

## Flow と Spine

慶応大・理工 石井 一平  
(Ippei ISHII)

### 1. Non-singular Flow による spine の構成

$M$  を 3次元可微分閉多様体,  $\psi_t$  を  $M$  上の smooth non-singular flow とする。さらに,  $\Sigma (CM)$  は,  $M$  の 2次元コンパクト部分多様体で,  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  とする。 $\Sigma$  が  $\psi_t$  の local section であるとは,  $\Sigma$  を含み  $\psi_t$  と至る所接しない  $M$  の 2次元開部分多様体が存在することをいう。以下,  $(\psi_t, \Sigma)$  は, non-singular flow とその local section の組であるとする。

$(\psi_t, \Sigma)$  に対し,  $M$  上の関数  $T_+ = T_+(\psi_t, \Sigma)$  および  $T_- = T_-(\psi_t, \Sigma)$  を次のように定める。

$$T_+(x) = \inf \{ t > 0 \mid \psi_t(x) \in \Sigma \}$$

$$T_-(x) = \sup \{ t < 0 \mid \psi_t(x) \in \Sigma \} \quad (x \in M)$$

但し  $\left\{ \begin{array}{l} \text{すべての } t > 0 \text{ に対し } \psi_t(x) \notin \Sigma \text{ のときは } T_+(x) = +\infty \\ \text{すべての } t < 0 \text{ に対し } \psi_t(x) \notin \Sigma \text{ のときは } T_-(x) = -\infty \end{array} \right.$

また、 $|T_{\pm}(x)| < \infty$  なる  $x \in M$  に対し、 $\hat{T}_{\pm}(x) \in \hat{T}_{\pm}(x) = \psi_{\sigma}(x)$  ( $\sigma = T_{\pm}(x)$ ) と定義する。

$\psi_t$  の local sections  $\Sigma, \Sigma'$  は smooth で  $\text{Int } \Sigma' \supset \Sigma$  とする。今、 $x \in \partial\Sigma, t \in \mathbb{R}, \psi_t(x) \in \partial\Sigma$  とすると、 $\partial\Sigma$  の部分弧  $\gamma = \gamma(x, t)$  と、 $\gamma$  上の連続関数  $\omega$  で次の (i)~(iii) を満足するものをとることが出来る。(i)  $x$  は  $\gamma$  の内点、(ii)  $\omega(x) = t$ , (iii)  $\psi_{\omega(y)}(y) \in \Sigma'$  がすべての  $y \in \gamma$  に対し成り立つ。

Def.  $\partial\Sigma$  が  $(x, t) \in \partial\Sigma \times \mathbb{R}$  において  $\psi_t$ -transversal

$\Leftrightarrow \psi_t(x) \notin \partial\Sigma$  又は、 $\partial\Sigma$  と  $\{\psi_{\omega(y)}(y) \mid y \in \gamma(x, t)\}$  が  $\psi_{\omega(x)}(x)$  において、 $\Sigma'$  の中で transversal に交わる。

Def. non-singular flow と  $\Sigma$  の local section との組  $(\psi_t, \Sigma)$  が normal pair

$\Leftrightarrow$  { (i)  $\Sigma$  が 2-disk に同相。  
 (ii)  $|T_{\pm}(\psi_t, \Sigma)(x)| < \infty$  for  $\forall x \in M$   
 (iii) すべての  $x \in \partial\Sigma$  に対し、 $\partial\Sigma$  は  $(x, T_+(\psi_t, \Sigma)(x))$  において  $\psi_t$ -transversal  
 (iv)  $x \in \partial\Sigma, x_1 = \hat{T}_+(\psi_t, \Sigma)(x) \in \Sigma$  のとき、  
 $\hat{T}_+(\psi_t, \Sigma)(x_1) \notin \Sigma$

Prop. 1 すべての 3次元 肉多様体上に, normal pair が存在する.

(以下, 証明なしの命題については, [3] を参照のこと)

Def.  $M$  上の normal pair  $(\psi_t, \Sigma)$  に対し,  $M$  の部分集合

$P_- = P_-(\psi_t, \Sigma)$  および  $P_+ = P_+(\psi_t, \Sigma)$  を

$$P_- = \Sigma \cup \{ \psi_t(x) \mid x \in \partial\Sigma, T_-(\psi_t, \Sigma)(x) \leq t \leq 0 \}$$

$$P_+ = \Sigma \cup \{ \psi_t(x) \mid x \in \partial\Sigma, 0 \leq t \leq T_+(\psi_t, \Sigma)(x) \}$$

と定める.

Prop. 2  $M$  上の normal pair  $(\psi_t, \Sigma)$  に対し,  $P_-(\psi_t, \Sigma)$ ,  $P_+(\psi_t, \Sigma)$  は共に  $M$  の standard spine でこれらの singularity は次で与えられる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_3(P_-) = \{ x \in \text{Int } \Sigma \mid \hat{T}_+(x) \in \partial\Sigma, \hat{T}_+^2(x) \in \partial\Sigma \} \\ \mathcal{S}_2(P_-) = \hat{T}_-(\partial\Sigma) \cup \{ \psi_t(x) \mid x \in \mathcal{S}_3(P_-), \\ \quad 0 \leq t \leq T_+(x) \} \\ \mathcal{S}_3(P_+) = \{ x \in \text{Int } \Sigma \mid \hat{T}_-(x) \in \partial\Sigma, \hat{T}_-^2(x) \in \partial\Sigma \} \\ \mathcal{S}_2(P_+) = \hat{T}_+(\partial\Sigma) \cup \{ \psi_t(x) \mid x \in \mathcal{S}_3(P_+), \\ \quad T_-(x) \leq t \leq 0 \} \end{array} \right.$$

但し  $\mathcal{S}_j(P)$  は  $P$  の  $j$ -th singularity, 又,  $T_{\pm} = T_{\pm}(\psi_t, \Sigma)$

(spine (or fake surface) の singularity については [1] 参照)

上の様に定まる  $M$  の standard spine  $P_-(\psi, \Sigma)$  および  $P_+(\psi, \Sigma)$  を normal pair  $(\psi, \Sigma)$  によって生成される flow-spine と呼ぶことにする。

## 2. Flow-Spine の DS-diagram

$(\psi_t, \Sigma)$  を  $M$  上の normal pair とし,  $B = B^3$  を  $\mathbb{R}^3$  の単位球. 即ち  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$  とする. さらに  $\rho: B \rightarrow B$  を  $\rho(x, y, z) = (x, y, -z)$  と定め,  $z: \Sigma \rightarrow \partial B$  は  $z(\partial\Sigma) = \partial B \cap \{z=0\}$  なる埋め込みとする. そして,  $\partial B$  上のグラフ  $G(\psi_t, \Sigma)$  を

$$G(\psi_t, \Sigma) = z(\partial\Sigma) \cup z(\hat{T}_-(\partial\Sigma)) \cup \rho(z(\hat{T}_+(\partial\Sigma)))$$

$$(\hat{T}_\pm = \hat{T}_\pm(\psi_t, \Sigma))$$

と定義する.  $G(\psi_t, \Sigma)$  は 3-regular graph である.

このグラフ  $G(\psi_t, \Sigma)$  によって  $\partial B$  上の同値関係 " $\sim$ " を次のように定める.

- (i)  $x \in \mathcal{G}_3(P_-)$  ( $P_- = P_-(\psi_t, \Sigma)$ ) のとき.
 
$$z(x) \sim z(\hat{T}_+(x)) \sim z(\hat{T}_+^2(x)) \sim \rho(z(\hat{T}_+^3(x)))$$
- (ii)  $x \in \partial\Sigma - (\hat{T}_+(\mathcal{G}_3(P_-)) \cup \hat{T}_+^2(\mathcal{G}_3(P_-)))$  のとき.
 
$$z(x) \sim z(\hat{T}_-(x)) \sim \rho(z(\hat{T}_+(x)))$$
- (iii)  $x \in (\text{Int } \Sigma) - \hat{T}_-(\partial\Sigma)$  のとき.
 
$$z(x) \sim \rho(z(\hat{T}_+(x)))$$

⑨ 上の (i), (ii), (iii) はそれぞれ  $G(\psi_t, \Sigma)$  の頂点, 辺, 面の identification を与えている。

Prop. 3  $P_-, P_+$  は共に  $\partial B/\sim$  に同相。

Prop. 4  $M$  は  $B/\sim$  に同相。

Prop. 3 は  $(G(\psi_t, \Sigma), \sim)$  が,  $P_{\pm}$  の DS-diagram であることを示している。しかもこの DS-diagram において  $2(\partial\Sigma)$  は E-cycle になっている。(“E-cycle”の定義は本巻 池田氏の報告を参照のこと) 従って Prop. 1, 2 と合わせて次を得る。

