数理解析研究所講究録
第563巻 1985年 96-104

DS-diagram with E-cycle の example

神戸大学教養部 池田裕司 (Hiroshi Ikeda)

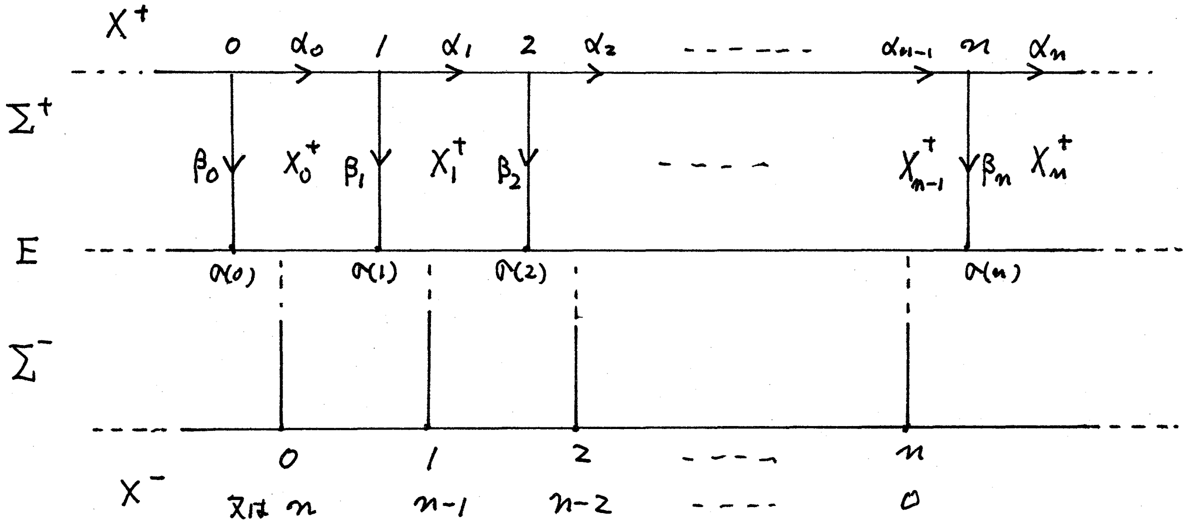
<u>Def</u>. (S^2, G) : DS-diagram, E : subpolyhedron of G.
E が (S^2, G) の E-cycle である。
$\equiv$ (i) E は 1-sphere である。
(ii) E は $S_2(P)$ の一筆描きを与える。
(iii) S^2-G の component の closure の対応する pair に適当に $+,-$ を付けて X_i^+, X_i^- と書くと、$\cup X_i^+$ は 2-ball with boundary E となる。$\Sigma^+ = \cup X_i^+$, $\Sigma^- = \cup X_i^-$ と書く。

DS-diagram with E-cycle を考える背景は石井理論による次の Propositions である。詳細は石井氏の preprint : Flows and Spines 及び本巻での氏の記事を参照の事。

<u>Prop</u>. 1 任意の closed 3-manifold は flow-spine を持つ。

Prop. 2 flow-spine から作った DS-diagram は E-cycle を持つ。

例えば、Seifert-Threlfall の教科書にある Dodecahedral space は DS-diagram with E-cycle になっている。



で与えられる DS-diagram にはどんなものがあるか，又，どんなものがないかについて報告する。

どんなものがあるか，解った結果を先に書きます。

$S_2(E)$ が loop を持つ場合。

1. K.524 の list 中の (1−3)

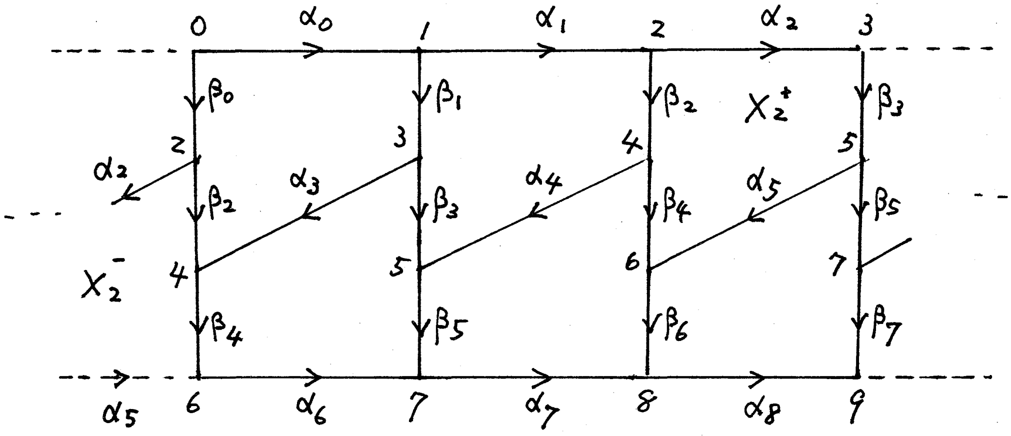
2. K.524 の list 中の (2−7)

