数理解析研究所講究録
第 562 巻 1985 年 232-253

一階単独偏微分方程式で記述されるシステムのパラメータの可同定性について

神戸大学工学部　北村新三 (Shinzo Kitamura)
神戸大学工学部　黒江康明 (Yasuaki Kuroe)

1. まえがき

システムを記述する方程式中の未知パラメータを同定する際、基本的な問題の1つはパラメータの可同定性である。この可同定性は通常、"システムの既知の入出力データより、未知パラメータが一意的に決定できるかどうか"で定義され、特に集中定数システムに対してはこれまで多くの研究がある[1]~[3]。対象が分布定数システムの場合に対しても同様の問題が生じるが、それについての検討結果は少ない[4]~[7]。

本稿では分布定数システムとして、とくに一階の単独偏微分方程式で記述されるシステムを対象として、システムのノイズを考慮しない場合の未知パラメータの可同定性、すなわち確定的な意味での可同定性、およびノイズを考慮した場合の確率的な意味での可同定性について検討する。とくに、未知パラメータが空間変数の多項式として表現できる場合につ

いて考え、可同定性の条件が、システムの入力に関する条件と、センサーの個数に関する条件として表現できることを示す。

2. 問題の記述

次の微分方程式で表わされるシステムを対象とする。

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = -b(x)u(t,x),\ t>0\quad x\in(0,1] \qquad \cdots (2.1)$$

$$\text{初期条件}\quad u(0,x) = u_0(x) \qquad (2.2)$$

$$\text{境界条件}\quad u(t,0) = g(t) \qquad (2.3)$$

ここで、t は時間を表わす変数、x は空間変数で、$u(t,x)$ はスカラーの状態変数である。また a, b は空間変数 x に依存するパラメータ、$g(t)$ は入力関数である。

ここでは状態 $u(t,x)$ は点状センサーで測定されるものとしその出力は次式で与えられるものとする。

$$y_k(t) = u(t,x_{p_k}) + \eta_k(t),\quad x_{p_k}\in(0,1],\ k=1,2,\cdots,M \qquad (2.4)$$

ここで、M はセンサーの個数、x_{p_k} はセンサーの位置を表わす。$\eta_k(t)$ は測定ノイズで、正規白色ノイズとする。ここで、$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \cdots, y_M(t)]^t$, $\mathbf{u}(t,x_p) = [u(t,x_{p_1}), u(t,x_{p_2}), \cdots, u(t,x_{p_M})]^t$, $\boldsymbol{\eta}(t) = [\eta_1(t), \eta_2(t), \cdots, \eta_M(t)]$ とおくと、(2.4) 式はさらに次の様に表現できる。

$$y(t) = u(t, x_p) + \eta(t) \tag{2.5}$$

ここで、正規白色雑音 $\eta(t)$ は次式を満足するものとする。

$$E\{\eta(t)\} = 0$$

$$E\{\eta(t)\eta^t(\tau)\} = Q\delta(t-\tau),\ Q \in R^{M\times M},\ Q > 0$$

次に(2.1)~(2.3)式の物理的意味を与える例を2つ示す。

(例 1) 熱交換器

単管の管型熱交換器で管壁が充分薄い場合には次式が成立する[8],[9]。

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha(\varphi - w) \tag{2.6}$$

ここで x は管に沿う距離，w と φ はそれぞれ管内，管外流体温度、v は流速、α は管内と管外流体間の熱伝達率である。復水器のように、φ が一定値をとる場合、$u = w - \varphi$ とすれば、(2.6)式は(2.1)式となる。この場合(2.1)式の $g(t)$ は管内流体の流入温度となる。パラメータ α は流速、管形状、温度、対流形式等に依存するが、状態の微小変動に関しては定数として扱える。

(例 2) 年齢構造人口モデル

年齢構造をとり入れた人口モデルは Von Forester の式として知られており

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = f(x)w \tag{2.7}$$

$$w(0,x) = \xi(x), \quad w(t,0) = \int_\alpha^\beta K(t,x)w(t,x)dx = g(t) \tag{2.8}$$

で表わされる[10]。ここでxは年令、$w(t,x)$は時刻tで年令xの人口、$f(x)$は年令xの死亡率，$\xi(x)$は初期人口分布、$K(t,x)$は時刻tで年令xの人間の出産率，αとβは出産年令の上限と下限である。

以下、(2.1)~(2.4)式で表わされるシステムのパラメータ$a(x)$および$b(x)$の可同定性を考察する。そのため，まず(2.1)~(2.3)式に対する解を与える。ここで次の仮定をおく。

(A1) $g(t)$は測定可能、すなわち既知でかつ一階微分可能な関数とする。

(A2) $a(x)$, $\forall x \in [0,1]$ でかつ$a(x)$, $b(x)$は一階連続微分可能な関数とする。

初期条件を$u_0(x)=0$とすると特性方程式の理論より(2.1)~(2.3)式の解は次の様になる。

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & , \ 0 \le t < \delta(x) \\ e^{-r(x)} g(t-\delta(x)) & , \ t \ge \delta(x) \end{cases} \tag{2.9}$$

