

### 3-Bridge Link Type の判定 (I)

東京工業大学 理学部 根上生也 (Seiya Negami)

n-bridge link を分類するための一般的な方向は、意味のある projection の標準形の class を定め、その中で同型な link を表わすものを互いに変換する方法を開発することです。そのような標準形の 1 つの候補として wave のない projection 全体が考えられます。例えば、各 2-bridge link は wave ない projection を 1 つしか持ちません。それを表示するための 2 つのパラメーターの読み方の違いを考えれば、Schubert [Sch] の 2-bridge link の分類が結論できます。3-bridge link に関しては、NO (根上-沖田) の理論 [NO] によって、wave のない projection 全体を公理的に扱うことができます。4-bridge 以上の link については、いろいろな事情があって wave のないものを標準形に選んでも、あまりよいことはありません。

本稿では、まず NO の理論を紹介し、同型な link を表わす wave のない任意の 2 つの projection を結ぶ操作を示します。その議論をもとにして、任意に与えられた 3-bridge projection からそれが表わしている link の wave のない projection をすべて生成する手続きを述べます。この手続きは、UNIX システムのもとで走る C 言語で書かれたプログラムとして、東京工業大学の河野和義氏により実現されています。それを使って決定した wave のない 3-bridge projection を有限個しか持たない

link の完全リストも記しておきます。

次に、wave のない projection よりも本質的な minimal projection を標準形に採用したときどうなるかを考察します。この minimal projection とはどの bridge を他の場所に移動させても交点数が減らないような 3-bridge projection のことです。つまり、bridge の取り換えに関して交点数が minimal になっているものが minimal projection です。交点数の増減の状態を調べ、wave のない 3-bridge projection 全体の構造を明かにしていき、ある技術的な仮定のもとで、同型な link を表わす任意の 2 つの minimal projection は互いに high-jump move と呼ばれる操作によって変換できることを示します。

なお、議論の詳細な部分や上述のコンピューター・プログラムのことについては、河野和義氏の「3-Bridge Link Type の判定 (I I)」を御覧下さい。ここでは、基礎理論を中心にその概要を解説します。

## 1. n-Bridge projection

3-sphere  $S^3$  内の link  $L$  と有限個の点で横断的に交わる 2-sphere  $S^2(L)$  が  $S^3$  を 2 つの 3-ball  $B^\pm$  に分解し、 $(L \cap B^\pm, B^\pm)$  が n-string trivial tangle になっているとき、この  $S^2(L)$  を  $L$  の n-bridge decomposing sphere と呼び、 $(L, S^2(L))$  を n-bridge 分解 と言います。ここで、 $S^3$  と  $S^2(L)$  の両方に向きを定めて、 $S^2(L)$  の  $B^+$  の側を上、 $B^-$  の側を下と思うことにし、 $B^+$ 、 $B^-$  内の各 string をそれぞれ

この分解の over bridge、under bridge と呼びます。n-bridge 分解を持つ link  $L$  を n-bridge link と呼びますが、そのときは  $S^2(L)$  も同時に考えているものと解釈して下さい。

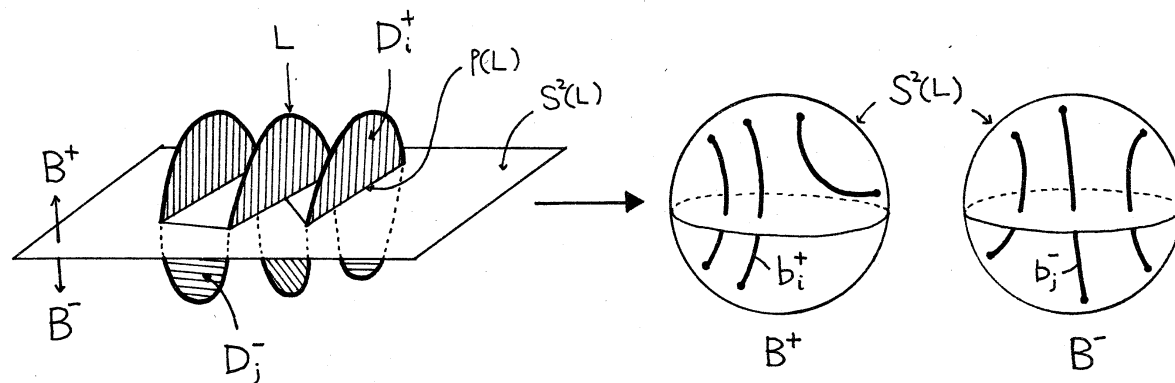


図 1. n-bridge 分解

n-bridge 分解  $(L, S^2(L))$  を紙の上に表現するために、各 bridge を端点を固定して isotopic に動かして  $S^2(L)$  の上に乗せます。すると、over bridge と under bridge が交差した図形が得られます。この図形を n-bridge link  $L$  の  $S^2(L)$  上の (n-bridge) projection と呼び、しばしば  $p(L)$  と書きます。

各 bridge  $b_i^\pm$  の移動の軌跡として、 $b_i^\pm$  と  $S^2(L)$  との間に 2-disk  $D_i^\pm$  が張れます。この  $D_i^\pm$  ( $D_i^+ \cap D_j^+ = \emptyset$ ,  $D_i^- \cap D_j^- = \emptyset$  ( $i \neq j$ )) を bridge-spanning disk と言います。

$$(L, S^2(L); D_1^+, \dots, D_n^+; D_1^-, \dots, D_n^-)$$

を n-bridge form と呼びます。このとき projection  $p(L)$  は

$$p(L) = S^2(L) \cap (D_1^+ \cup \dots \cup D_n^+ \cup D_1^- \cup \dots \cup D_n^-)$$

と表わせます。従って、projection は n-bridge 分解と言うよりも n-bridge form

に対応して存在していると言えるでしょう。

1つの  $n$ -bridge 分解を表わす projection は bridge-spanning disk の取り換えに応じて、たくさん存在します。そこで、それらの関係を明かにするために次のような操作を考えます。