Cor. すべての3次元円多様体は, その standard spine として E-cycle 付の DS-diagram で表現される closed fake surface を持つ。

(i.e. E-cycle 付の DS-diagrams ですべての3次元円多様体を表現できる。)

### 3. Flow-Spine の Singularity-Data

$(\psi_t, \Sigma)$  を  $M$  上の normal pair とし, これに対し次の記号を用いることにする。

記号

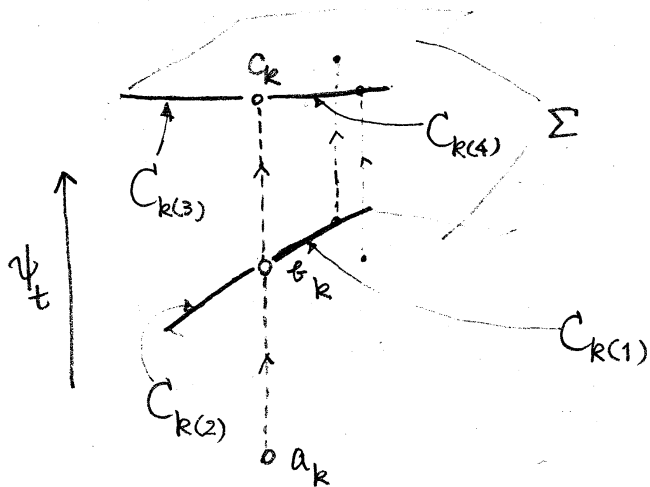
- 1)  $T_{\pm} = T_{\pm}(\psi_t, \Sigma)$ ,  $\hat{T}_{\pm} = \hat{T}_{\pm}(\psi_t, \Sigma)$ ,  $P_{\pm} = P_{\pm}(\psi_t, \Sigma)$
- 2)  $\nu = \# \mathcal{G}_3(P_-) = \# \mathcal{G}_3(P_+)$
- 3)  $\{a_1, a_2, \dots, a_{\nu}\} = \mathcal{G}_3(P_-)$
- 4)  $b_k = \hat{T}_+(a_k)$ ,  $c_k = \hat{T}_+^2(a_k)$ ,  $d_k = \hat{T}_+^3(a_k)$  ( $k=1, \dots, \nu$ )
- 5)  $C_1, C_2, \dots, C_{2\nu} : \partial\Sigma - \{b_1, \dots, b_{\nu}, c_1, \dots, c_{\nu}\}$  の連結成分.
- 6)  $\mu : (\text{Int } \Sigma) - \hat{T}_-(\partial\Sigma)$  の連結成分の個数
- 7)  $D_1, D_2, \dots, D_{\mu} : (\text{Int } \Sigma) - \hat{T}_-(\partial\Sigma)$  の連結成分.

以下では  $a_k, C_m, D_n$  の番号付は、ある一つのものに固定されているとする。

Def. 各  $a_k \in \mathcal{G}_3(P_-)$  に対し、4つの  $\partial\Sigma - \{b_1, \dots, b_{\nu}, c_1, \dots, c_{\nu}\}$  の連結成分の番号  $k(j)$  ( $j=1, \dots, 4$ ) を次のように定める。

- (i)  $C_{k(1)}, C_{k(2)}$  は  $b_k$  の両側にある成分.
- (ii)  $C_{k(3)}, C_{k(4)}$  は  $c_k$  の両側にある成分
- (iii)  $C_{k(1)}$  の中で  $\alpha \rightarrow b_k$  としたとき、 $T_+(\alpha) \rightarrow T_+(b_k)$
- (iv)  $C_{k(4)}$  の中で  $\alpha \rightarrow c_k$  としたとき、 $T_-(\alpha) \rightarrow T_-(c_k)$

(下図を参照せよ).



⊕  $j=1$  or  $2$ ,  
 $j'=3$  or  $4$  に対し  
 $C_{R(j)} = C_{R(j')}$  と  
 なることもある。

$\Sigma$  の向きを  $1 \rightarrow$  固定し  $\widehat{xy}$  ( $x, y \in \partial\Sigma$ ) で  $x$  から  $y$  まで正の向きに行く  $\partial\Sigma$  の subarc を表わす。また各  $k=1, \dots, \nu$ ,  $j=1, \dots, 4$  に対し  $w_k^j$  を  $w_k^j \in C_{R(j)}$  なる点とする。このとき、各  $a_k \in \mathcal{G}_3(P_-)$  は次の4条件 (+), (-), (+\*), (-\*) のいずれかを満足する。

$$(+) \quad \sigma_k \in \widehat{w_k^1 w_k^2}, \quad c_k \in \widehat{w_k^3 w_k^4}$$

$$(-) \quad \sigma_k \in \widehat{w_k^2 w_k^1}, \quad c_k \in \widehat{w_k^4 w_k^3}$$

$$(+)^* \quad \sigma_k \in \widehat{w_k^1 w_k^2}, \quad c_k \in \widehat{w_k^4 w_k^3}$$

$$(-)^* \quad \sigma_k \in \widehat{w_k^2 w_k^1}, \quad c_k \in \widehat{w_k^3 w_k^4}$$

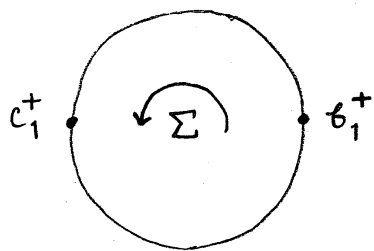
Def. 次の情報 (1), (2) を Singularity-Data と呼ぶ

(1)  $\sigma_k, c_k$  ( $k=1, \dots, \nu$ ) の  $\partial\Sigma$  上の配置

(2) 各  $a_k$  が上の4条件のどれを満足するか。

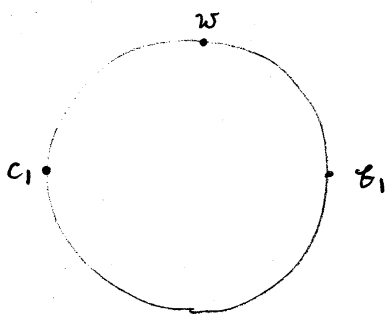
いくつかの例を挙げて、singularity-data から Flow-Spine が再構成されることを見よう。

例 1



( $c_1^+$  は  $c_1$  が条件 (H) を満足することを表す.)

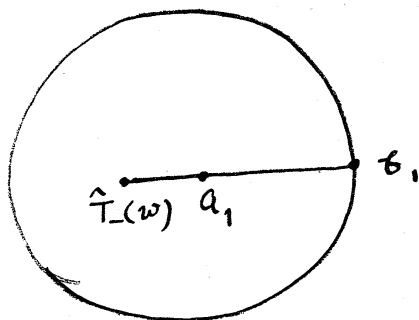
この singularity-data を持つ Flow-Spine が存在したとして、 $\hat{T}_-(\partial\Sigma)$ ,  $\hat{T}_+(\partial\Sigma)$  を描いてみよう。



$w$  を左図のようにとり、まず

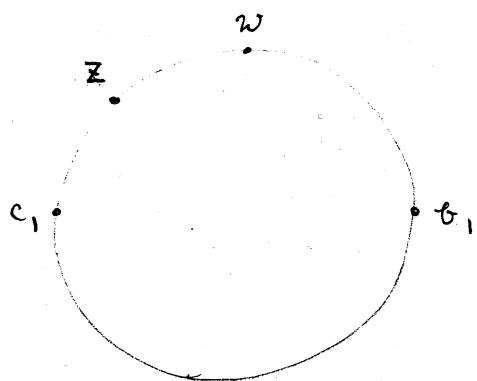
$\hat{T}_-(\widehat{C_1 w})$  を考える。  $a_1$  が条件 (H) を満たすことから、 $\widehat{C_1 c_1}$  内で  $x \rightarrow c_1$  としたとき、 $\hat{T}_-(x) \rightarrow c_1$ 。従って