ここで、

$$r(x)=\int_0^x \frac{b(y)}{a(y)}dy, \qquad g(x)=\int_0^x \frac{1}{a(y)}dy \qquad (2.10)$$

である。

(2.9)式にも示されるように、(2.1)〜(2.3)式の解は、ある程度時間が経過した段階、すなわち $t>g(x)$ では初期関数には依存せず、入力関数のみに依存する。一般に、有限個の点状センサーでは、初期関数を無限次元空間の状態として測定することはできず、パラメータ同定のための観測データとして初期関数による応答のみを用いても、可同定性は成立しない。したがって本稿では、同定のための観測データとして、入力関数 $g(t)$ による応答を考え、(2.4)式において $t>g(x)$, $^{\forall}x\in(0,1]$ とする。すなわち入力の影響が出力に現われてから測定を開始し、これをパラメータ同定のための観測データとすることにする。また、パラメータ $a(x)$ および $b(x)$ に対し、次の仮定をおく。

(A3) パラメータ $a(x)$, $b(x)$ は次の様な x に関する多項式で表現できる。

$$a(x)=a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1}+\cdots+a_1 x+a_0 \qquad (2.11)$$

$$b(x)=b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0 \qquad (2.12)$$

(注) $a(x)$ および $b(x)$ を x に関する任意の関数であると仮定すると、一般に、(2.4)式で与えられる有限個の点状測定では可

同定性が成立しない。

3. 確定的な意味での可同定性

ここでは、測定ノイズを考慮しない確定的な意味での可同定性について考察する。すなわち(2.5)式の出力方程式において $\eta(t)=0$ とし、

$$y(t) = u(t, x_p) \qquad t \in [t_0, T] \tag{3.1}$$

とする。ここで t_0 は測定開始時刻で $t_0 > \xi(x)$, $^\forall x \in [0, 1]$ とする。今、$\theta \in R^n$ を未知パラメータベクトル，$\Omega \subset R^n$ を θ の属するパラメータ空間，$\theta_0 \in \Omega$ の近傍を $N(\theta_0, \varepsilon) = \{\theta \in \Omega : \|\theta - \theta_0\| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ とすると、次の様な2種類の確定的な意味での可同定性が定義できる。

［定義1］（大域的可同定性）

パラメータ θ が大域的可同定であるとは、任意の $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$ に対してある時刻 $T > t_0$ が存在して

$$y(t, \theta_1) = y(t, \theta_2) \qquad ^\forall t \in [t_0, T]$$

ならば $\theta_1 = \theta_2$ が成立することである。

［定義2］（局所的可同定性）

パラメータ θ が $\theta_0 \in \Omega$ で局所的可同定であるとは、ある正の数 ε と T が存在して、任意の $\theta_1, \theta_2 \in N(\theta_0, \varepsilon)$ に対し

$$y(t, \theta_1) = y(t, \theta_2) \qquad ^\forall t \in [t_0, T]$$

が成立するならば $\theta_1=\theta_2$ が成立することである。また θ がすべての $\theta_0\in\Omega$ で局所的可同定ならば、単に θ は<u>局所的可同定</u>であるという。

定義1および定義2において $y(t,\theta)$ はパラメータを θ とした場合の(3.1)式の出力 $y(t)$ の値を示す。定義より明らかに θ が大域的可同定ならば局所的可同定である。以上の定義に基づいてパラメータ $a(x)$ および $b(x)$ の大域的および局所的可同定性について考察しよう。まず(2.1)～(2.3)式で表わされるシステムの解に対する次の補題を導く。

［補題1］　(2.11), (2.12)式で表わされる任意の2組のパラメータ $\{a_1(x), b_1(x)\}$ および $\{a_2(x), b_2(x)\}$ に対する解をそれぞれ次の様に添字を付けて表わす。

$$u_1(t,x)=e^{-r_1(x)}g(t-\xi_1(x))$$

$$u_2(t,x)=e^{-r_2(x)}g(t-\xi_2(x))$$

この時、$k=1,2,\cdots,M$ に対して

$$r_1(x_{p_k})=r_2(x_{p_k}) \quad かつ \quad \xi_1(x_{p_k})=\xi_2(x_{p_k}) \tag{3.2}$$