$p(L)$  を  $S^2(L)$  上の  $n$ -bridge projection、 $b_1^+, \dots, b_n^+$  をその  $n$ 本の over bridge とします。また、 $\beta$  を  $S^2(L)$  上の arc で1本の over bridge  $b_i^+$  に対して、

$$\beta \cap (b_1^+ \cup \dots \cup b_n^+) = \emptyset \beta = \emptyset b_i^+$$

となり、 $\beta \cup b_i^+$  が  $b_i^+$  以外の over bridge を2つに分離しているものを考えます。このとき、 $b_i^+$  を  $\beta$  の上に移動させることにより  $p(L)$  から得られる図形を  $p'(L)$  とすると、 $p'(L)$  もやはり  $L$  の projection になっています。この  $p(L)$  から  $p'(L)$  への変形を (over) jump move と呼びます。under bridge に対しても (under) jump move を同様に定義します。

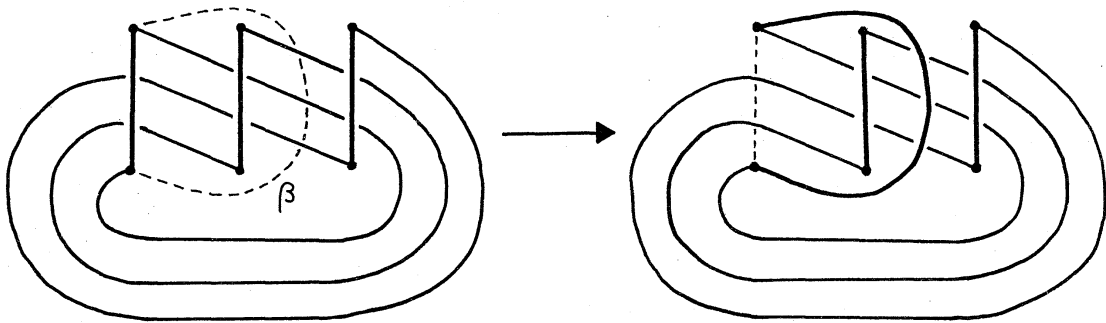


図2. Jump move

定理1. (根上-沖田[N0])  $n$ -bridge link  $L$  の  $S^2(L)$  上の任意の2つの projection は jump move の有限列によって互いに移り合える。

この定理は link  $L$  の異なる  $n$ -bridge decomposing sphere 上の projection とうしについては何も述べていません。が、逆に jump move で移り合えない projection は異なる  $n$ -bridge 分解を表わしていると言えます。実際に、異なる  $n$ -bridge 分解をもつ link が [NO] や [Mon] の中で構成されています。

jump move は projection の交点数を上げることも下げることもあるので、一方を他方にアルゴリズムカルに変形していくことができません。つまり、上の定理は理論的な事実を述べているだけです。そこで、今度は変形の仕方に 1 つの方向性を与えるように次のような操作を定義します。

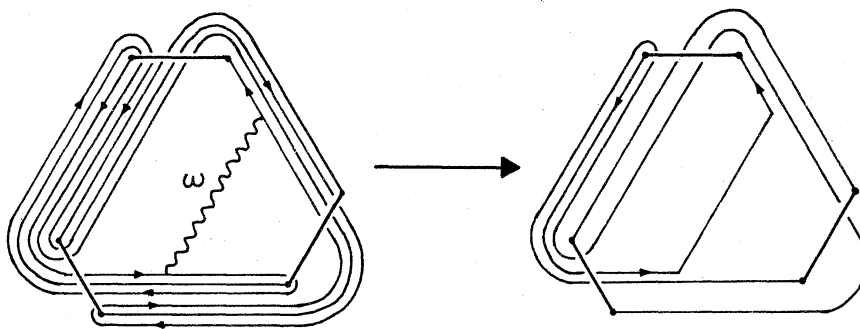


図 3. Wave move

$n$ -bridge projection  $p(L)$  は  $S^2(L)$  をいくつかの領域に分割しています。もし、ある領域  $R$  の境界上に 1 つの over bridge  $b_i^+$  が 2 つの辺として現われていたならば、 $R$  を通ってその 2 辺を結ぶ arc  $\omega$  を考えます。 $\omega$  の端点が切り取る  $b_i^+$  の subarc を  $\omega$  の上に移動して  $p(L)$  から得られる図形を  $p''(L)$  とすると、 $p''(L)$  も  $L$  の projection になります。この  $p(L)$  から  $p''(L)$  への変形を ( $\omega$  に沿った) wave move と言い、 $\omega$  を wave と呼びます。wave  $\omega$  は under bridge と交わっていない

ので、wave move は必ず projection の交点数を減らします。

以後扱う projection はもっぱら wave のないもの (no-wave projection) なので、no-wave projectionの形状について述べておきます。そこで、n-bridge projection  $p(L)$  の領域の中に  $2m$  辺形 ( $m > n$ ) があったとしましょう。その領域の境界には over bridge と under bridge が交互に並んでいます。いま、over bridge は全部で  $n$  本しかないのですから、 $2m$  辺形の境界上には同じ over bridge が異なる2辺として現われています。つまり、その領域を通る wave が存在します。従って、 $p(L)$  が wave を持たないならば、領域は高々  $2n$  辺形になっています。

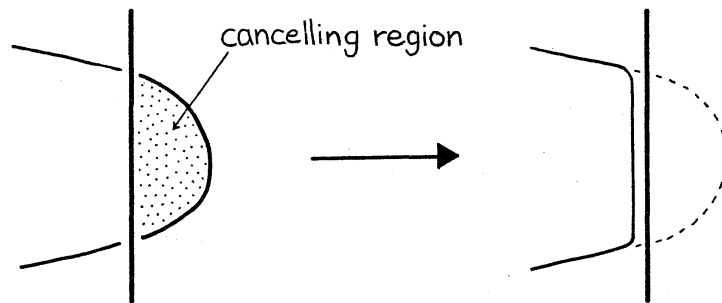


図4. Normalization

今度は、2辺形があったとします。そのような領域は  $p(L)$  自身が2辺形でないかぎり、図4のように bridge を少し動かすだけで除去できるので cancelling region と呼ばれます。また、cancelling region の除去は wave moveでも実現できるので、no-wave projection は cancelling regionを持ちません。cancelling region の除去を normalizationと呼び、cancelling regionのない projection は normalizeされていると言います。が、本稿では単に projection と言っても normalizeされたも

