} = 0, 1 \leq j \leq m\} \\ A^*v = A(x; D)^*v \end{cases}$$

と表わされる。しかるに、[11, Chap. 4, Théorème 14.4] によれば、任意の $0 < \theta < 1/4m$ に対して

$$[\mathcal{D}(A), H^0(\Omega)]_{1-\theta} = [\mathcal{D}(A^*), H^0(\Omega)]_{1-\theta} = H^{2m\theta}(\Omega)$$

であるから、したがって、定理 2.2 の仮定が成立する。

$1/4m \leq \theta < 1$ に対する補間空間は、P. Grisvard [1] によって特徴付けられた。彼の結果と (II) を合わせることにより、すべての $0 < \theta < 1$ に対して

$$\mathcal{D}(A^\theta) = \{ u \in H^{2m\theta}(\Omega); B_j(x'; D)u|_{\partial\Omega} = 0, m_j < 2m\theta - 1/2 \}$$

$$\text{かつ } B_j(x'; D)u \in H^{-1/2}(\Omega), m_j = 2m\theta - 1/2 \}$$

であることも分かる。 $\mathcal{D}(A^{*\theta})$ についても同様。

例 2.4. $V \in H^{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ の $-$ の関数とする。 $1/4 < \alpha < 3/4$ とすると、 $\forall k > 0$ に対して $\exists C_\alpha(k)$

$$\|Vu\|_{2(\alpha-1)} \leq k\|u\|_{2\alpha} + C_\alpha(k)\|u\|_0, \quad u \in H^{2\alpha}(\mathbb{R}^3)$$

が成立する。したがって、特に $V \in \mathcal{L}(H^1(\mathbb{R}^3), H^{-1}(\mathbb{R}^3))$ となることに注意すると、 $H^0(\mathbb{R}^3)$ の作用素 H

$$\begin{cases} \mathcal{D}(H) = \{ u \in H^1(\mathbb{R}^3); -\Delta u + Vu \in H^0(\mathbb{R}^3) \} \\ Hu = -\Delta u + Vu + \beta u \end{cases}$$

が定義される。この H に関しては

$$\mathcal{D}(H^\theta) = \mathcal{D}(H^{*\theta}) = H^{2\theta}(\mathbb{R}^3), \quad 0 < \theta < 3/4$$

となることが示される。よって、同様に定理 2.2 の仮定が成立する。

3. $A(\cdot)^\theta$ の滑らかさ

$[0, T]$ を閉区間、 $A(\cdot)$ を $[0, T]$ で定義された有界な逆を持つ X の (ω, M) 型作用素に値をとる関数とする。本節では、 $\mathcal{D}(A(t)^\theta)$ がある $0 < \theta < 1$ に対して t について無関係となるための条件、及び $A(t)^\theta$ が t についての関数として滑らかになる

るための条件について述べる。

定理 3.1. (Hölder 連続性) 次の条件が満たされている

とする:

i) 各 t について、 $A(t)^{i\theta}$ ($-\infty < \theta < +\infty$) は X の有界作用素

ii) $A(\cdot)^{-1} \in \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{L}_\Delta(X))$

iii) $0 < \exists \rho_k < 1$, $0 < \exists \alpha_k < 1$ ($k = 1, \dots, \ell$)

$$|(\{A(t)^{-1} - A(s)^{-1}\} f, g)| \leq N |t-s|^\rho \sum_{k=1}^{\ell} \|A(s)^{\alpha_k-1} f\|_X \|A(t)^{*-\alpha_k} g\|_X$$

$$f, g \in X, 0 \leq s, t \leq T.$$

この時、任意の $0 < \theta < \text{Min}\{\alpha_k; 1 \leq k \leq \ell\}$ について $\mathcal{D}(A(t)^\theta) \equiv X_\theta$ は t に無関係な Hilbert 空間 X_θ となる。さらに、 $A(\cdot)^\theta$ は Hölder 連続: $A(\cdot)^\theta \in \mathcal{C}^\rho([0, T]; \mathcal{L}(X_\theta, X))$ となる。