ならば

$$a_1(x)=a_2(x) \quad かつ \quad b_1(x)=b_2(x)$$

が成立するための必要十分条件は $M=\max\{l+1, m+1\}$ なることである。　//

(証明) 十分性：今、$l\geq M$ の場合を考え、(3.2)式が成立し

ているものとする。この時，Rolleの定理より相異なるl個の点，$k=1,2,\cdots,l$に対して$x_{p_k}<z_k<x_{p_{k+1}}$なるz_kが存在して次式が成立する。

$$r_1'(z_k)-r_2'(z_k)=0 \qquad (' \text{は微分を示す}) \tag{3.3}$$

$$g_1'(z_k)-g_2'(z_k)=0 \tag{3.4}$$

(3.4)式と(2.10)式を用いると次式が得られる。

$$a_1(z_k)=a_2(z_k) \quad (k=1,2,\cdots,l) \tag{3.5}$$

また、(2.10)式より$g_1(0)=g_2(0)$であることに注意すると$0<z_0<x_{p_1}$なるz_0が存在して

$$a_1(z_0)=a_2(z_0) \tag{3.6}$$

が成立することがわかる。しかるに$a(x)$はl次の多項式なので(3.5)(3.6)式より$a_1(x)=a_2(x)$であることが導ける。同様にして(3.3)式より$b_1(x)=b_2(x)$を導くことができる。

必要性：$M<\max\{l+1,m+1\}$と仮定し、相異なるM個の点で(3.2)式が成立しているものとする。十分性と同様の議論により，$k=1,2,\cdots,M$に対し

$$a_1(z_k)=a_2(z_k),\ b_1(z_k)=b_2(z_k) \tag{3.7}$$

が成立する。$a(x)$，$b(x)$はそれぞれl次，m次の多項式なので(3.7)式を満足し、$a_1(x)\neq a_2(x)$あるいは$b_1(x)\neq b_2(x)$なるパラメータが必ず存在する。したがって$M=\max\{l+1,m+1\}$である。(証明終)

この補題は，パラメータ$(a_0,a_1,\cdots,a_l,b_0,b_1,\cdots,b_m)$から，

$(r_1(x_{p_1}), r(x_{p_2}), \cdots, r(x_{p_M}), g(x_{p_1}), g(x_{p_2}), \cdots, g(x_{p_M}))$ への写像が $M=\max\{l+1, m+1\}$ ならば、1対1であることを意味しており、しかもその写像は連続である。したがって出力データより、$M=\max\{l+1, m+1\}$ 個の相異なる点での $r(x)$ および $g(x)$ の値 $(r(x_{p_1}), r(x_{p_2}), \cdots, r(x_{p_M}), g(x_1), g(x_2), \cdots, g(x_M))$ を決定できれば、これより一意的にパラメータ $a(x)$ および $b(x)$ が決定できることになる。

以上の議論のもとでまずパラメータ $a(x)$ および $b(x)$ の大域的可同定性の条件を導く。そのため次の関数族 $\mathcal{F}_1[0,T]$ を導入する。

$$\mathcal{F}_1[0,T] \triangleq \{g(\cdot) \in C^1 : g(t) - \alpha g(t+\beta) = 0 \quad \forall t \in [0,T],\ \alpha, \beta \text{ は } \alpha \geq 0,\ \beta \neq 0 \text{ なる実数}\}$$

この時、次の補題が成立する。

［補題２］　(2.1)〜(2.3)式で表わされるシステムにおいて、$g(\cdot) \notin \mathcal{F}_1[0,T]$ とする。また２組のパラメータ $\{a_1(x), b_1(x)\}$ および $\{a_2(x), b_2(x)\}$ の解 $u_1(t,x)$, $u_2(t,x)$ に対し出力偏差を次の様に定義する。

$$e_k(t) \triangleq u_1(t, x_{p_k}) - u_2(t, x_{p_k}) \quad (k=1,2,\cdots M) \tag{3.8}$$

このとき、

$$e_k(t) = 0 \qquad \forall t \in [t_0, T] \tag{3.9}$$

がすべての $k=1,2,\cdots,M$ に対して成立するための必要十分条

件は、

$$r_1(x_{p_k}) = r_2(x_{p_k}) \quad かつ \quad g_1(x_{p_k}) = g_2(x_{p_k}) \tag{3.10}$$

がすべての k に対して成立することである。 』

証明は付録に示す。

補題1および補題2より直ちに次の定理が得られる。

［定理1］パラメータ $a(x)$ および $b(x)$ が大域的可同定であるための必要十分条件は測定点の個数 M が少なくとも $M=\max\{l+1, m+1\}$ でかつ $g(\cdot) \in \mathcal{F}_1[0,T]$ なる T が存在することである。』

この定理は、大域的可同定性の条件を、多項式で表わされる未知パラメータの次数と測定のためのセンサーの個数との関係、および同定のための入力に関する条件として与えたもので、同定の際、容易にチェックできる。パラメータ $a(x), b(x)$ が定数の場合には次の様になる。

系1. $a(x), b(x)$ は定数、すなわち $a(x)=a$, $b(x)=b$ とする。この時、a および b が大域的可同定であるための必要十分条件は、測定点の個数が $M=1$ でかつ $g(\cdot) \in \mathcal{F}_1[0,T]$ なる T が存在することである。