$\hat{T}_-(\widehat{C_1 w})$  は次の図のようになる。



$$\textcircled{\text{iii}} \quad \hat{T}_-(c_1) = a_1$$



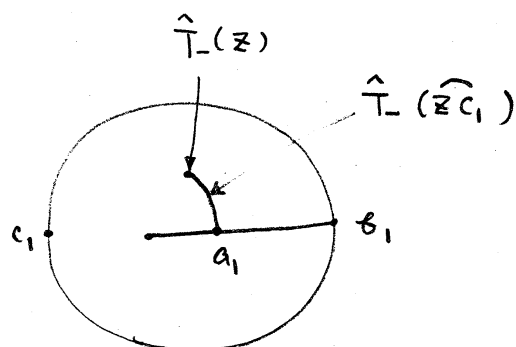
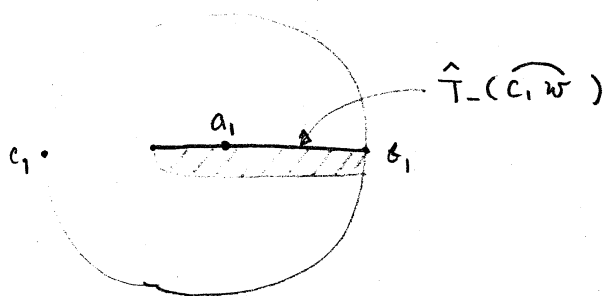


次に  $z$  を左図のようにとり  $\hat{T}_-(\widehat{z}c_1)$  を考える。やはり条件 (+) から  $\widehat{b_1c_1}$  内で  $x \rightarrow c_1$  としたとき  $\hat{T}_-(x) \rightarrow a_1$  である。

一先  $\hat{T}_-(\widehat{c_1w})$  を境に下図の斜線部には  $\hat{T}_-(\partial\Sigma)$

はなりとしてよい。

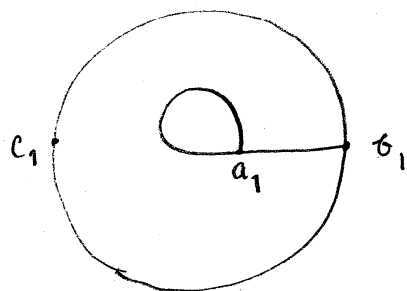
(条件 (+) より)



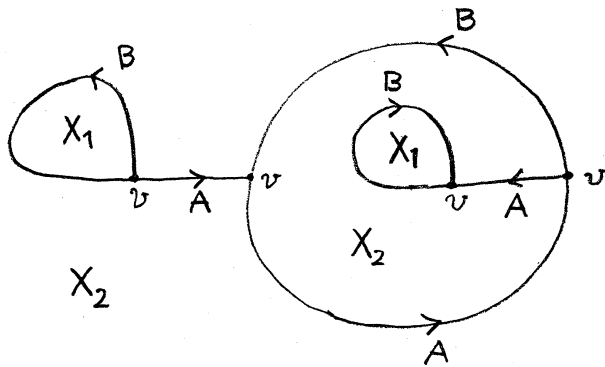
従って  $\hat{T}_-(\widehat{z}c_1)$  は

のようになる。  $\hat{T}_-(\widehat{wz})$  は  $\hat{T}_-(w)$  と  $\hat{T}_-(z)$  を結ぶ arc

となるから、  $\hat{T}_-(\partial\Sigma)$  は次の図で与えられる。



同様に  $\hat{T}_+(\partial\Sigma)$  も描いて、この singularity-data に対応する DS-diagram は、次で与えられることがわかる。

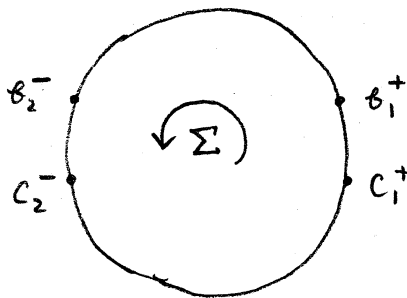


(同じ名前の頂点、辺、面を指定された向きで同一視する。)

この DS-diagram が定める spine は、よく知られた "アワビ" である ([2])。

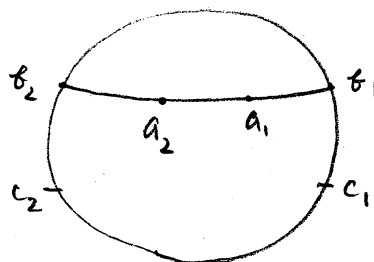
Remark.  $S^3$  上の normal pair  $(\psi_t, \Sigma)$  で、 $P_-(\psi_t, \Sigma)$  が "アワビ" になるものを実際に構成することができる。

例 2



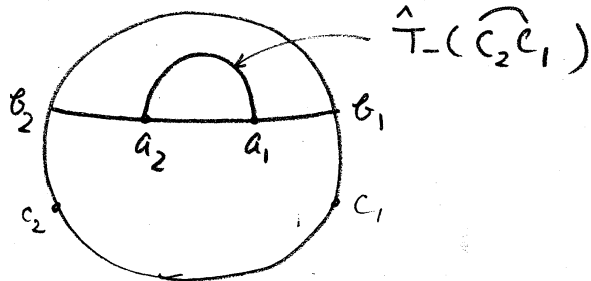
なる singularity-data から対応する DS-diagram を構成しよう。

$\hat{T}_-(c_1, c_2)$  は



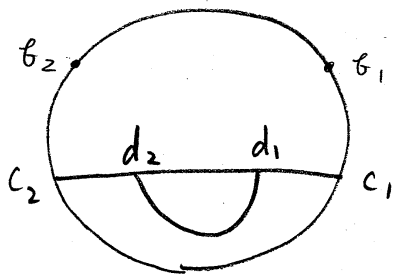
となる。

また  $\hat{T}_-(\widehat{C_1 C_2})$  は  $a_1$  と  $a_2$  を結ぶ arc であるが、 $\sigma_1$  が条件 (+) を満足することから、



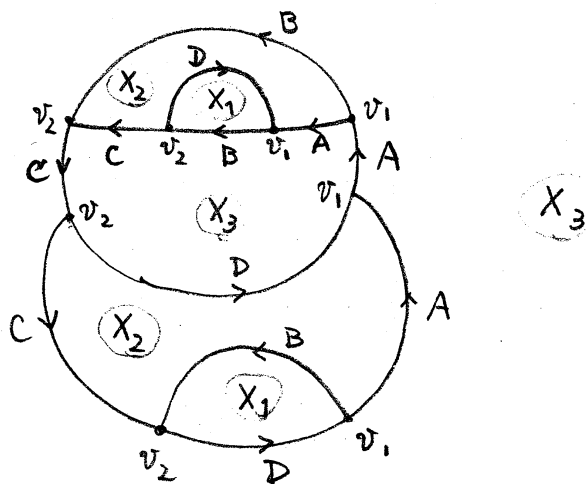
となることがわかる。

一方  $\hat{T}_+(\partial \Sigma)$  は同様の考察で



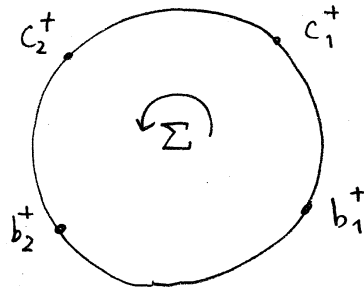
となる。

従って、DS-diagram は次で与えられる。



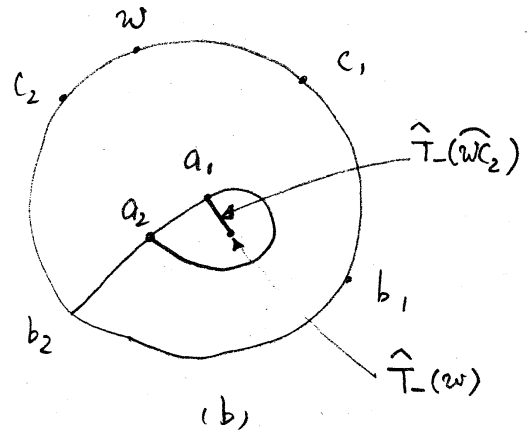
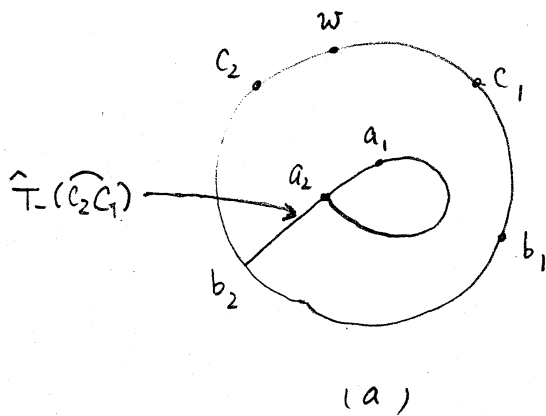
(これは  $S^2 \times S^1$  の spine を与える。)

例 3.