定理 3.2. (微分可能性) 次の条件が満たされていると

する:

i) 各 t について、 $A(t)^{i\theta}$ ($-\infty < \theta < +\infty$) は X の有界作用素

ii) $A(\cdot)^{-1} \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathcal{L}_\Delta(X))$

iii) $0 < \exists \alpha_k < 1$ ($k = 1, \dots, \ell$)

$$|(\frac{d}{dt} A(t)^{-1} f, g)| \leq N \sum_{k=1}^{\ell} \|A(t)^{\alpha_k-1} f\|_X \|A(t)^{*-\alpha_k} g\|_X$$

$$f, g \in X, 0 \leq t \leq T.$$

この時、任意の $0 < \theta < \text{Min} \{ \alpha_k; 1 \leq k \leq l \}$ について $\mathcal{D}(A(t)^\theta) \equiv X_\theta$ は t について無関係となる。さらに、 $A(\cdot)^\theta$ は強連続微分可能: $A(\cdot)^\theta \in \mathcal{E}^1([0, T]; \mathcal{L}_\Delta(X_\theta, X))$ となる。

これらの定理の証明は [10] 参照。

例 3.3. $0 \leq t \leq T$ とし、各 t ごとに例 2.3 と同様に適正楕円型作用素 $A(t, x; D) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, x) D^\alpha$ 及び正規境界条件 $B_{\bar{j}}(t, x'; D) = \sum_{|\beta| \leq m_{\bar{j}}} b_{\bar{j}\beta}(t, x') D^\beta$ ($1 \leq \bar{j} \leq m$) を考える。これらによって定義される $H^0(\Omega)$ の作用素を $A(t)$ とすると、例 2.3 により $0 < \theta < \delta_B$ 、ただし

$$\delta_B = [\text{Min} \{ m_{\bar{j}}; 1 \leq \bar{j} \leq m, m_{\bar{j}} \neq 0 \} + 1/2] / 2m.$$

に対して $\mathcal{D}(A(t)^\theta) \equiv H_\theta$ となるが、さらに

$$a_\alpha \in \mathcal{E}^r([0, T]; \mathcal{D}(\bar{\Omega})) \quad |\alpha| \leq 2m$$

$$b_{\bar{j}\beta} \in \mathcal{E}^r([0, T]; \mathcal{D}(\partial\Omega)) \quad |\beta| \leq m_{\bar{j}}$$

$0 < r \leq 1$ を仮定すれば、任意の $0 < \theta < \delta_B$ に対して

$$0 < r < 1 \text{ の時は } A(\cdot)^\theta \in \mathcal{E}^r([0, T]; \mathcal{L}(H_\theta, H^0(\Omega)))$$

$$r = 1 \text{ の時は } A(\cdot)^\theta \in \mathcal{E}^1([0, T]; \mathcal{L}_\Delta(H_\theta, H^0(\Omega)))$$

を得る。

例 3.4. $V \in \mathcal{E}^r([0, T]; H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$ ($0 < r \leq 1$) とする。各 t ごとに例 2.4 と同様に $H^0(\mathbb{R}^3)$ の作用素 $H(t)$ が定義されて $0 < \theta < 3/4$ に対して $\mathcal{D}(H(t)^\theta) \equiv H^{2\theta}(\mathbb{R}^3)$ となる

が、さらに

$0 < \rho < 1$ の時は $H(\cdot)^0 \in \mathcal{E}^\rho([0, T]; \mathcal{L}(H^{2\rho}(\mathbb{R}^3), H^0(\mathbb{R}^3)))$

$\rho = 1$ の時は $H(\cdot)^0 \in \mathcal{E}^1([0, T]; \mathcal{L}_\Delta(H^{2\rho}(\mathbb{R}^3), H^0(\mathbb{R}^3)))$

となることを得る。

4. 発展方程式

定義域が時間変数と共に変わる作用素を係数作用素に持つ線型発展方程式を考える。ある適当な $0 < \theta < 1$ について $\Delta(A(t)^\theta)$ が一定という条件の下でこれらの方程式を解くことができる。

I. 一階の方程式 X を Hilbert 空間。

$$(E_1) \quad du/dt + A(t)u = f(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