次に局所的可同定性について考察する。そのため局所的可同定性の条件を一般的に与える補題を導く。まず、次の $n \times n$ の行列を定義する。

$$G[\theta:[t_0,T]] \triangleq \int_{t_0}^{T}\left(\frac{\partial y(t,\theta)}{\partial\theta^t}\right)^t\left(\frac{\partial y(t,\theta)}{\partial\theta^t}\right)dt \qquad (3.11)$$

これは、システム出力のパラメータに関する感度をあらわすものと考えられ、感度行列と呼ぶことにする。

［補題３］ $y(t,\theta)$ は θ に関して連続微分可能とする。この時、$\theta=\theta_0\in\Omega$ における感度行列 $G[\theta_0:[t_0,T]]$ が正定となる T が存在するならば、パラメータ θ は $\theta_0\in\Omega$ で局所的可同定である。また、すべての $\theta\in N(\theta_0,\varepsilon)$ に対し $G[\theta:[t_0,T]]$ の rank が一定である ε が存在すると仮定する。この時、$G[\theta_0:[t_0,T]]$ が正定となる T が存在しないならば、θ は $\theta_0\in\Omega$ で局所的可同定でない。』

（証明） いま、パラメータ θ が $\theta_0\in\Omega$ で局所的可同定でないと仮定すると、任意の ε に対し、

$$y_k(t,\theta_1)-y_k(t,\theta_2)=0\ ,\ k=1,2,\cdots,M\ ,\ \forall t\in[t_0,T] \qquad (3.12)$$

を満足する $\theta_1,\theta_2\in N(\theta_0,\varepsilon)$, $\theta\neq\theta_2$ が存在する。また、平均値の定理より各 $k=1,2,\cdots,M$ に対し

$$y_k(t,\theta_1)-y_k(t,\theta_2)=\frac{\partial y_k(t,\bar{\theta}^k)}{\partial\theta^t}(\theta_1-\theta_2)$$

を満足する $\bar{\theta}^k$ が存在することに注意すると、

$$\frac{\partial y_k(t,\bar{\theta}^k)}{\partial\theta^t}(\theta_1-\theta_2)=0 \quad (k=1,2,\cdots,M),\ t\in[t_0,T] \qquad (3.13)$$

が成立することがわかる。これよりさらに次式が成立する。

$$\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\partial y_1(t,\bar{\theta}^1)}{\partial\theta},\frac{\partial y_2(t,\bar{\theta}^2)}{\partial\theta},\cdots,\frac{\partial y_M(t,\bar{\theta}^M)}{\partial\theta}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1(t,\bar{\theta}^1)}{\partial\theta^t}\\ \frac{\partial y_2(t,\bar{\theta}^2)}{\partial\theta^t}\\ \vdots\\ \frac{\partial y_M(t,\bar{\theta}^M)}{\partial\theta^t}\end{bmatrix}dt\cdot(\theta_1-\theta_2)=0 \tag{3.14}$$

ここで、仮定より $\theta_1\neq\theta_2$ なので

$$\det\left\{\int_{t_0}^{T}\left[\frac{\partial y_1(t,\bar{\theta}^1)}{\partial\theta},\frac{\partial y_2(t,\bar{\theta}^2)}{\partial\theta},\cdots,\frac{\partial y_M(t,\bar{\theta}^M)}{\partial\theta}\right]\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1(t,\bar{\theta}^1)}{\partial\theta_1}\\ \frac{\partial y_2(t,\bar{\theta}^2)}{\partial\theta_2}\\ \vdots\\ \frac{\partial y_M(t,\bar{\theta}^M)}{\partial\theta_M}\end{bmatrix}\right\}=0 \tag{3.15}$$

が成立する。一方，(3.12)式が成立する ε は任意にとれるので各 $k=1,2,\cdots,M$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}\bar{\theta}_n^k=\theta_0 \tag{3.16}$$

なるパラメータ列 $\{\bar{\theta}_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。したがって $\det\{G[\theta_0;[t_0,T]]\}=0$ か言え、$G[\theta_0;[t_0,T]]$ は正定でない。故に $G[\theta_0;[t_0,T]]$ が正定ならば θ は $\theta_0\in\Omega$ で局所的可同定である。

逆に $G[\theta;[t_0,T]]$ の rank が $\theta\in N(\theta_0,\varepsilon)$ で一定で、$\theta=\theta_0$ で正定でないならば、(3.12)式を満足する $\theta_1,\theta_2\in N(\theta_0,\varepsilon)$ が存在することを容易に示すことができる。詳細は省略。　(証明終)

補題３を用いてパラメータ $a(x)$, $b(x)$ が局所的可同定であるための条件を導く。そのため次の関数族 $\mathfrak{F}_2[0,T]$ を導入する。

$$\mathfrak{F}_2[0,T]\triangleq\{g(\cdot)\in C^1 : g(t)=\alpha e^{\beta t},\ t\in[0,T],\ \alpha,\beta \text{は任意の実数}\}$$