のを意味しています。(注: 定理1の projection も normalizeされたものです。)

上の観測から、1-bridge link は trivial knot しかないことがわかります。なぜなら、どんな no-wave 1-bridge projection  $p(L)$  に対しても、その領域はすべて2辺形ですが、cancelling region が存在しないためには  $p(L)$  自身が2辺形でなければなりません。2辺形  $p(L)$  はまさしく trivial knot を表わしています。一般に、明かに trivial knot を表わしている  $2n$  辺形を自明な n-bridge projectionと言います。Otal[0]により trivial knot の n-bridge 分解は一意なので、定理1と合わせれば trivial knot の任意の n-bridge projection は jump move によって自明なものに変形できます。

2-bridge projection が wave を持たないなら、その領域はすべて4辺形です。そのような projection は over bridge上の交点数  $(p-1)$ と over bridgeの端から出発した under bridge がもう一方の over bridgeの何番目  $(q$  番目)の交点に至るかで決定されます。これが Schubert の標準形  $K(p,q)$  ( $p,q$  : 互いに素)です。over bridge、under bridge のどちらをまっすぐと思って絵を描くか、bridge のどちらの端から交点を数えるかによって、同じ標準形を表わすパラメーターが4組あります。それらの間にはよく知られている次の公式が成立します。

$$p = p'$$

$$q \equiv \pm q' \text{ or } q \cdot q' \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

ここで、jump move の定義を思い出すと jump moveが存在するためには少なくとも over bridge は3本必要です。これから定理1は  $n \leq 2$  のとき成立しないように思われますが、それは誤解! 正しくは、定理1は 1-bridge, 2-bridge link は唯一の

normalized projection を持つことを主張しているのです。従って、2-bridge link の分類は projection の分類と一致し、上の公式がそのまま同型な 2-bridge link 間のパラメーターの変換則になります。

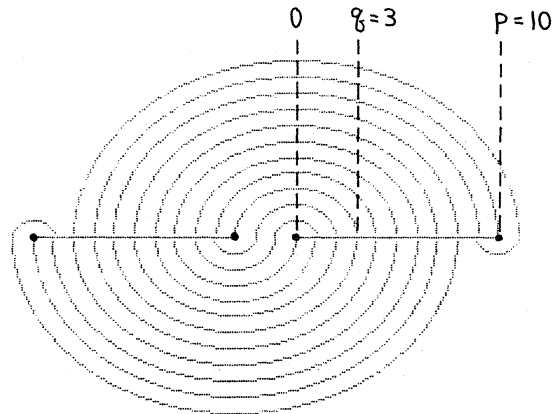


図5. Schubert の標準形

今度は本稿のテーマの 3-bridge link について述べます。link  $L$  の wave のない連結な 3-bridge projection  $p(L)$  の領域は上の議論からいくつかの 4 辺形とちょうど 2 個の 6 辺形であることがわかります。そこで、3-bridge projection を紙面に表現するときの規約として、一方の 6 辺形は  $S^2(L)$  の北極  $N$  を、他方は南極  $S$  を含むものとし、それらの 1 つ ( $N$  or  $S$ ) を平面の無限遠点に対応させて球面  $S^2(L)$  を展開して描きます。このとき、各 over bridge をまっすぐと思ってその近傍を考えると図 6 のようになっています。その近傍の状況を見捨てて円で代表させてしまえば、その 3-bridge projection は図 7 のような三角形状になります。円の各組を結んでいる線分の束は under bridge です。逆に線分の本数を決めて各円に図 6 の部品をはめ込んでやれば任意の連結な no-wave 3-bridge projection が構成できます。しかし、部品のはめ込み方が悪いと無意味なループができることがあります。それは under bridge



だけで完結したループになっているので、3-bridge 分解に対応した図形ではありません。また、3-bridge projection になったとしてもそれが wave を持つこともあります。

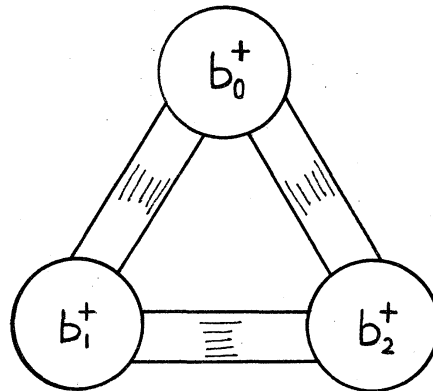
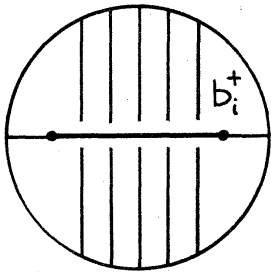


図6. Over bridge の近傍

図7. no-wave 3-bridge projection の概形

このような三角形状の図形に次のようにして6個のパラメーターを定めます。まず、各 over bridgeに反時計回りで  $0, 1, 2 \pmod{3}$  とラベルします。次に無限遠点からどこにも触れないようにして  $i$  番目の over bridge  $b_i^+$  まで行きます。到達した点から進行方向に対して右に数えた  $b_i^+$  上の交点数を  $a_i$ 、左に数えた交点数を  $b_i$  とおきます。このとき、

$$(a_0, b_0)(a_1, b_1)(a_2, b_2)$$

を 3-bridge projection のパラメーターとします。サイクリックに考えると、1つの 3-bridge projection には、北極  $N$  と南極  $S$  のどちらが無限遠点に行ったかに応じて、2組のパラメーターが対応しています。