において、補助的に

$w \in \widehat{c_1 c_2}$  を取ると、 $\widehat{T}_-(\widehat{c_2 c_1})$  および  $\widehat{T}_-(\widehat{w c_2})$  はそれぞれ  
下図 (a), (b) のようになる。



$\widehat{T}_-(\widehat{c_1 w})$  は  $\widehat{T}_-(w)$  と  $b_1$  を結ぶ arc で、 $\widehat{T}_-(\widehat{w c_1})$  とは交わらない。ところがこのような arc は存在しない。従ってこの例のような singularity-data を持つ Flow-Spine は存在しない。

Def. 例 1, 2 のように、対応するグラフ  $\widehat{\Gamma}_{\pm}(\partial \Sigma)$  が挿けられるような singularity-data を 実現可能な singularity-data と呼ぶ。

Remark

- (1) すべての実現可能な singularity-data が、実際にある

normal pair によって実現されるかどうかは証明されている。

(2) しかし、実現可能な singularity-data は DS-diagram によってある 3次元多様体を表わしている。

Prop. 5 実現可能な singularity-data に対応する DS-diagram が連結であれば、それは unique である。

§2 に述べたことと合わせると、

「すべての 3次元多様体は、"singularity-data" という 1次元的情報によって決定される」

ということが出来る。

#### 4. 可附向性, 基本群

$\Delta$  を一つの実現可能な singularity-data とし、 $M$  を  $\Delta$  が定める DS-diagram が表わす多様体とする。

Prop. 6.  $M$  が orientable

$\Leftrightarrow (+^*), (-^*)$  を満足する  $a_k$  が存在しない。

(i.e. すべての  $a_k$  は (+) または (-) を満たす)

( $a_k$  は前節と同じ意味)

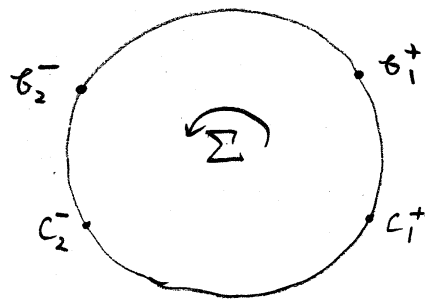
次に、singularity-data  $\Delta$  から、対応する多様体の基本群の表示を読み取る方法を与えるために、少し記号を準備する。

$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_\nu$  で  $\partial\Sigma = \{b_1, \dots, b_\nu\}$  の連結成分を表わす ( $b_k$  は前節と同じ)。各  $a_k$  に対し、これらの連結成分の番号  $k\{1\}, k\{2\}, k\{3\}$  を次の (i) ~ (iii) によって定める。

(i)  $\Gamma_{k\{1\}} \supset C_{k(1)}$     (ii)  $\Gamma_{k\{2\}} \supset C_{k(2)}$     (iii)  $c_k \in \Gamma_{k\{3\}}$   
但し、 $c_k, C_{k(j)}$  は前節と同じ意味。

例 (前節例2)

右図の singularity-data  
で  $\Gamma_1 = \widehat{b_1 b_2}$ ,  $\Gamma_2 = \widehat{b_2 b_1}$ ,  
 $C_1 = \widehat{c_1 c_2}$ ,  $C_2 = \widehat{c_2 c_1}$ ,  
 $C_3 = \widehat{c_2 c_1}$ ,  $C_4 = \widehat{c_1 c_2}$  とすると、



$a_1$  が条件 (+) を、 $a_2$  が条件 (-) を満足することから、

$$C_1 = C_{1(2)} = C_{2(2)}, \quad C_2 = C_{2(1)} = C_{2(4)}, \quad C_3 = C_{2(3)} = C_{1(3)},$$

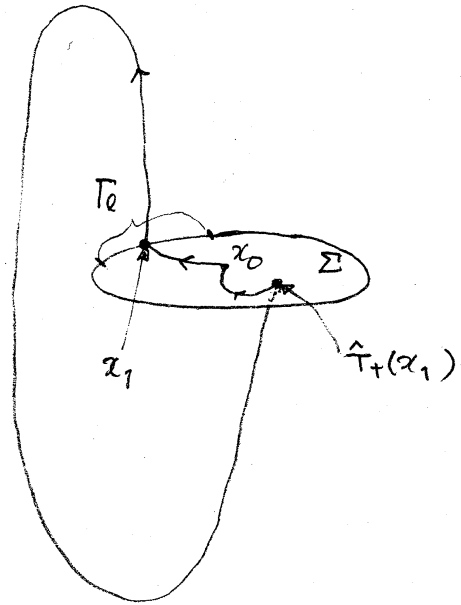
$$C_4 = C_{1(4)} = C_{1(1)} \quad \text{であるから、} \quad \Gamma_1 = \Gamma_{1\{2\}} = \Gamma_{2\{2\}},$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_{1\{1\}} = \Gamma_{1\{3\}} = \Gamma_{2\{1\}} = \Gamma_{2\{3\}} \quad \text{となる。}$$

base point  $x_0 \in \Sigma$  上にとり、各成分  $\Gamma_\ell$  に対して、loop  $u_\ell$  を、次のように定める。 $x_0$  と  $\Gamma_\ell$  上の点  $x_1$  を  $\Sigma$  内で結ぶ arc を  $\alpha_1$ ,  $x_1$  から  $\hat{T}_+(x_1)$  に至る flow  $\psi_t$  の orbit segment を  $\alpha_2$ ,  $\hat{T}_+(x_1)$  と  $x_0$  を  $\Sigma$  内で結ぶ arc を  $\alpha_3$  とし、 $u_\ell = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3$

とする。これらの loops  $u_1, \dots, u_\nu$  が基本群  $\pi_1(M, x_0)$  を生成する。

③ ところで、singularity-data に対応して normal pair  $(\psi, \Sigma)$  が存在するものとしたが、次に述べる基本群の表示は、DS-diagram から (normal pair の存在を仮定せずに) 示すことができる。

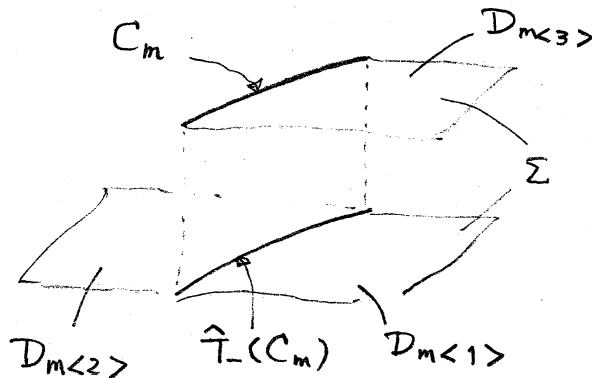


Prop. 7  $\pi_1(M) = \langle u_1, \dots, u_\nu; h_1, \dots, h_\nu \rangle$

但し、 $h_k = u_{k1j} u_{k2j} u_{k3j}^{-1}$  ( $k=1, \dots, \nu$ )。

$\pi_1(M)$  の異なる表示を与えよう。  $\mu \in \Sigma - \hat{T}_-(\partial\Sigma)$  の連結成分の個数とし、 $D_1, \dots, D_\mu$  をこれらの成分とする。そして、 $\partial\Sigma - \{c_1, \dots, c_\nu, c_1, \dots, c_\nu\}$  の各成分  $C_m$  ( $m=1, \dots, 2\nu$ ) に対し、 $D_n$  達の番号  $m \langle j \rangle$  ( $j=1, 2, 3$ ) を、次のように定める。

- (i)  $\hat{T}_-(C_m)$  の両側の成分が  $D_{m \langle 1 \rangle}, D_{m \langle 2 \rangle}$  であり、 $\hat{T}_-(C_m)$  の+成分となる近傍内で  $x \rightarrow x_0$  ( $x_0 \in \hat{T}_-(C_m)$ ) としたとき



$$\hat{T}_+(x) \rightarrow \hat{T}_+(x_0) \in C_m.$$

iii)  $C_m \subset \partial D_{m<3>}$

次に、各  $D_m$  に対し loop  $v_m$  を次の様に定める。  $\alpha_1$  を

base point  $x_0 \in \Sigma$  と  $x_1 \in D_m$

を  $\Sigma$  内で結ぶ arc,  $\alpha_2$

を  $x_1$  から  $\hat{T}_+(x_1)$  に至る

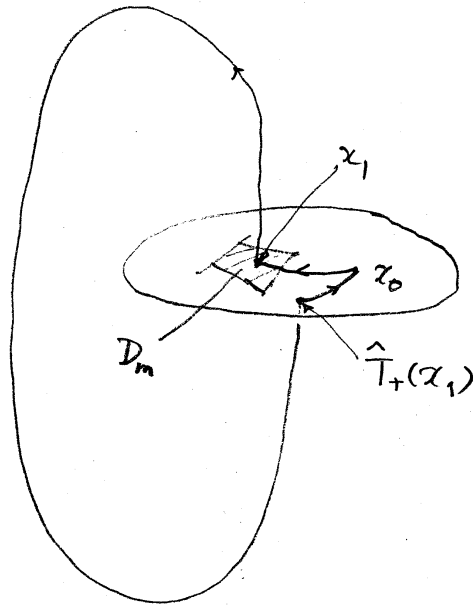
orbit segment,  $\alpha_3$  を  $\hat{T}_+(x_1)$