定義より明らかに $\mathcal{F}_1[0,T] \supset \mathcal{F}_2[0,T]$ である。

〔定理2〕 パラメータ $a(x)$ および $b(x)$ が局所的可同定であるための必要十分条件は、測定点の個数 M が少なくとも $M=\max\{l+1, m+1\}$ でかつ $g(\cdot) \notin \mathcal{F}_2[0,T]$ なる時刻 T が存在することである。 』

（証明） $M=\max\{l+1, m+1\}$ として (3.11)式で与えられる感度行列を計算する。補題より明らかに、$r(x_{p_k})$, $g(x_{p_k})$ $(k=1,2,\cdots M)$ を未知パラメータと考え、これらに対する感度行列を計算すれば良い。

$$
\begin{aligned}
&G[(r(x_{p_k}), g(x_{p_k}))(k=1,2,\cdots M):[t_0,T]] \\
&= \int_{t_0}^{T}
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u(t,x_{p_1})}{\partial r(x_{p_1})}, & \frac{\partial u(t,x_{p_2})}{\partial r(x_{p_1})}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_M})}{\partial r(x_{p_1})} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial u(t,x_{p_1})}{\partial r(x_{p_M})}, & \frac{\partial u(t,x_{p_2})}{\partial r(x_{p_M})}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_M})}{\partial r(x_{p_M})} \\
\frac{\partial u(t,x_{p_1})}{\partial g(x_{p_1})}, & \frac{\partial u(t,x_{p_2})}{\partial g(x_{p_1})}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_M})}{\partial g(x_{p_1})} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial u(t,x_{p_1})}{\partial g(x_{p_M})}, & \frac{\partial u(t,x_{p_2})}{\partial g(x_{p_M})}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_M})}{\partial g(x_{p_M})}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{\partial u(t,x_{p_1})}{\partial r(x_{p_1})}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_1})}{\partial r(x_{p_M})}, & \frac{\partial u(t,x_{p_1})}{\partial g(x_{p_1})}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_1})}{\partial g(x_{p_M})} \\
\frac{\partial u(t,x_{p_2})}{\partial r(x_{p_1})}, & \cdots\cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_2})}{\partial r(x_{p_M})}, & \frac{\partial u(t,x_{p_2})}{\partial g(x_{p_1})}, & \cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_2})}{\partial g(x_{p_M})} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \\
\frac{\partial u(t,x_{p_M})}{\partial r(x_{p_1})}, & \cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_M})}{\partial r(x_{p_M})}, & \frac{\partial u(t,x_{p_M})}{\partial g(x_{p_1})}, & \cdots, & \frac{\partial u(t,x_{p_M})}{\partial g(x_{p_M})}
\end{bmatrix} dt \\
&= \left[\begin{array}{cccc|cccc}
\alpha_1(T) & & & 0 & \gamma_1(T) & & & 0 \\
 & \alpha_2(T) & & & & \gamma_2(T) & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & \\
0 & & & \alpha_M(T) & 0 & & & \gamma_M(T) \\
\hline
\gamma_1(T) & & & 0 & \beta_1(T) & & & 0 \\
 & \gamma_2(T) & & & & \beta_2(T) & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & \\
0 & & & \gamma_M(T) & 0 & & & \beta_M(T)
\end{array}\right]
\end{aligned}
\qquad (3.17)
$$

ここで $\alpha_k(T)$, $\beta_k(T)$, $\gamma_k(T)$ はそれぞれ次の様に定義される。

$$\alpha_k(T) = e^{-2r(x_{p_k})}\int_{t_0}^{T}\{g(t-\delta(x_{p_k}))\}^2\,dt$$

$$\beta_k(T) = e^{-2r(x_{p_k})}\int_{t_0}^{T}\{g'(t-\delta(x_{p_k}))\}^2\,dt$$

$$\gamma_k(T) = e^{-2r(x_{p_k})}\int_{t_0}^{T}g(t-\delta(x_{p_k}))\,g'(t-\delta(x_{p_k}))\,dt$$

この感度行列が正定であるための必要十分条件は、すべての $k=1,2,\cdots,M$ について次の 2×2 の行列が正定であることである。

$$G_k(T) = \begin{bmatrix} \alpha_k(T) & \gamma_k(T) \\ \gamma_k(T) & \beta_k(T) \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Schwarz の不等式より

$$\left\{\int_{t_0-\delta(x_{p_k})}^{T-\delta(x_{p_k})} g(\tau)\,g'(\tau)\,d\tau\right\}^2 \le \int_{t_0-\delta(x_{p_k})}^{T-\delta(x_{p_k})}\{g(\tau)\}^2 d\tau \cdot \int_{t_0-\delta(x_{p_k})}^{T-\delta(x_{p_k})}\{g'(\tau)\}^2 d\tau \tag{3.19}$$

が成立するので、$G_k(T)\geq 0$ が成立する。等号が成立するのは C を任意の定数として

$$g'(\tau) = C\,g(\tau) \tag{3.20}$$

が成立するときであり、その時に限る。ところが仮定より、$g(\cdot)\notin \mathcal{F}_2[0,T]$ なので (3.20) 式は成立しない。したがって (3.17) 式で与えられる感度行列は正定で、補題3より $a(x)$ および $b(x)$ が局所的可同定であることが言える。