を X の中の 1 階発展方程式とする。

定理 4.1. 次の条件が満たされているとする：

i) 各 $A(t)$ は $(\pi/2, 1)$ 型、有界な逆を持つ

ii) $\Delta(A(t)^{1/2}) \equiv V$ は t に無関係、さらに

$$A(\cdot)^{-1/2} \in \mathcal{E}^1([0, T]; \mathcal{L}_\Delta(X, V)) \cap \mathcal{E}^2([0, T]; \mathcal{L}_\Delta(V, X))$$

iii) $\Delta(A(t)^{*1/2}) \equiv W$ は t に無関係、さらに

$$A(\cdot)^{* -1/2} \in \mathcal{E}^1([0, T]; \mathcal{L}_\Delta(X, W))。$$

この時、 (E_1) に対する発展作用素 $U(t, \Delta) \in \mathcal{L}(X)$ ($0 \leq \Delta \leq t \leq T$) が一意的に存在する。

証明は [10] を参照。

II. 放物型方程式 X を Banach 空間.

$$(P) \quad du/dt + A(t)u = f(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

を X の中の放物型発展方程式とする。この方程式に対しては次の T. Kato [2] による結果がある。

定理 4.2. 次の条件が満たされているとする：

- i) 各 $A(t)$ は (ω, M) 型 $(0 \leq \omega < \pi/2)$ 、有界な逆を持つ
- ii) $1/\theta$ が自然数であるようなある θ に対して、 $\Delta(A(t)^\theta)$ は t に無関係、さらに、ある $k > 1 - \theta$ に対して

$$A(\cdot)^{-\theta} \in \mathcal{C}^k([0, T]; \mathcal{L}(X, X_\theta))$$

ただし、 $\Delta(A(t)^\theta) \equiv X_\theta$ 。

この時、(P) に対する発展作用素 $U(t, \delta) \in \mathcal{L}(X)$ ($0 \leq \delta \leq t \leq T$) が一意的に存在する。

III. 二階の方程式 X を Hilbert 空間.

$$(E_2) \quad d^2u/dt^2 + A(t)u = f(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

を X の中の 2 階発展方程式とする。 $v_0 = \pm A(t)^{1/2} u$, $v_1 = du/dt$ と未知関数を変換すると、次の Hilbert 空間 Y の中の 1 階方程式

$$(E_1) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} + A(t) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} + B(t) \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = F(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T$$

が得られる。ただし、

$$Y = \begin{matrix} X \\ X \\ X \end{matrix}, \quad A(t) = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & A(t)^{1/2} \\ A(t)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} A(t)^{1/2} \, dA(t)^{-1/2}/dt & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

定理 4.3. 次の条件が満たされているとする:

i) 各 $A(t)$ は (ω, M) 型 ($0 \leq \omega < \pi$)、有界な逆を持つ

ii) $\pm i A(t)^{1/2}$, $0 \leq t \leq T$, は X 上安定

iii) $\Delta(A(t)^{1/2}) \equiv V$ は t に無関係、さらに

$$A(\cdot)^{-1/2} \in \mathcal{E}^1([0, T]; \mathcal{L}_\lambda(X, V)) \cap \mathcal{E}^2([0, T]; \mathcal{L}_\delta(V)).$$

この時、 (E_1) に対する (したがって (E_2) に対する) 発展作用素 $\mathcal{U}(t, \delta) \in \mathcal{L}(Y)$ ($0 \leq \delta \leq t \leq T$) が一意的に存在する。

証明は [10] を参照。

5. Cauchy 問題

前節の結果を、以下の偏微分方程式の Cauchy 問題に応用する。

I. 放物型方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t + \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, x) D^\alpha u = f(t, x), \quad (0, T] \times \Omega \\ \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x') D^\beta u = 0, \quad (0, T] \times \partial\Omega, \quad 1 \leq j \leq m \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \Omega \end{array} \right.$$

を考へる。以下の a) ~ d) を仮定すると、定理 4.2 の条件 i), ii) が満たされ、したがって基本解が構成される:

a) $\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(t, x) D^\alpha$ は強楕円型

b) $\{ \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(t, x') D^\beta \}_{1 \leq j \leq m}$ は正規境界条件

(仮定 a) より、 $0 \leq \exists \omega < \pi/2$ $\arg \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(t, x) \xi^\alpha \notin [\omega, 2\pi - \omega]$)

c) すべての $\omega \leq \theta \leq 2\pi - \omega$ に対して [13, 第 3 章, 定理 8.1] で述べられている条件が成立

d) $h > 1 - \theta$ に対し

$$a_\alpha \in \mathcal{C}^h([0, T]; \mathcal{D}(\bar{\Omega})) \quad |\alpha| \leq 2m$$

$$b_{j\beta} \in \mathcal{C}^h([0, T]; \mathcal{D}(\partial\Omega)) \quad |\beta| \leq m_j, \quad 1 \leq j \leq m$$