もちろん、任意のパラメーターに対して 3-bridge projection が存在するわけではありません。が、もし存在するなら、その projection は一意的に決まります。従っ

て、3-bridge projection に関する情報はすべてこの6つのパラメーターの中に封じ込まれていると言っても良いでしょう。例えば、 $(i+1)$ 番目と $(i-1)$ 番目の bridge を結ぶ線分の本数  $x_i$  は

$$x_i = a_{i+1} + b_{i+1} + a_{i-1} + b_{i-1} - a_i - b_i + 1 \geq 1$$

と表わせます。これから、パラメーターが 3-bridge projection を与えるためには少なくとも

$$a_i + b_i \leq a_{i+1} + b_{i+1} + a_{i-1} + b_{i-1} \quad (i \equiv 0, 1, 2 \pmod{3})$$

でなければなりません。が、この三角不等式だけでは無意味なループを持つ図形を排除できません。本当の 3-bridge projection を与えるパラメーターの特徴付けは現在のところ未解決です。

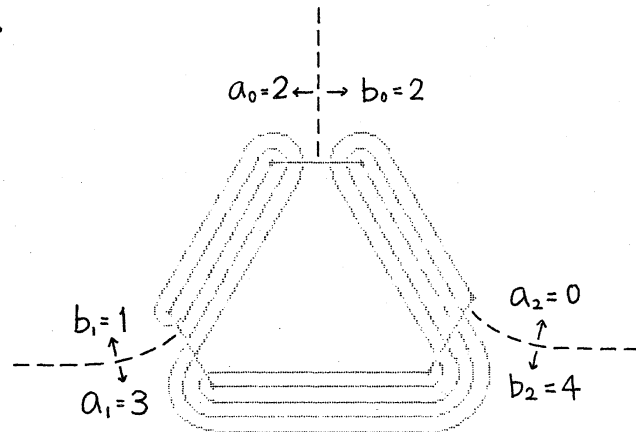


図8. 3-bridge projection のパラメーター

ところで、under bridge をまっすぐだと思ってそれを円で囲って…として上と同様に新しいパラメーターが読み取れます。このとき、under と over の役目を交換して考えた projection をもとの projection の裏返し(reversion)と呼び、そのパラメーターを裏のパラメーターと言います。(ものとしては表の projection とその裏

返しは同じものです。) 表のパラメーターから裏のパラメーターを導き出すのはコンピューター上では容易にできますが、今のところ簡単な変換式は見付かっていません。

このパラメーターの決め方はコンピューター・グラフィックでディスプレイするときには非常に都合が良いのですが、Schubert の 2-bridge link の分類のようにパラメーターの相互関係をきれいに述べようとするときあまり旨くありません。代数的にもっと効果的なパラメーターの与え方があるかもしれませんが、研究を進めれば進めるほど 3-bridge link というもの自体が算術や代数では捉えきれない存在であるような気がしてきます。もしそうなら、コンピューターを駆使して 3-bridge link を攻略しようという試みは十分な価値があるでしょう。

## 2. NO の理論

以後は対象を 3-bridge link に限って話を進めます。従って、単に projection と言っても断わりのないかぎりそれは 3-bridge projection です。この節では wave のない 3-bridge projection を公理的に扱えるようにした NO の理論 [NO] を紹介しておきます。

3-bridge link  $L$  の projection の 1 つの集合を  $\mathcal{Q}$  とします。このとき、 $\mathcal{Q}$  の各要素  $p(L)$  は性質  $\mathcal{Q}$  を持つと言います。もし  $\mathcal{Q}$  に属する projection から 1 回の jump move によって得られる任意の projection が wave move の有限列によって  $\mathcal{Q}$  の要素に変形できるとき、性質  $\mathcal{Q}$  は W-admissible (wave-admissible) であると言

います。例えば、空集合、projection全体の集合、および no-wave projection 全体の集合  $Q_\omega(L)$  は自明な W-admissible な集合です。自明でない例としては、自明な projection だけからなる集合、非連結な projection からなる集合が挙げられます。

(自明な projection の場合、どの bridge を jump させても、もとの bridge 自身が wave の役目をします。非連結のときは、projection を分離する直線を考えれば、projection が連結になるようにどの bridge を jump させてもその直線上に wave が現われます。)

定理 2. (根上-沖田[N0]) 空でない任意の W-admissible な集合  $Q$  は  $Q_\omega(L)$  を含む。

この定理により、3-bridge link の projection で W-admissible な性質を持つものが存在するかどうかは wave move を繰り返し行なうことのより判定できることとなります。例えば、 $Q = \{\text{自明な projection}\}$  とします。もし link  $L$  が trivial knot ならば、 $Q_\omega(L) \subset Q$  だから、任意に与えられた 3-bridge projection  $p(L)$  を wave move により wave のないものに変形すれば、それは自明な projection になっているはずです。これを言い換えれば、次の定理になります。

定理 3. (本間-落合[H0]) trivial knot の自明でない 3-bridge projection は wave を持つ。

従って、knot の triviality は 3-bridge knotに限れば wave moveで判定できることとなります。4-bridge以上では森川[Mor] の例があるので、wave move だけでは判定できません。

この定理はもともと本間-落合-高橋 [HOT]の  $S^3$  の Heegaard 図式に関する結果の応用として証明されたものですが、[NO]の中では逆に定理3から [HOT]の定理を導けることが示されています。一般に、以下の定理はそれぞれの link で分岐した  $S^3$  上の2-fold branched cover の Heegaard 図式に関する定理に変換できますが、本稿ではそれらには触れません。

今度は  $Q = \{\text{非連結な projection}\}$  とおいて、link  $L$  を splittable link ( $S^3$  内の2-sphereで成分を分離できる link ) とすれば、次の定理を得ます。

定理4. (根上-沖田[NO]) splittable link の 3-bridge projectionは、自明な 1-bridge projection と Schubert の標準形との disjoint union を除けば、wave を持つ。