逆に、$M<\max\{l+1,\, m+1\}$ ならば明らかに可同定でない。また $g(\cdot)\in \mathcal{F}_2[0,T]$ とすると (3.17) 式の感度行列の rank は常に

零となり局所的可同定でない。　(証明終)

定理より、局所的可同定性の条件は、大域的可同定性の条件より、同定するための入力に対する制限がゆるくなっていることがわかる。$a(x)$および$b(x)$が定数の場合は次の系が得られる。

系 2　$a(x), b(x)$は定数、すなわち$a(x)=a$, $b(x)=b$とする。この時、aおよびbが局所的可同定であるための必要十分条件は、測定点の個数が$M=1$でかつ$g(\cdot)\notin \mathcal{F}_2[0,T]$なる$T$が存在することである。

4、確率的な意味での可同定性

ここでは、測定ノイズが存在する場合の確率的な意味での可同定性について考察する。確率的な意味での可同定性は通常、測定データ列に基づくパラメータの推定値の列が真値に収束するかどうかで定義され、概収束、確率収束、二乗平均収束などその収束性によって種々の定義が考えられる。ここでは特に確率収束の意味での可同定性について議論する。そこで、同定のための測定データ列として時点t_i $(i=1,2,\cdots N)$での出力の値を考え、出力方程式(2.5)式を次の様に書きかえる。

$$y(t_i) = u(t_i, x_p) + \eta_i/\sqrt{\Delta_i}\quad , \ (i=1,2,\cdots,N \quad t_N=T) \qquad (4.1)$$

ただし　$\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ で、η_i は次式を満足する。

$$E\{\eta_i\} = \mathbb{0} \tag{4.2}$$

$$E\{\eta_i \eta_j^t\} = Q\delta_{ij} \quad , \quad Q \in R^{M\times M} \quad , \quad Q > O \tag{4.3}$$

また、Qは次の様な対角行列とする。

$$Q = \mathrm{diag.}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots\cdots, \sigma_M^2\} \tag{4.4}$$

さらに、前節と同様　$t_1 > g(x), \forall x \in [0,1]$ を満足するものとする。

ここで次の記号を定義する。

$Y_N \triangleq \{y(t_1), y(t_2), \cdots, y(t_N)\}$ ：測定データの集積

$\hat{\theta}_N$ ：データ Y_N に基づくパラメータ θ の推定値

$p(Y_N|\theta)$ ：　Y_N の条件付確率密度関数

可同定性を次の様に定義する。

［定義３］　パラメータ θ が、$\theta_0 \in \Omega$ で確率収束の意味で可同定であるとは、ある時刻列 $\{t_1, t_2, \cdots\cdots, t_N\}$ と、これに対する測定データ Y_N に基づく θ_0 の推定値 $\hat{\theta}_N$ が存在して、$N \to \infty$ の時 $\hat{\theta}_N$ が θ_0 に確率収束することである。また θ がすべての $\theta_0 \in \Omega$ で確率収束の意味で可同定ならば、単に θ は確率収束の意味で可同定であると言う。

ここで、未知パラメータ θ に関する測定データ Y_N の情報行列 $R_N(\theta)$ を

$$R_N(\theta) \triangleq E\{(\nabla_\theta(\ln p(Y_N|\theta)))(\nabla_\theta(\ln p(Y_N|\theta)))^t\} \tag{4.5}$$

$$\nabla_\theta = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}, \frac{\partial}{\partial\theta_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial\theta_n}\right)^t$$

と定義すると、確率収束の意味での可同定性に対し、次の補題が得られる[11],[12]。

［補題４］[11][12] $p(Y_N|\theta)$はθに関して連続微分可能とする。この時、$\theta=\theta_0\in\Omega$での情報行列$R_N(\theta_0)$が正定となるNが存在するならば、θは$\theta_0\in\Omega$で確率収束の意味で可同定である。またさらに、すべての$\theta\in N(\theta_0,\varepsilon)$で$R_N(\theta)$のrankが一定であるεが存在すると仮定する。この時、$R_N(\theta_0)$が正定となるNが存在しないならば、θは$\theta_0\in\Omega$で確率収束の意味で可同定でない。　』

以下、この補題を用いてパラメータ$a(x)$および$b(x)$の可同定性の条件を導こう。そのためにまず(4.1)式で与えられる測定データに対する情報行列を計算する。

確率密度関数のChain ruleより

$$\begin{aligned} p(Y_N|\theta) &= p(y(t_1), y(t_2), \cdots, y(t_N)|\theta) \\ &= p(y(t_N)|y(t_1), y(t_2), \cdots, y(t_{N-1}), \theta) \times p(y(t_{N-1})|y(t_1), \cdots, y(t_{N-2}), \theta) \\ &\quad \times \cdots\cdots \times p(y(t_1)|\theta) \end{aligned}$$