と  $x_0$  を  $\Sigma$  内で結ぶ arc と

し、  $v_m = \alpha_1 \circ \alpha_2 \circ \alpha_3$  とする。

このとき、次の  $\pi_1(M)$  の

表示を得る。



Prop. 8  $\pi_1(M) = \langle v_1, \dots, v_\mu ; r_1, r_2, \dots, r_{2\nu} \rangle$

但し、  $r_n = v_{m<1>} v_{m<3>}^{-1} v_{m<2>}$  .

⑧ この表示も normal pair の存在を仮定せずに示すことができる。

Prop. 9 上の表示の relators  $r_1, \dots, r_{2\nu}$  の間には、次の

$\nu$  個の関係式が成り立つ。

$$r_{k(2)}^{-1} r_{k(1)} = v_{n_1} v_{n_2}^{-1} r_{k(4)} v_{n_2} v_{n_1}^{-1} r_{k(3)}^{-1} \quad (k=1, \dots, \nu)$$



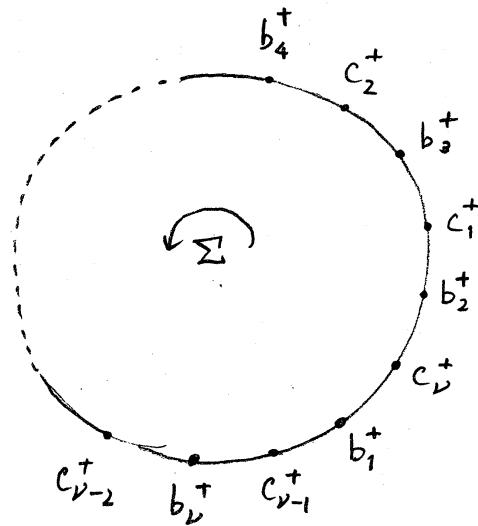
但し  $n_1 = m \langle 2 \rangle$ ,  $n_2 = m \langle 3 \rangle$ ,  $m = k(2)$ 。さらに、これらの関係式のうち、 $\nu-1$ 個はアーベル化しても、独立な関係である。

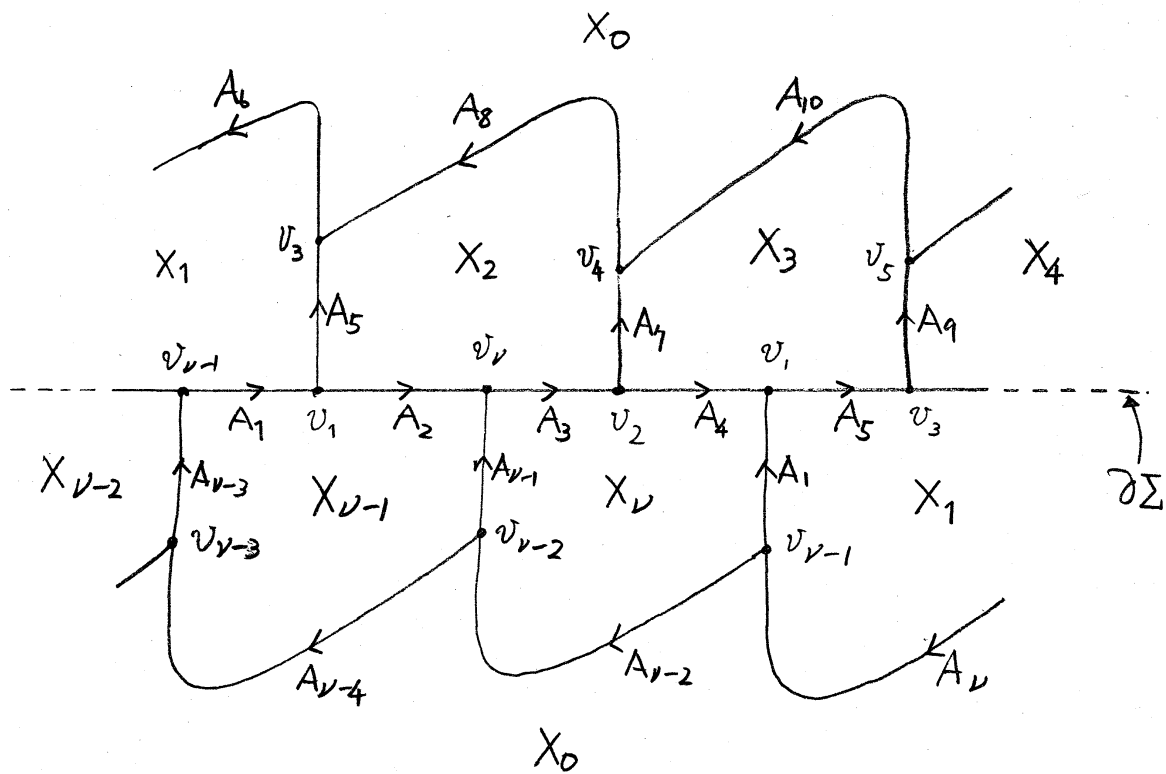
$\mu$  と  $\nu$  の関係は、Euler の公式から  $\mu \geq \nu + 1$  であり、DS-diagram が非連結のとき、またそのときに限り  $\mu > \nu + 1$  である。従って、Prop. 8, 9 より次を得る。

Prop. 10.  $M$  上に normal pair  $(\psi_t, \Sigma)$  で、 $G(\psi_t, \Sigma)$  が非連結であるものが存在するならば、 $H_1(M; \mathbb{R}) \neq \{0\}$ 。

## 5. Examples

例として、右の図で与えられる singularity-data  $\Delta_\nu$  を考える。(  $\nu=1$  のときは、§3 の例1である。) すべての  $\nu$  に対し  $\Delta_\nu$  は実現可能で、対応する DS-diagram は下図で与えられる。





$v_1, \dots, v_{\nu}$  は頂点の番号  
 $A_1, \dots, A_{2\nu}$  は辺の番号  
 $X_0, \dots, X_{\nu}$  は面の番号  
 で同じ名前のもを指定された向きで同一視する。

(注)  $\nu=5$  のときは、いわゆる Dodecahedral space と呼ばれる homology sphere である。

又、この DS-diagrams が表わす、fake surface の族は、最近池田氏によって研究されている "maximal element を持つ fake surface" という族に含まれる。

上の DS-diagram によって定まる多様体を  $M_\nu$  とすると.

Prop. 7 を用いて  $M_\nu$  の 1 次元ホモロジ- は次のように計算される。

### Prop. 11.

- (i)  $\nu \equiv 1 \pmod{6}$  のとき.  $H_1(M_\nu; \mathbb{Z}) = \{0\}$
- (ii)  $\nu \equiv 2 \pmod{6}$  のとき.  $H_1(M_\nu; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3$
- (iii)  $\nu \equiv 3 \pmod{6}$  のとき.  $H_1(M_\nu; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$
- (iv)  $\nu \equiv 4 \pmod{6}$  のとき.  $H_1(M_\nu; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_3$
- (v)  $\nu \equiv 5 \pmod{6}$  のとき.  $H_1(M_\nu; \mathbb{Z}) = \{0\}$
- (vi)  $\nu \equiv 0 \pmod{6}$  のとき.  $H_1(M_\nu; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

また、やはり Prop. 7 の表示から、relator の逐次代入により、 $\pi_1(M_\nu)$  は 2-generators, 2-relators の表示を持つことが容易に示せる。