この定理は link が splitするなら projection も splitしてほしいという自然な期待を満足させてくれます。上の自明な 1-bridge projection と Schubert の標準形の disjoint union を splittable 3-bridge link の標準形と決めるのに反対される方はいないでしょう。Schubert の標準形  $K(p,q)$  のどの領域に 1-bridge の方を入れるかに対応して、この標準形には高々  $p$ 個の異なるものが存在します。

次に Hopf linkの標準形を考えます。Hopf link は 2-bridge link  $K(2,1)$  と同値

です。また、交点数2の projection を持つ唯一の link です。だから、図9のような 3-bridge projectionを Hopf linkの 3-bridge linkとしての標準形とするのは自然です。それを簡単に Hopf projectionと呼ぶことにします。

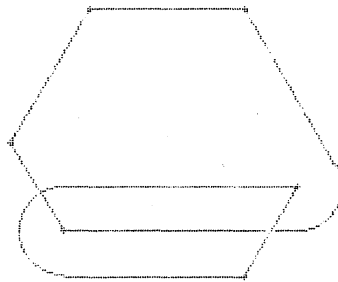


図9. Hopf projection

$Q = \{ \text{Hopf projection} \}$  とおくと、やはり  $Q$  は  $W$ -admissible になり、次の定理が示されます。

定理5. (根上[N1]) Hopf link の 3-bridge projectionは、Hopf projection を除けば、wave を持つ。

私は[N1]の中で単に上の定理を示しただけではなく、任意の 3-bridge projection を wave moveによって 3-bridge projectionの中で交点数が最少のものまで変形できる link は上の定理4、5、6の link、即ち、trivial knot、splittable link 及び Hopf linkに限ることを証明しました。言い方を変えると、これら以外の3-bridge link に対して wave は持たないが交点数が最少でない projection が存在すること

を示したのです。これから、与えられた projection を唯一の標準形に wave move で持っていこうという野望は捨てざるを得なくなりました。つまり、wave move を使おうとする立場からは、標準形は複数個設定しなければならない。(パラメーターは一意でないが、2-bridge link の標準形は1つ。splittable link の標準形もある意味で1つと言える。)

そこで、次の目標は wave を持たない projection は各 link に対して有限個しかないだろうという予想を立てて研究を進めていたところ、1984年の夏に、学習院大学の沖田一雄氏が Whitehead link の無限個の wave のない 3-bridge projection を発見し、その目標も放棄……苦悶の末、もはや人智を越えた計算量が必要と悟り、河野和義氏に助けを借りて、次節の理論をコンピューター上で simulate したのです。

### 3. No-wave projectionの生成

以下、link は trivial でも splittable でもないものとします。

各 projection に対して行なえる jump move は無数にあります。が、ほとんどのものが wave のある projection を作ってしまいます。そこで、それらの中から wave のある projection を作らないものだけ抽出していくことを考えます。

3-bridge projection をより詳細に調べるために、その各 over bridge  $b_i^+$  を次の5つのタイプに分類します。まず、タイプ  $1_0$  は  $b_i^+$  の下を通る under bridge の束が  $b_{i+1}^+$  側と  $b_{i-1}^+$  側に別れます。タイプ  $1^+$  は更に  $b_{i+1}^+$  から  $b_{i-1}^+$  へ外から内へと流れる

束があります。タイプ  $II^+$  では  $b_i^+$  の端点から始まる under bridge が両方とも  $b_{i-1}^+$  に向かっています。タイプ  $I^-$ ,  $II^-$  はそれぞれタイプ  $I^+$ ,  $II^+$  の鏡像です。(タイプ  $II^+$  の定義は[N1]では逆になっています。最近の研究からこのようにした方がより合理的であることが分かりました。)

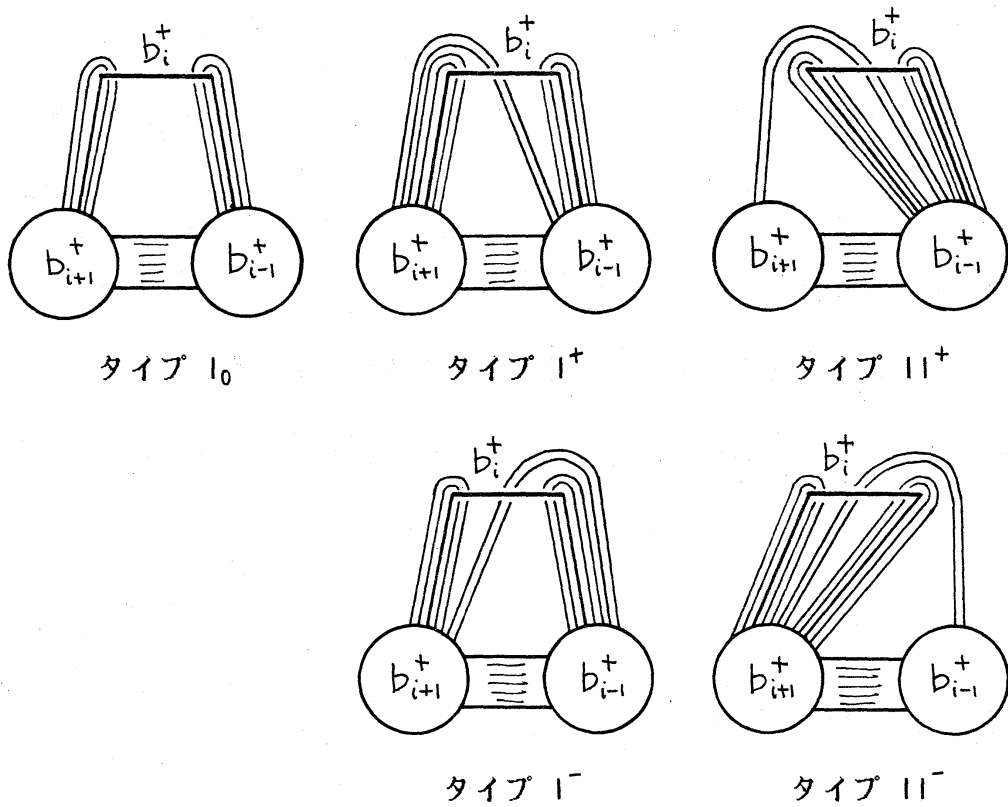


図10. Bridge types

命題6. (Jump-up-wave-back property)  $p(L)$  を link  $L$  の wave のない 3-bridge projection、 $p'(L)$  を  $p(L)$  から (over) bridge  $b_i^+$  の 1 回の jump move で得られる projection とする。もし  $p'(L)$  が wave を持つならば、jump 後の  $b_i^+$  に wave が存在し、その wave move により  $p'(L)$  は  $p(L)$  に戻される。