が成立する。(4.2)(4.3)式より$y(t_i)$は

$$E\{y(t_i)\} = u(t_i, x_p) \tag{4.6}$$

$$E\{(y(t_i)-u(t_i,x_p))(y(t_j)-u(t_j,x_p))^t\} = Q/\sqrt{\Delta_i}\sqrt{\Delta_j}\cdot\delta_{ij} \tag{4.7}$$

を満足するので$p(y(t_i)|y(t_1),\cdots y(t_{i-1}),\theta)$は、次の様に表現できる。

$$p(y(t_i)\mid y(t_1),\cdots,y(t_{i-1}),\theta)$$
$$=(2\pi)^{-\frac{M}{2}}(\sqrt{\Delta_i})^M(\det Q)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Delta_i(y(t_i)-u(t_i,x_p))^tQ^{-1}(y(t_i)-u(t_i,x_p))\right\}$$

ゆえに次式が得られる。

$$p(Y_N\mid\theta)$$
$$=(2\pi)^{-\frac{NM}{2}}\prod_{i=1}^{N}\left\{(\sqrt{\Delta_i})^M(\det Q)^{\frac{1}{2}}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i}^{N}\Delta_i(y(t_i)-u(t_i,x_p))^tQ^{-1}(y(t_i)-u(t_i,x_p))\right\} \tag{4.8}$$

［定理3］ パラメータ $a(x)$ および $b(x)$ が確率収束の意味で可同定であるための必要十分条件は、測定点の個数 M が少なくとも $M=\max\{l+1,m+1\}$ でかつ $g(\cdot)\in\mathcal{F}_2[0,T]$ であることである。」

（証明） $M=\max\{l+1,m+1\}$ とし、定理2と同様 $(r(x_{p_k}),g(x_{p_k}))$ $(k=1,2,\cdots,M)$ と考え、これに対する情報行列を計算する。

$$R_N((r(x_{p_k}),g(x_{p_k})),k=1,2,\cdots,M)$$
$$=E\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial r(x_{p_1})}\\ \vdots\\ \frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial r(x_{p_M})}\\ \frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial g(x_{p_1})}\\ \vdots\\ \frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial g(x_{p_M})}\end{bmatrix}\left[\frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial r(x_{p_1})},\cdots,\frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial r(x_{p_M})},\frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial g(x_{p_1})},\cdots,\frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial g(x_{p_M})}\right]\right\}$$

(4.8)式より、たとえば $E\left\{\left(\frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial r(x_{p_1})}\right)^2\right\}$ は、次の様に計算できる。

$$E\left\{\left(\frac{\partial\ln p(Y_N\mid\theta)}{\partial r(x_{p_1})}\right)^2\right\}$$
$$=E\left\{\sum_{i=1}^{N}\Delta_i\left(\frac{\partial u(t_i,x_{p_1})}{\partial r(x_{p_1})},0,\cdots,0\right)Q^{-1}(y(t_i)-u(t_i,x_p))\cdot\sum_{j=1}^{N}\Delta_j(y(t_j)-u(t_j,x_p))Q^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial u(t_j,x_p)}{\partial r(x_{p_1})}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i}^{N}\Delta_i\left(\frac{\partial u(t_i, x_{p_1})}{\partial r(x_{p_1})}\right)^2 \quad (\because (4.7)式)$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i e^{-2r(x_{p_1})} g^2(t_i - \delta(x_{p_1})) \tag{4.9}$$

他の要素も同様に計算することができ、結局、情報行列は次の様になる。

$$R_N((r(x_{p_k}), \delta(x_{p_k})), k=1,2,\cdots,M)$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{1N} & & 0 & \gamma_{1N} & & 0 \\ & \alpha_{2N} & & & \gamma_{2N} & \\ 0 & & \ddots\ \alpha_{MN} & 0 & & \ddots\ \gamma_{MN} \\ \hline \gamma_{1N} & & 0 & \beta_{1N} & & 0 \\ & \gamma_{2N} & & & \beta_{2N} & \\ 0 & & \ddots\ \gamma_{MN} & 0 & & \ddots\ \beta_{MN} \end{array}\right] \tag{4.10}$$

ただし

$$\alpha_{kN} = \frac{1}{\sigma_k^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i e^{-2r(x_{p_k})}\{g(t_i - \delta(x_{p_k}))\}^2$$

$$\beta_{kN} = \frac{1}{\sigma_k^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i e^{-2r(x_{p_k})}\{g'(t_i - \delta(x_{p_k}))\}^2$$

$$\gamma_{kN} = \frac{1}{\sigma_k^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta_i e^{-2r(x_{p_k})} g(t_i - \delta(x_{p_k}))g'(t_i - \delta(x_{p_k}))$$