3. K.524 の list 中の (2−10)

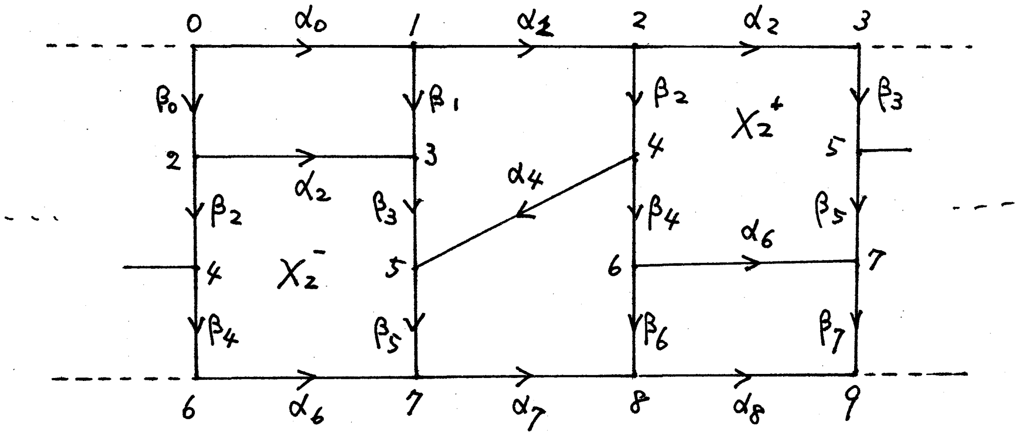
以上の三つしかありません。---- 今の所は。

次に $S_2(P)$ が loop を持たない場合.

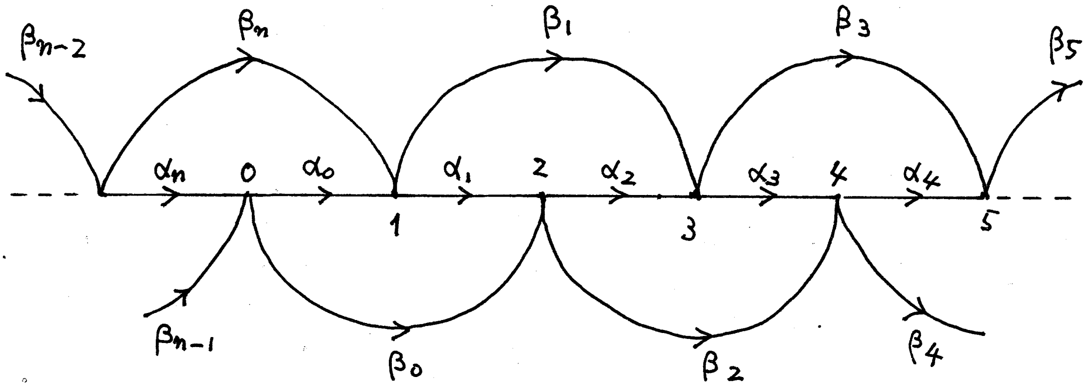
(A)



(B)



$S_2(P)$ は次の通り。



の2種類が無限個のclassとして解っている。他にもあるだろう。これ等については，慶応大・石井，神戸大・河野の両氏も存在を知って筆者に知らせてくれました。

これは決して当てずっぽうではないので，その出来る考察のラフスケッチを記す。

<u>Lemma</u> 1　E 上では α と β が交互に並んでいる。

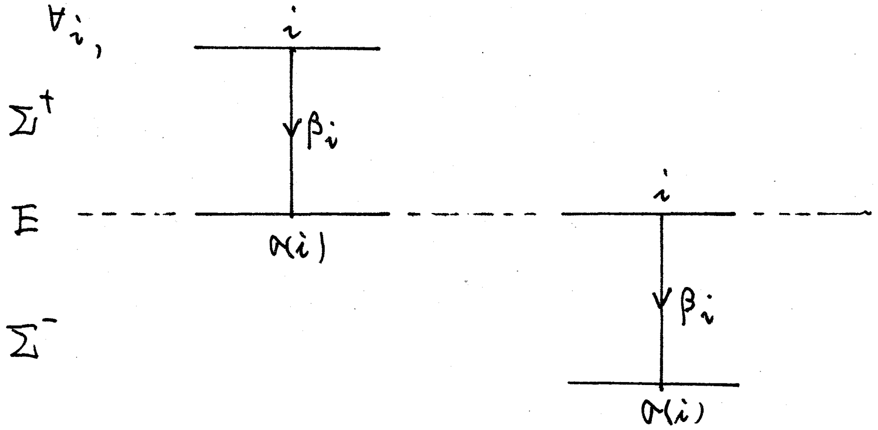
X_i が p_i 角形であるとする。

<u>Lemma</u> 2　$\forall i,\quad 4 \le p_i \le 6$.