命題7. (W-admissible jump moveの一意性) 任意の no-wave 3-bridge projection  $p(L)$  に対して、各 (over) bridge  $b_i^+$  の jump move で  $p(L)$  を wave のないものに変形するものは高々1つ存在する。そのような jump move が存在するための必要十分条件は  $b$  がタイプ  $I_0$  でないことである。

上の命題が述べているタイプ  $I_0$  以外の bridge の jump move を W-admissible jump move と呼びます。特に、タイプ  $I^+$ ,  $II^+$  の W-admissible jump move を right jump move、またタイプ  $I^-$ ,  $II^-$  のものを left jump move と呼びます。実際それらは図の上で左右に jump します。

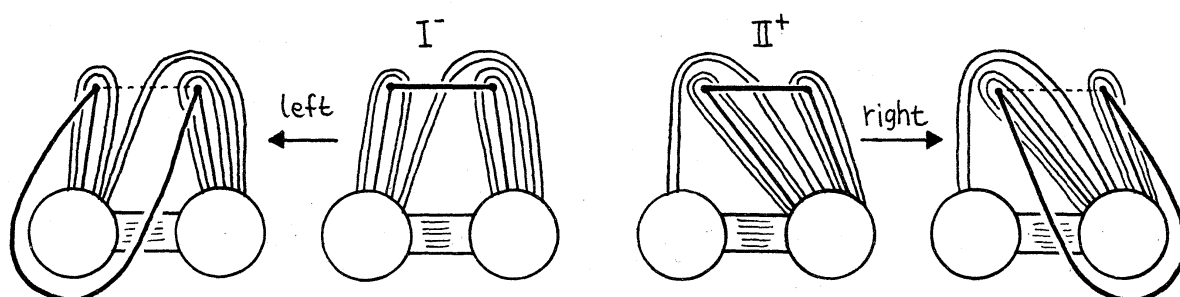


図11. Left jump move と right jump move

$p_0(L)$  を1つの no-wave projection とし、 $Q_0(L)$  を  $p_0(L)$  から W-admissible jump move の有限列によって得られる projection 全体の集合とします。上の定義から  $Q_0(L)$  の各要素は wave のない projection です。つまり、 $Q_0(L) \subset Q_\omega(L)$ 。一方、命題6により  $Q_0(L)$  は W-admissible な集合です。ここで、定理2を使えば  $Q_0(L)$  と  $Q_\omega(L)$  は一致することになります。したがって、次の定理が結論されます。

定理 8. 3-bridge link  $L$  の  $S^2(L)$  上の任意の 2 つの no-wave projection は互いに right jump move 及び left jump move の有限列によって移り合える。

この定理により、与えられた 3-bridge link の no-wave projection 全体は 1 つの no-wave projection から right jump move と left jump move を繰り返していけば、生成できることになりました。簡単な算術式では表わせませんが、 $W$ -admissible jump move は projection のパラメーターの変換として記述できます。河野和義氏のコンピューター・プログラムはそれをもとにして組まれています。

#### 4. Maximal projections

前節で  $Q_w(L)$  の生成方法が分かったわけですが、それはいつ有限集合になるのでしょうか？もし  $Q_w(L)$  が有限集合ならば、その中にはどんな  $W$ -admissible jump move を施しても交点数をそれ以上増やせないものがあるはずです。そのような projection を maximal projectoin と呼ぶことにします。

定理 9. 3-bridge projection が maximal であるための必要十分条件は cancelling bridge を持つことである。

cancelling bridge とは交点を 1 つも含まない bridge のことで、それを無視すれ

ば projection は 2-bridge と見做せます。従って、 $Q_w(L)$  が有限ならば link  $L$  は 2-bridge link になります。さらに、その cancelling bridge を持つ projection から始まる jump move の列を解析していくと、link  $L$  の候補は  $K(2,1)$ ,  $K(3,1)$ ,  $K(5,2)$  に絞られます。(詳細は[N2]を御覧下さい。) これらに対して、河野氏のプログラムを実行してみたところ、運良く有限集合  $Q_w(L)$  が決定され、次の定理の必要十分な証明が与えられました。

定理10. 高々有限個の no-wave projection を持つ 3-bridge link は次の5つのタイプに限る。

- |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| (i) trivial knot      | $\bigcirc$             |
| (ii) splittable link  | $K(p,q) \cup \bigcirc$ |
| (iii) Hopf link       | $K(2,1)$               |
| (iv) trefoil knot     | $K(3,1)$               |
| (v) figure-eight knot | $K(5,2)$               |