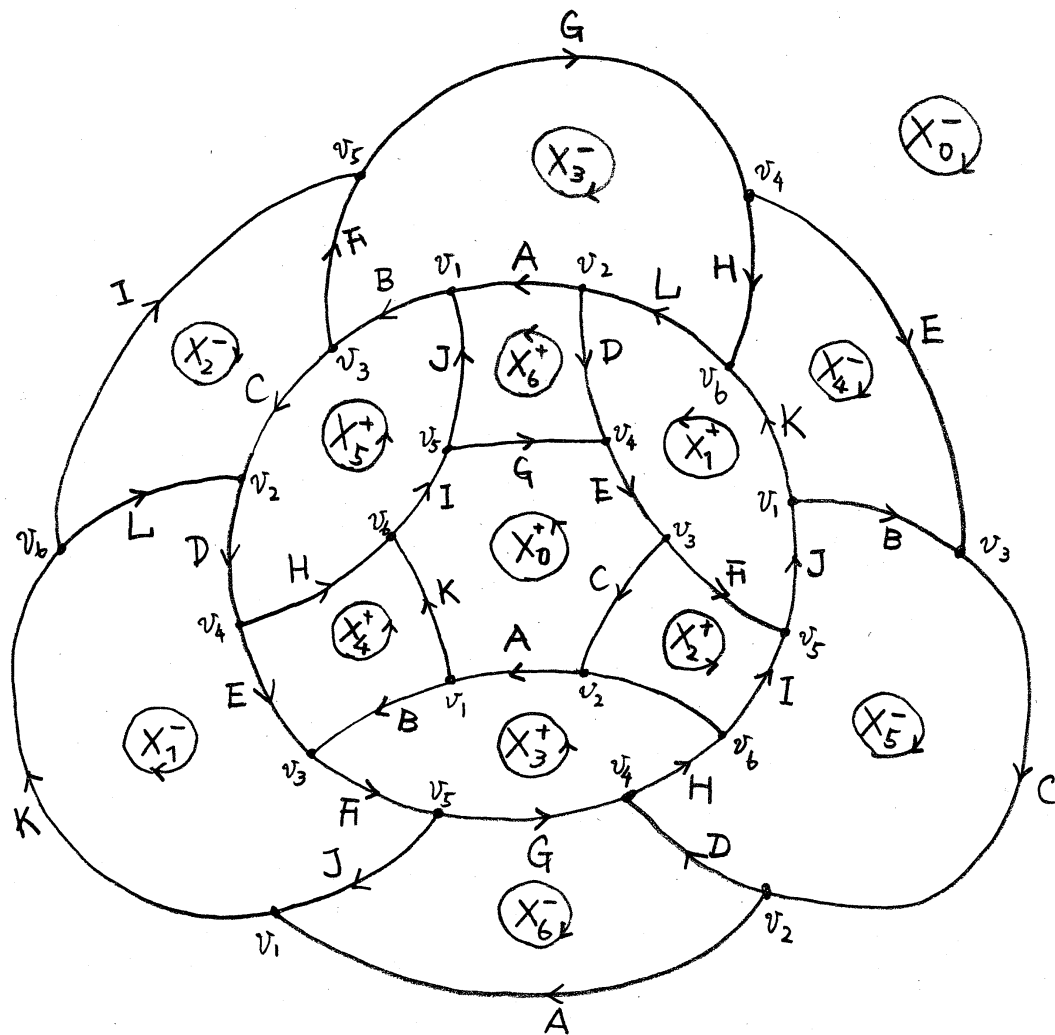
例えば

$$\pi_1(M_2) = \mathbb{Z}_3, \quad \pi_1(M_3) = \langle u_1, u_2; u_2 u_1 u_2^{-1} u_1, u_2 u_1 u_2 u_1^{-1} \rangle,$$

$$\pi_1(M_4) = \langle u_1, u_2; u_1^{-1} u_2 u_1 u_2^{-1} u_1 u_2, u_2^{-1} u_1^{-1} u_2 u_2 u_1^{-1} \rangle$$

$$\pi_1(M_5) = \langle u_1, u_2; u_1^{-1} u_2 u_1 u_2^{-1} u_1 u_2^{-1} u_1^{-1}, u_2^{-1} u_1 u_2^{-1} u_1^{-1} u_2 u_2 u_1^{-1} \rangle$$

上の例の系列には族さるい maximal element をもつ fake surface の例をもう一つ考げよう。



これは 3次元トラス  $\mathbb{I}^3$  上の具体的な normal pair から構成したもので、従ってこの DS-diagram が表わす多様体は  $\mathbb{I}^3$  である。

## 6. 基本群の非自明性の判定条件への試み

次の問題は、3次元多様体を考える上で、重要な問題であると考えられている。

" $P$  が  $M$  の standard spine で、 $\#G_2(P) \geq 2$  かつ  $P$  は既約 ( $M$  がより少ない 3-rd singularities の standard spine を持たない) ならば  $\pi_1(M) \neq \{1\}$  か?"

このことを考えると、DS-diagram から、対応する多様体の基本群の非自明性を読み取る方法を開発することにも、重要性があると思われる。

ここでは、そのような方法の試みを行い、これを前節の例  $M_\nu$  ( $\nu \geq 7$ ) に適用してみる。(  $M_\nu$  の場合は、前節最後に与えた表示から、 $\pi_1(M_\nu)$  の非自明性を示せると思うが…… )

一般的なことから始めよう。  $M$  上に normal pair  $(\mathcal{L}, \Sigma)$  が与えられているとする。  $\mathcal{L}_{x_0}$  で  $x_0 \notin P_- = P_-(\mathcal{L}, \Sigma)$  を基点とし  $\Sigma$  に横断的に交わる loops  $\gamma$  で  $\gamma \cap P_- \subset \Sigma - G_2(P_-)$  なるものの集合を表わす。  $p$  で  $\mathcal{L}_{x_0}$  から  $\pi_1(M, x_0)$  への自然な写像を表わす。一先、  $V$  で  $\{v_1, \dots, v_\mu\}$  上の free group を表わす。ここで、 $\mu$  は前と同様  $\Sigma - \hat{\Gamma}_-(\partial\Sigma)$  の連結成分  $D_1, D_2, \dots, D_\mu$  の個数。そして、  $p_* : \mathcal{L}_{x_0} \rightarrow V$  を次の様に定める。  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  ( $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ ) を  $\mathcal{L}_{x_0}$  の元とし、  $\gamma \cap \Sigma = \{\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_s)\}$  ( $t_1 < t_2 < \dots < t_s$ ) とする。

このとき.

$$p_*(\gamma) = v_{n_1}^{\epsilon_1} v_{n_2}^{\epsilon_2} \cdots v_{n_s}^{\epsilon_s}$$

と定める。但し  $n_j$  は  $\gamma(t_j) \in D_{n_j}$  なる番号であり、 $\epsilon_j = 1$  or  $-1$  は.

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{if } \lim_{t \rightarrow t_j^-} T_+(\psi_t, \Sigma)(\gamma(t)) = 0 \\ -1 & \text{if } \lim_{t \rightarrow t_j^+} T_+(\psi_t, \Sigma)(\gamma(t)) = 0 \end{cases}$$

と定める。

さて、 $\gamma_m = v_{m<1} v_{m<3} v_{m<2}^{-1} \in V$  (Prop. 8 を見よ) とし  $R$  で  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2\nu}\}$  から作られる *cyclically reduced symmetrized set* を表わす。(以下で組合せ群論に関する用語は [4] の Chap. V を参照のこと) さらに、 $N$  で  $R$  で生成される  $V$  の正規部分群を表わすと、Prop. 8 より  $\pi_1(M) = V/N$  である。

今、 $\gamma \in \mathcal{L}_{z_0}$ ,  $p(\gamma) = 1$  とする。このとき immersion  $z: D^2 \rightarrow M$  ( $D^2$  は 2-disk) で  $\gamma = z(\partial D^2)$  となるものがとれる。一先、

$p^*(\gamma) = w \in N$  であるから、 $w$  は

$$w = c_1 r_{k_1} c_1^{-1} c_2 r_{k_2} c_2^{-1} \cdots c_s r_{k_s} c_s^{-1}$$

$$(c_j \in V, r_{k_j} \in R)$$

と  $R$ -sequence で表わせる (表わし方は一意ではない)。このとき、generators  $v_n$  ( $n=1, \dots, \mu$ ) と relators  $\gamma_m$  ( $m=1, \dots, 2\nu$ ) の定義より、次の命題が容易に示される。

Prop. 12

(1)  $p^*(\gamma) = w \in \mathcal{N}$  が cyclically reduced とすると、 $w$  に対する任意の R-sequence  $w = c_1 r_{k_1} c_1^{-1} \cdots c_s r_{k_s} c_s^{-1}$  に対し、ある immersion  $z: D^2 \rightarrow M$  ( $\gamma = z(\partial D^2)$ ) が存在して、 $z^{-1}(P_-)$  が平面グラフとなり、それが与えられた  $w$  に関する cancellation diagram の双対グラフとなる。