ここで、 θ は h を $h > \tau_B^{-1}$ とする最小自然数としたときの h の逆数である。

II. 双曲型方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial^2 u / \partial t^2 + \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, x) D_i D_j u + \sum_{i=1}^m a_i(t, x) D_i u + \\ a(t, x) u = f(t, x), \quad [0, T] \times \Omega \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n b_i(t, x') \mathcal{D}_i u + b(t, x') u = 0, \quad [0, T] \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \partial u / \partial t(0, x) = u_1(x), \quad \Omega \end{array} \right.$$

を考える。以下の a) ~ g) を仮定すると、定理 4.3 の条件 i), ii) iii) が満たされ、したがって $L^2(\Omega)$ での基本解が構成できる：

a) $a_{ij}, a_i, a \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{D}(\bar{\Omega}))$, $1 \leq i, j \leq n$

b) $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$

c) $\exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta |\xi|^2$

d) $b_i, b \in \mathcal{C}^2([0, T]; \mathcal{D}(\partial\Omega))$, $1 \leq i \leq n$

e) $\sum_{i=1}^n b_i v_i \neq 0 \quad 0 \leq t \leq T, x' \in \partial\Omega$

(ここで、 $v(x') = (v_1(x'), \dots, v_n(x'))$ は $x' \in \partial\Omega$ における外向き法線ベクトルを表わす。)

f) $\sum_{i=1}^n \operatorname{Re} b_i \gamma_i = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i \gamma_j$, $0 \leq t \leq T, x' \in \partial\Omega, \gamma \perp v(x')$

g) $\sum_{i=1}^n \operatorname{Im} b_i \gamma_i < \sqrt{(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j)(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \gamma_i \gamma_j) - (\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i \gamma_j)^2}$,

$0 \leq t \leq T, x' \in \partial\Omega, \gamma \neq 0, \gamma \perp v(x')$ 。

III. Schrödinger 方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial u / \partial t + i(-\Delta + V(t, x) + \beta) u = f(t, x), \quad [0, T] \times \mathbb{R}^3 \\ u(0, x) = u_0(x), \quad \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

を考える。以下の仮定 a), b) の下には、定理 4.1 の条件 i), ii), iii) が満たされ、したがって $L^2(\mathbb{R}^3)$ での基本解が構成できる：

- a) $V \in \mathcal{E}^2([0, T]; H^{-1/2}(\mathbb{R}^3))$
 b) $\text{Im } V(t, \cdot) \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T.$

参考文献

- [1] P. Grisvard, Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, Arch. Rat. Mech. Anal. 25 (1967), 40 - 63.
- [2] J. Kato, Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces, Nagoya Math. J. 5 (1961), 93 - 125.
- [3] J. Kisynski, Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits, Studia Math. 23 (1964), 285 - 328.
- [4] J. L. Lions, Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan 14 (1962), 233 - 241.
- [5] S. Miyatake, A sharp form of the existence theorem for hyperbolic mixed problems of second order, J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 199 - 223.

- [6] R. Seeley, Norms and domains of the complex powers A_B^z , Amer. J. Math. 93 (1971), 299-309.
- [7] R. Seeley, Interpolation in L^p with boundary conditions, Studia Math. 44 (1972), 47-60.
- [8] A. Yagi, Differentiability of families of the fractional powers of self-adjoint operators associated with sesquilinear forms, Osaka J. Math. 20 (1983), 265-284.
- [9] A. Yagi, Coïncidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs, C.R. Acad. Sc. Paris, 299, Série I, n° 6 (1984), 173-176.
- [10] A. Yagi, Regularity of functions on an interval with values in the space of fractional powers of operators and its applications, to appear.
- [11] J. L. Lions et E. Magenes, "Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications I, II" Dunod, Paris, 1968.
- [12] B. Simon, "Quantum Mechanics for Hamiltonians Defined as Quadratic Forms," Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[13] 田辺宏城, “巻展方程式,” 岩波書店, 1975.