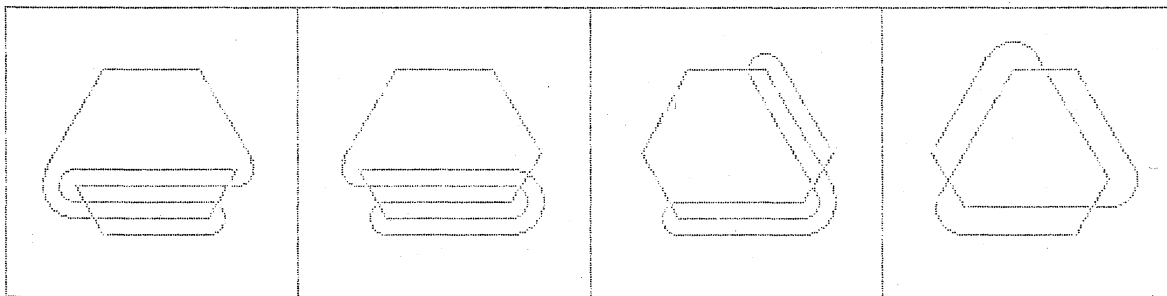


図12. Trefoil knot の no-wave 3-bridge projection

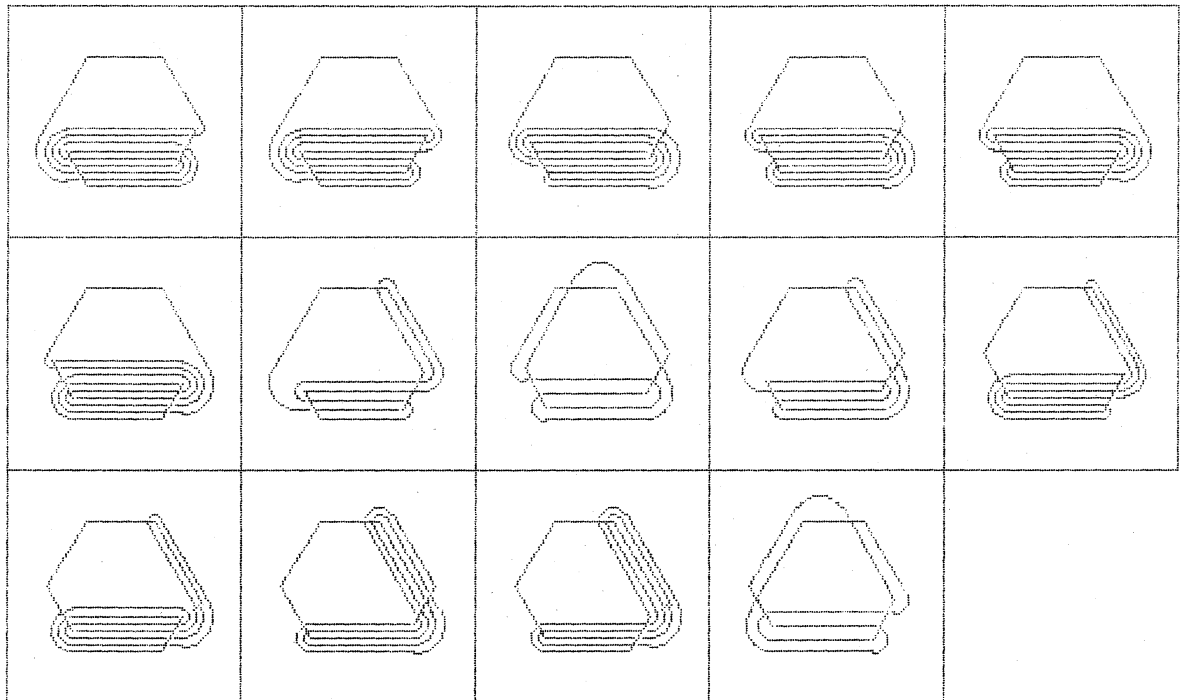


図13. Figure-eight knot の no-wave 3-bridge projection

図12,13 は trefoil knot と figure-eight knot の no-wave projection の全リストです。それらは PC-9801E 上の BASIC で組んだプログラムで出力したものです。

##### 5. Over jump と under jump の可換性

さて、任意の2つの projection は W-admissible jump move の列によって移り合うわけですが、over jump と under jump をまぜこぜで使わなくてはならないので、やや扱いにくいものになっています。と言うのは、over jump move は projection

のパラメーターの変換として簡単に処理できるのに反して、under jump move の場合は（現在のところ）コンピューター上では、実際に projection の絵を見ながらやるのと同じことを行なって裏のパラメーターを読み、パラメーターを変換した後、再びパラメーターを裏返すということをしなければならないからです。そこで、ここでは裏返しの回数を可能な限り減らすことを考えます。つまり、over jump と under jump の順番を整理して、それぞれが固まっているようにします。

$$\begin{array}{ccc}
 p_{00}(L) & \xrightarrow{b_i^+} & p_{01}(L) \\
 b_j^- \downarrow & & \downarrow b_j^- \\
 p_{10}(L) & \xrightarrow{b_i^+} & p_{11}(L)
 \end{array}$$

上の図式は  $p_{00}(L)$  から over bridge  $b_i^+$  の jump move で  $p_{01}(L)$  に移り、更に under bridge  $b_j^-$  の jump move で  $p_{11}(L)$  に変形されたことを意味しています。ただし  $p_{00}(L)$ 、 $p_{01}(L)$ 、 $p_{11}(L)$  は no-wave projection でそれらの間の jump move は W-admissible です。また、 $b_j^-$  の jump move を最初に  $p_{00}(L)$  に施して得られた projection が  $p_{10}(L)$  で、それに  $b_i^+$  の jump move を行なえば  $p_{11}(L)$  が得られます。この意味でこの図式は可換です。しかし、もし  $p_{10}(L)$  に wave があるならば、 $p_{00}(L) \rightarrow p_{10}(L) \rightarrow p_{11}(L)$  の2つの jump move はどちらも W-admissible ではありません。が、このときは  $p_{00}(L)$  と  $p_{11}(L)$  の両方にタイプ  $1_0$  の bridge が存在することがわかります。したがって、

命題11. link  $L$  が『タイプ  $1_0$  の bridge のある projection を持たない』ならば、

over jump move と under jump move の順序交換が可能である。

『…』を満たさない link としては、2-bridge link 及び、2つの 2-bridge link の connected sum が挙げられます。実際、cancelling bridge はタイプ  $1_0$  です。また、明かに connected sum とわかる図14のような projection もタイプ  $1_0$  の bridge を持ちます。『…』を満たす link の幾何学的な特徴付けは今後の課題です。