この情報行列が正定であるための必要十分条件は、すべての $k=1,2,\cdots,M$ に対して次の行列が正定であることである。

$$R_{kN} = \begin{bmatrix} \alpha_{kN} & \gamma_{kN} \\ \gamma_{kN} & \beta_{kN} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

定理2の証明と同様に、Schwarzの不等式より $R_{kN} \geq 0$ である。また、等号が成立するのは

$$g'(\tau_i) = c\,g(\tau_i) \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{4.12}$$

が成立する時に限る。仮定より $g(\cdot)\notin\mathcal{F}_2[0,T]$ なので、上式が成立しない $\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_N\}$ が必ず存在する。したがって、(4.10)式で与えられる情報行列は正定であり、$a(x)$, $b(x)$ は確率収束の意味で可同定である。逆も定理2と同様に証明できる。

(証明終)

この定理より、測定ノイズが(4.2)(4.3)式を満足するならば確率収束の意味での可同定性は局所的可同定性と等価であることがわかる。$a(x)$, $b(x)$ が定数の場合には次の様になる。

系3　$a(x)$, $b(x)$ が定数、すなわち $a(x)=a$, $b(x)=b$ とする。a および b が確率収束の意味で可同定であるための必要十分条件は、測定点の個数が $M=1$ でかつ $g(\cdot)\notin\mathcal{F}_2[0,T]$ であることである。

5. あとがき

本稿では、一階単独偏微分方程式で表わされるシステムに含まれる2つのパラメータの、確定的な意味での可同定性および確率的な意味での可同定性について考察した。可同定性の条件は、空間変数に関して多項式と仮定したパラメータの次数とセンサーの個数に関する条件と、同定における入力関数の形に関する条件として表現できることを示した。また、

測定ノイズを正規白色雑音と仮定すると、確率収束の意味での可同定性の条件は、確定的な局所的可同定性の条件と等価となることを示した。得られた結果は、同定を行なう際に容易にチェックでき、有用なものであると考えられる。

参考文献

[1] R.Bellman, K.J.Astrom : On Structual Identifiability, Math. Biosci. 7, 329/339 (1970)

[2] 古田勝久 : 線形システムの観測と同定, コロナ社, 174 (1976)

[3] 相良節夫 他 : システム同定, 計測自動制御学会, (1981)

[4] G.Chavant : On the Identification of Distributed Parameter Systems, Preprint 5th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, 1, 85/98 (1979)

[5] S.Kitamura, S.Nakagiri : Identifiability of Spatially-Varying and Constant Parameters in Distributed Systems of Parabolic Type, SIAM J. Control and Optimization 15-5, 785/802 (1977)

[6] A. Pierce : Unique Identification of Eigenvalues and Coefficients in a Parabolic Problem, SIAM J. Control and Optimization, 17-4, 494/499 (1979)

[7] M. Courdesses, M.P. Polis, M. Amouroux : On Identifiability of Parameters in a Class of Parabolic Distributed Systems, IEEE AC 26-2, 474/477 (1981)

[8] 増渕：熱交換器，その動特性と制御，計測と制御，16-2，173/183（1977）

[9] 小林，他：集熱器のパラメータ同定，第15回確率システムシンポジウム講演論文集，65，（1983）

[10] 大久保明：生態学と拡散，176，築地書店

[11] T. Rothenberg：Identification in Parametric Models, Econometrica, 39-3, 577/591（1971）

[12] E. Tse, J. Anton：On the Identifiability of Parameters, IEEE, AC 17-5, 637/646（1972）

付録　（補題2の証明）

十分性は明らかなので必要性を示す。(3.9)式を仮定すると

$$e_k(t)=e^{-r_1(x_{p_k})}g(t-\delta_1(x_{p_k}))-e^{-r_2(x_{p_k})}g(t-\delta_2(x_{p_k}))=0\ ,\ t\in[t_0,T]$$

が $k=1,2,\cdots,M$ に対し成立する。$\tau_k=t-\delta_1(x_{p_k})$ とおくと

$$e^{-r_1(x_{p_k})}g(t-\delta_1(x_{p_k}))-e^{-r_2(x_{p_k})}g(t-\delta_2(x_{p_k}))=0\ ,\ \tau_k>0$$

となり，さらに次式の様に計算できる。

$$g(\tau_k)-A_k\,g(\tau_k+B_k)=0 \qquad (k=1,2,\cdots,M)$$

ただし　$A_k=e^{r_1(x_{p_k})-r_2(x_{p_k})}$，　$B_k=\delta_1(x_{p_k})-\delta_2(x_{p_k})$

ところが $g(\cdot)\in\mathcal{F}[0,T]$ なので，上式が $\tau_k>0$ で成立するためには，$A_k=1$ かつ $B_k=0$ でなければならない。したがって

$$r_1(x_{p_k})=r_2(x_{p_k}) \quad かつ \quad \delta_1(x_{p_k})=\delta_2(x_{p_k})$$

が，すべての $k=1,2,\cdots,M$ に対して成立する。　　　　(証明終)