(2) 逆に、 $p(\gamma) = 1$  とし、 $z: D^2 \rightarrow M$  を  $\gamma = z(\partial D^2)$ 、 $z(D^2) \cap \mathcal{G}_3(P_-) = \emptyset$  なる immersion で  $\mathcal{G}_2(P_-)$  および  $P_- - \mathcal{G}_2(P_-)$  に横断的に交わるものとするれば、 $z^{-1}(P_-)$  は平面グラフで、しかもその双対グラフは、 $p^*(\gamma)$  のある cyclical conjugate に対する一つの R-sequence に関する cancellation diagram を与える。

⊕ ①  $p^*(\gamma) = c_1 r_{k_1} c_1^{-1} \cdots c_s r_{k_s} c_s^{-1}$  に関する cancellation diagram

が immersion  $z: D^2 \rightarrow M$  によって与えられるとき、

$$S = \#(z(D^2) \cap \mathcal{G}_2(P_-)) \text{ が成り立つ。}$$

以下では、 $\gamma \in \mathcal{L}_{X_0}$  ( $p(\gamma) = 1$ ) に対する  $z(\partial D^2) = \gamma$  となる immersion  $z: D^2 \rightarrow M$  は、すべて  $z(D^2) \cap \mathcal{G}_3(P_-) = \emptyset$  で、 $\mathcal{G}_2(P_-)$  および  $P_- - \mathcal{G}_2(P_-)$  と横断的に交わるものとする。

$p(\gamma) = 1$  なる  $\gamma \in \mathcal{L}_{X_0}$  に対し、 $z(\partial D^2) = \gamma$  でかつ、

$\#(Z(D_2) \cap \mathcal{G}_2(P_-))$  を最小にするような immersion  $z: D^2 \rightarrow M$  を  $\gamma$  に関する minimum immersion と呼ぶ。明らかに、minimum immersion  $z$  に対する  $z^{-1}(P_-)$  の双対グラフは、 $p^*(\gamma)$  (のある cyclical conjugate) の minimal  $R$ -sequence に対応する。

さて、 $z$  を  $\gamma \in \mathcal{L}_{\alpha_0}$  ( $p(\gamma)=1$ ) に関する minimum immersion とし、 $\check{G}(z)$  を  $D^2$  内のグラフ  $z^{-1}(P_-)$  とする。そして、 $Q(z)$  を  $\check{G}(z)$  から  $\partial D^2$  上の頂点、及び  $\partial D^2$  上に端点をもつ辺を除いて得られる平面グラフとする。このとき、 $Q(z)$  が連結であることが、 $z$  が minimum immersion であることから示される。従って、 $E_1, \dots, E_n$  を  $D^2 - Q(z)$  の  $\partial D^2$  と disjoint な連結成分とすると、各  $E_j$  は 2-disk である。

また一応、§2 で述べた DS-diagram  $(G(\gamma, \Sigma), \sim)$  及びこれによる  $M$  の表示

$$f: B^3 \rightarrow B^3/\sim = M \quad (f(\partial B^3) = P_-)$$

を考える。  $D^2 - Q(z)$  の各成分  $E_j$  の中に単純閉曲線  $\beta$  をとり、 $\beta \rightarrow \partial E_j$  とすると、 $f^{-1}(z(\beta))$  の極限は  $\partial B^3$  上の閉曲線となる。これを  $\beta_j$  で表わす。  $\#(Z(D^2) \cap \mathcal{G}_2(P_-))$  を変えずに、 $z$  を変形して、各  $\beta_j$  が単純閉曲線となるように出来るので、以後は、 $\beta_j$  は単純閉曲線であるとする。

$w \in V$  に対し、 $l(w)$  と  $w$  の cyclically reduced length



を表わすことにする。次の命題は定義より明らかである。

Prop. 13 上のような  $\mathcal{Y}$ ,  $\Sigma$  に対し、 $l(p^*(\mathcal{Y}))$  はグラフ  $G(\Sigma)$  の次数 2 の頂点の個数に等しい。又、 $d(E_1 \cup \dots \cup E_r)$  の内部にある  $G(\Sigma)$  の頂点は、すべて次数 3 である。

各  $E_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) に対し、 $\lambda(E_i) \in \mathbb{Z}_+$  を次のように定める。  $\beta_i$  によって分けられる  $\mathbb{B}^3$  の 2 つの領域を  $Y_i^1, Y_i^2$  とし、 $n_i^j$  で  $Y_i^j$  に含まれる  $\mathbb{B}^2 - G(\psi_t, \Sigma)$  の成分の個数を表わし、 $\lambda(E_i) = \min(n_i^1, n_i^2)$  とおく。このとき、*minimum immersion* について次が成り立つ。

Prop. 14  $\Sigma$  が  $\mathcal{Y}$  に関する *minimum immersion*  
 $\Rightarrow \lambda(E_i) > 0$  for  $\forall i$

証明の概略. Prop. 9. の関係式より、 $p^*(\mathcal{Y})$  の *cancellation diagram*  $\tilde{G}(\Sigma)$  において、 $\partial E_i$  を取り去り、 $E_i$  の内部を  $Y_i^j$  の内部の  $G(\psi_t, \Sigma)$  で置き換えたグラフも、 $p^*(\mathcal{Y})$  に対するある *R-sequence* に関する *cancellation diagram* の双対グラフとなる。従って、ある  $i$  について  $\lambda(E_i) = 0$  であれば、 $\Sigma$  は *minimum immersion* ではない。

Prop. 15  $Z$  を  $\mathcal{Y}$  に関する minimum immersion とし、 $E_i, E_j$  ( $i \neq j$ ) をとり合う面とする。このとき、 $\alpha = \partial E_i \cap \partial E_j$  とすると、 $\beta_i \cap \tilde{g}^{-1} \cdot Z(\alpha) \neq \beta_j \cap \tilde{g}^{-1} \cdot Z(\alpha)$ 。

この証明も Prop. 9. の関係式から導かれる。即ち、

$\beta_i \cap \tilde{g}^{-1} \cdot Z(\alpha) = \beta_j \cap \tilde{g}^{-1} \cdot Z(\alpha)$  とすると、 $\tilde{g}(Z)$  から、辺  $\alpha$  を除き、 $\partial E_i$  に含まれる辺  $\alpha_1$  ( $\neq \alpha$ ) と  $\partial E_j$  に含まれる辺  $\alpha_2$  ( $\neq \alpha$ ) が端点  $v$  を共通するときには新たに  $\alpha_1 \cup v \cup \alpha_2$  を辺と考えると得られるグラフがまた、 $p^*(\mathcal{Y})$  のある cancellation diagram の双対グラフになる。これは、やはり  $Z$  が minimum immersion であることに反する。

次に、各  $E_i$  について  $d^*(E_i) \in \mathbb{Z}_+$  を

$$d^*(E_i) = d(E_i) + \theta(E_i)$$

と定める。但し、 $d(E_i)$  はグラフ  $g(Z)$  における  $E_i$  の degree を表わし、 $\theta(E_i)$  は  $d(E_1 \cup \dots \cup E_R)$  の境界に含まれる  $\partial E_i$  の edge の個数を表わす。また  $Q(Z) = \{E_1, \dots, E_R\}$ ,  $Q_m(Z) = \{E_i \mid d^*(E_i) = m\}$  とおく。このとき、[4] (chap. V, Th. 3.1) により (Th. 3.1 において  $(p, g) = (3, 6)$  とし、Prop. 13. を用いる)、次の等式が成り立つ。

$$(*) \quad 3 = l(p^*(\mathcal{Y})) + \frac{1}{2} \sum_{E \in Q(Z)} (6 - d^*(E))$$

この等式から次の命題が示される。

Prop. 16. 任意の  $\gamma \in \mathcal{L}_x$  ( $p(\gamma) = 1$ ) に対し, minimum immersion  $Z$  で

$$(**) \sum_{E \in \mathcal{Q}(Z)} (d^*(E) - 6) \geq 0$$

なるものがとれるならば,  $\pi_1(M) \neq \{1\}$  である。

実際, 命題の仮定が満たされ,  $w = p^*(\gamma) \in \mathcal{N}$  (i.e.  $p(\gamma) = 1$ ) とする。このとき, (\*) より  $l(w) \geq 3$  となる。従って,  $\mathcal{N} \neq \mathcal{V}$ , 即ち,  $\mathcal{V}/\mathcal{N} = \pi_1(M) \neq \{1\}$  である。