<u>Lemma</u> 3　$\forall i,\quad p_i + p_{i+1} \neq 8$

$p_i + p_{i+1} \neq 12$

<u>Lemma</u> 4　$\forall i,$



4, 5, 6 角形の edges が E 上でどう現われるかを調べると，次が得られる。

<u>Lemma</u> 5　σ は $\{0, 1, \cdots, n\}$ の permutation で，

$$\forall i,\quad |\sigma^3(i) - \sigma^3(i+1)| = 1$$

σ^3 は本質的に2通りあるが，まず

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \cdots, & n \\ p, & p+1, & p+2, & \cdots, & p+n \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{mod}\ n+1)$$

とするが，これでは σ がどうも良く判らない。

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \cdots, & n \\ q, & q+1, & q+2, & \cdots, & q+n \end{pmatrix} \qquad q \neq 0$$

の Case を調べる事にする。

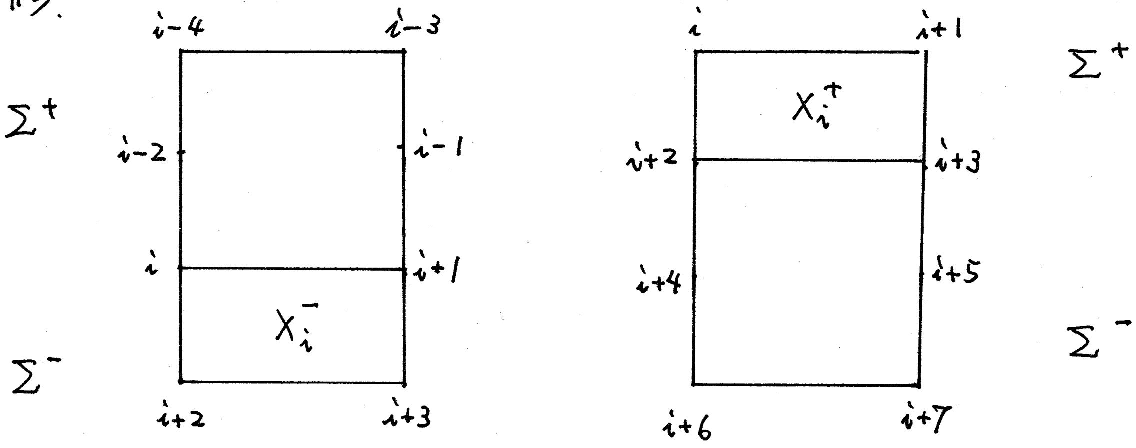
<u>Lemma</u> 6　$\exists i \ni p_i = 5 \Rightarrow |q| = 2$.

<u>Lemma</u> 7　$\forall n, \exists i \ni p_i = 5$.

$q=2$ と $q=-2$ の DS-diagram は同じものである。

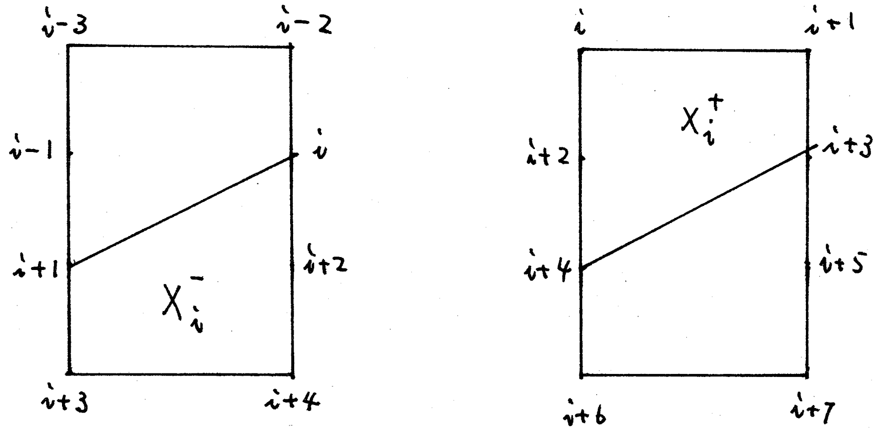
$q=2$ として，DS-diagram 上で 4, 5, 6 角形の相棒がどの辺に居るのかを調べておく。

4角形.