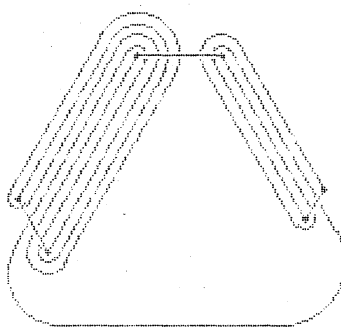


図14. Projection の connected sum

## 6. Minimal projectionの生成

projection  $p(L)$  の交点数が jump moveによって増加（減少）される時、 $p(L)$ は jump up (jump down) すると言います。各 projection は、3つの over bridge と 3つの under bridge に対応して（タイプ  $1_0$  でなければ）、6個の W-admissible jump move を持っています。それらによる交点数の増減を細かに調べていくと次の事実がわかります。

命題12. 任意の no-wave projection は高々1つの over (under) jump move に対して jump downする。

以下、link  $L$  は『…』を満たすものとします。上の命題により、projection を頂点とし、1回の  $W$ -admissible over jump moveで移り合えるものどうしを辺で結んでできるグラフ  $\nabla_+(L)$  は図15の4個の部品 (CとEは同じもの) を組み合わせて構成できます。ただし、交点数の多い projection ほど上に置くことにします。このとき  $\nabla_+(L)$  の各連結成分は tree になり、最下部はBの1頂点のみからなるか、Cから始まりいくつかのDを経てEで終わる水平な path になります。(Dが無限に続いたり、cycle になったりはしません。) under jump だけで移り合える projection 全体に対しても同様にグラフ  $\nabla_-(L)$  を定義します。

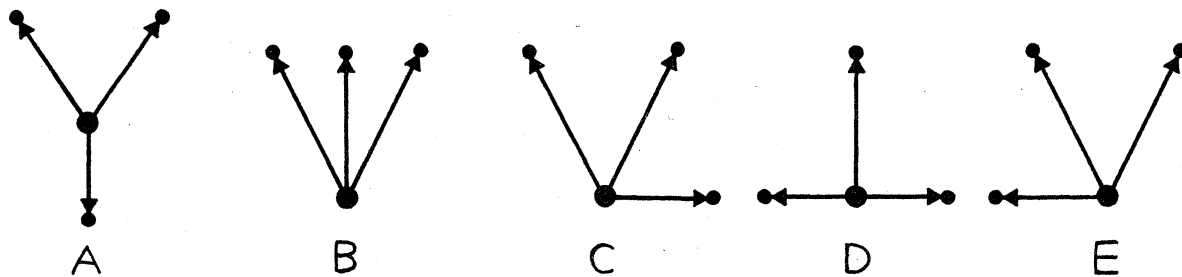


図15.  $\nabla_{\pm}(L)$  の構成要素

$\nabla_{\pm}(L)$  の両方の共通の最下部に位置する projection を minimal projection と呼びます。それはどんな1回の jump move によっても交点数を減少できないものです。特に、最少交点数の projection は minimal です。2つの minimal projection を結ぶ操作として、次の条件を満たす  $W$ -admissible jump move の列  $p_0(L) \rightarrow \dots \rightarrow p_n(L)$

を high-jump move と呼びます。

$$(i) \quad p_0(L) \rightarrow \cdots \rightarrow p_m(L) \rightarrow \cdots \rightarrow p_n(L)$$

⏟
⏟
  
非減少
非増加

(ii)  $p_{-1}(L) \rightarrow p_0(L)$  のような jump up は存在しない。

(iii)  $p_n(L) \rightarrow p_{n+1}(L)$  のような jump down は存在しない。

簡単に言うと、high-jump move は交点数が極大になるところが 1 カ所だけの極大な jump move の有限列です。(right, left jump が反復横跳びなのに対して、今度は高跳びです。)

定理13. 『…』を満たす 3-bridge link の任意の 2 つ minimal projection は 1 回の high-jump move で互いに変換される。

これを示すには、まず 2 つ minimal projection を  $W$ -admissible jump move の列によって結びます。命題11によりその列の前半は over jump だけ、後半は under jump だけと仮定できます。すると、その列は  $\nabla_+(L)$  の最下部から出発し tree を上昇していきどこかの頂点から  $\nabla_-(L)$  に入りその最下部に向かって降下していかざるをえません。つまり、それは high-jump move です。

最後に、projection のパラメーターの決め方はかつて東京工業大学の学生だった竹田昌弘氏によることを一言付け加えておきます。

Kohno - Negami - Okita - Takeda !



## □参考文献

- [HO] T. Homma and M. Ochiai, On relations of Heegaard diagrams and knots,  
Math. Sem. Notes Kobe Univ. 6 (1978), 383-393.
- [HOT] T. Homma, M. Ochiai and M. Takahasi, An algorithm for recognizing  $S^3$   
in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two, Osaka J. Math.  
17 (1980), 625-648.
- [Mon] J.M. Montesinos, Minimal plat representations of prime knots and  
links are not unique, Can. J. Math. 28 (1976), 161-167.
- [Mor] O. Morikawa, A counterexample to a conjecture of Whitehead, Math.  
Sem. Notes Kobe Univ. 8 (1980), 295-298.
- [N1] S. Negami, The minimum crossing of 3-bridge links, Osaka J. Math. 21  
(1984), 477-487.
- [N2] S. Negami, No-wave projections of 3-bridge links, preprint.
- [N0] S. Negami and K. Okita, The splittability and triviality of 3-bridge  
links, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.
- [O] J.P. Otal, Présentations en ponts du noeud trivial, C.R. Acad. Sci.  
Paris Sér. I Math. 294 (1982), 553-556.
- [Sch] H. Schubert, Knoten mit zwei Brücker, Math. Zeitschr. 65 (1956),  
133-170.