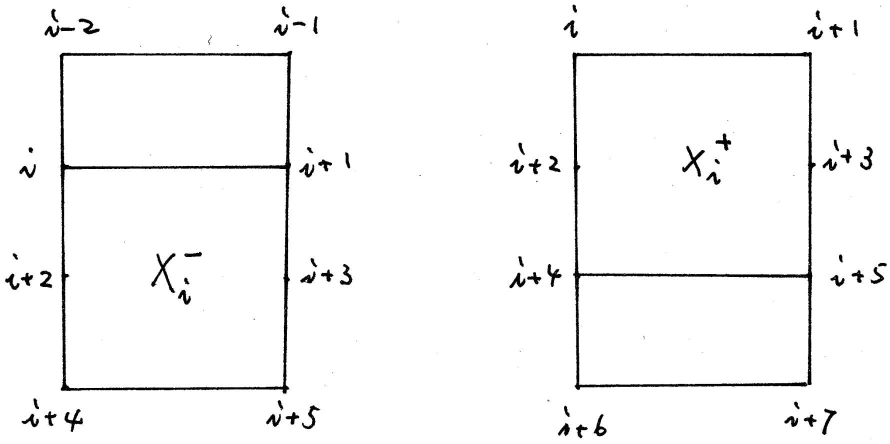
i-4
i-3
i-2
i-1
i
i+1
i+2
i+3
X_i^-
Σ^+
Σ^-
i
i+1
i+2
i+3
i+4
i+5
i+6
i+7
X_i^+

5角形.



i-3
i-2
i-1
i
i+1
i+2
i+3
i+4
X_i^-
i
i+1
i+2
i+3
i+4
i+5
i+6
i+7
X_i^+

6角形



i-2
i-1
i
i+1
i+2
i+3
i+4
i+5
X_i^-
i
i+1
i+2
i+3
i+4
i+5
i+6
i+7
X_i^+

となって p.3 で挙げた図が出て来る。 $g=0$ の時が loop のある場合となる。

次に、どんなものがないかを少し述べる。

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \cdots & n \\ p, & p+n, & p+n-1, & \cdots, & p+1 \end{pmatrix}$$

と仮定する。

番号を付け換えると、

n : even

$\Rightarrow \sigma^3 = (0)(1, n)(2, n-1) \cdots \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right)$

n : odd

$\Rightarrow$ (A) $\sigma^3 = (0, 1)(2, n)(3, n-1) \cdots \left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}+1\right)$

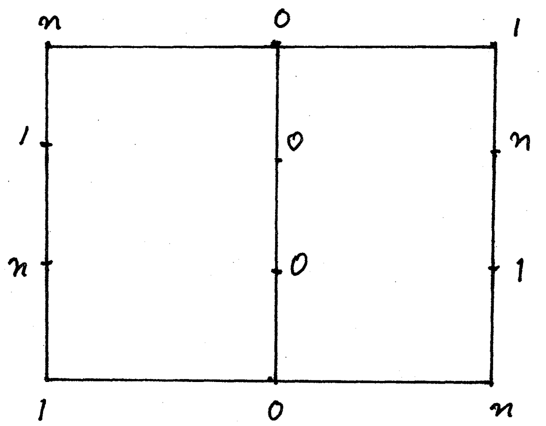
又は (B) $\sigma^3 = (0)(1, n)(2, n-1) \cdots \left(\frac{n+1}{2}\right)$

巡回置換の積として $\sigma = \sigma_0 \cdots \sigma_k$ とおく。

Lemma 8 $\forall i$, $\mathrm{ord}\,\sigma_i \neq 3$, $\mathrm{ord}\,\sigma = 2$ or 6.

n : even の時と、 n : odd (B) は $0, 1, n$ の部分が同じである。

この時



とならざるを得ないが，これでは face の identification が出来ない事が解る。

<u>Prop. 3</u>　n : even,　n : odd (B) に対する DS-diagram は存在しない。

だから，可能性のあるのは　n : odd (A) であるが，上と同様の議論で，

<u>Prop. 4</u>　n : odd (A), ord $\alpha = 2$ に対する DS-diagram は存在しない。

となって残るは　n : odd (A), ord $\alpha = 6$ の case であるがこれは殆ど解らない。

せいぜい次ぐらいしか判っていない。

$\sigma_0 = (0, p, q, 1, \sigma(1), \sigma^2(1))$ とおく。

<u>Lemma</u> 9. $\sigma_0^3 = (0, 1)(p, 1-p)\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}\right)$.

勿論 $p \neq 0, 1, \frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}$.

<u>Remark</u>. p.3 (A) についての詳しい分析は本巻石井氏の記事を参照して下さい。興味深い内容です。

<u>Remark</u> p.3 (A) で $n = 4$ の時が Dodecahedral space で教科書の図と一致している。又, p.3 (A), (B) は両方共, Seifert-Threlfall の identification の条件を満たしている。