例  $M_\nu$  に Prop. 16. を適用するには, 次の命題を用いる。

Prop. 17  $Z$  が次の (A-1), (A-2) を満たせば (\*\*) が成り立つ。

$$(A-1) \mathcal{Q}_m(Z) = \emptyset \text{ for } m \leq 4$$

$$(A-2) \text{ map } f: \mathcal{Q}_5(Z) \rightarrow \mathcal{Q}(Z) \text{ が存在して}$$

$$\left( \sum_{E \in \text{Im}(f)} (d^*(E) - 6) \right) - \#\mathcal{Q}_5 \geq 0$$

が成り立つ。

Prop. 14. によって, §5 の  $M_\nu$  の spine に関して,

minimum immersion に対し条件 (A-1) はいつでも満たされている。従って、 $\pi_1(M_\nu) \neq \{1\}$  を Prop. 16. によって示すためには、任意の  $\gamma \in \mathcal{L}_x$  ( $p(\gamma)=1$ ) に対し、(A-2) を満たす、minimum immersion  $Z$  がとれることを示せばよい。

Prop. 18. spine  $P_-$  に対応する DS-diagram の face の degree がすべて 5 以上とする。このとき、minimum immersion  $Z$  に対し、次の条件 (i), (ii) を同時に満足する  $E_i, E_j \in \mathcal{Q}(Z)$  ( $i \neq j$ ) は存在しない。

(i)  $E_i$  と  $E_j$  は  $D^2$  の中で互いに隣り合う。

(ii)  $\lambda(E_i) = \lambda(E_j) = 1$  から  $d(E_i) = d(E_j) = 5$

証明の概略.  $k=i$  or  $j$  とする。条件より、 $\beta_k$  で分けられる領域の一つ  $Y_k$  は唯一つの face を含む。 $\partial E_k$  を除き、 $E_k$  の内部を  $Y_k$  の内部の DS-diagram で置きかえることに対応する、 $R$ -sequence の変更を考える。条件  $\lambda(E_k)=1$  よりこのような変更によって得られる  $R$ -sequence も minimal である。従って、このように変更された  $R$ -sequence に対する immersion  $Z'$  も minimum immersion である。しかも、 $Z$  又は  $Z'$  は Prop. 15 の条件を満たさないことが示される。ところが、Prop. 15 によってこれは不合理である。

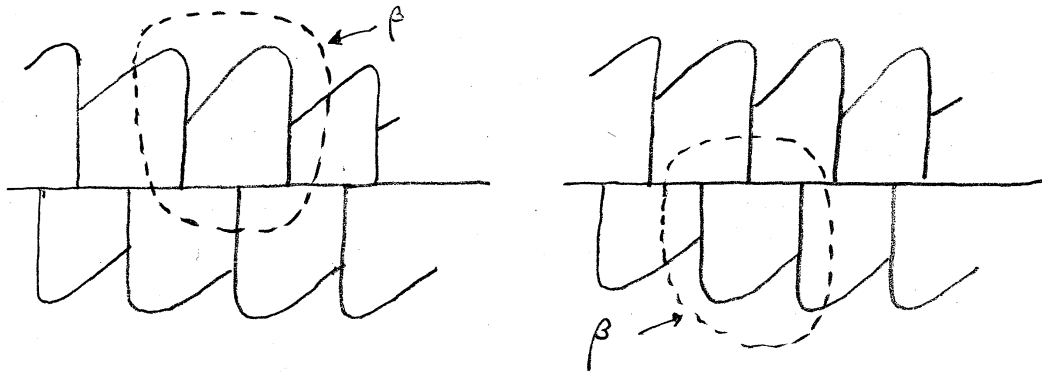
さて §5 に述べた singularity-data  $\Delta_\nu$  で定まる多様体  $M_\nu$  を考えよう。

Prop. 19  $\pi_1(M_\nu) \neq \{1\}$  ( $\nu \geq 7$ )

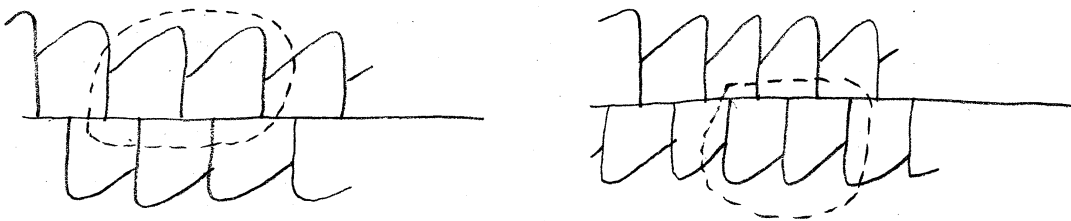
証明の概略.  $\gamma \in \mathcal{L}_\alpha$  ( $p(\gamma) = 1$ ) に対し, Prop. 17 の (A-1) (A-2) を満足する minimum immersion  $Z$  がとれることを示す。

(A-1) はすべての minimum immersion について成り立っている。

$Z$  を minimum immersion とし,  $E \in \mathcal{Q}_5(Z)$  とすると  $E$  に対応する  $\mathbb{R}B^3$  上の単結節曲線  $\beta$  は下図の二つの type のいずれかである。



また,  $E \in \mathcal{Q}_6(Z)$  のうち, 下図のいずれかの type であるものの集合を  $\mathcal{Q}_6^*(Z)$  とする。



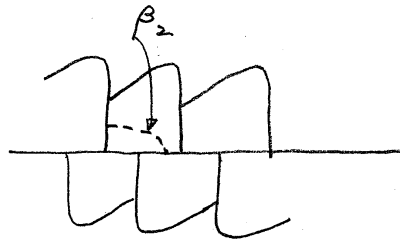
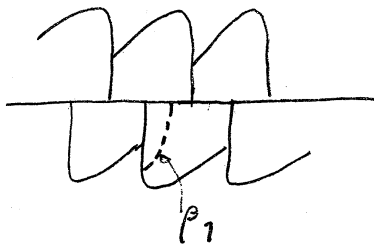
$E \in \mathcal{Q}_5(\mathbb{Z})$  or  $\mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$  で  $\neq$  の type のとき、 $g_j(E) \in \mathcal{Q}$  ( $j=1,2$ ) を次のように定める。  $\partial E$  に対応する  $\beta$  の subarc で右に示される部分を  $\beta_1$  とする。

そして、 $\mathbb{Z}^{-1}(g(\beta_1)) \subset \partial E$  で  $E$  に隣り合う  $\mathcal{Q}$  の元を  $g_1(E)$  とする。

同様に右図の  $\beta_2$  に対して、 $g_2(E)$  を定義をする。

$\neq$  の type の  $E \in \mathcal{Q}_5(\mathbb{Z})$  or

$\mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$  については、下図のような  $\beta_1, \beta_2$  について、同様に  $g_j(E)$  ( $j=1,2$ ) を定める。



このとき、 $\mathbb{Z}$  を minimum immersion のうちで  $\#\mathcal{Q}_5(\mathbb{Z})$  を最大にするようにとっておくと、Prop. 14.15... で繰り返し用いた手法によって、次の (i)~(iv) が示される。

(i)  $E \in \mathcal{Q}_5(\mathbb{Z})$ ,  $g_1(E) \in \mathcal{Q}_6(\mathbb{Z}) \Rightarrow g_1(E) \in \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$

(ii)  $E \in \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$ ,  $g_1(E) \in \mathcal{Q}_6(\mathbb{Z}) \Rightarrow g_1(E) \in \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$

(iii)  $E \in \mathcal{Q}_5(\mathbb{Z})$  or  $\mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$ ,  $g_1(E) \in \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$  とすると、 $\partial E \cap \partial g_1(E)$  に対応する  $\partial B^3$  上の arc は上の  $\beta_2$

の type. i.e.  $E = g_2(g_1(E))$

(iv)  $E \in \mathcal{Q}_5(\mathbb{Z})$ ,  $g_1^j(E) \in \mathcal{Q}_5(\mathbb{Z}) \cup \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$  ( $j=1, \dots, r$ )

$\Rightarrow g_1^r(E) \in \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$

$\exists E$  が  $\bigcup_{E \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z})} E$  の境界に含まれる arc を含むときは、 $E \notin \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$  であることを考えると、(i)-(iii)より、 $E \in \mathcal{Q}_5(\mathbb{Z})$  に対して  $g_1^j(E) \in \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$  ( $j=1, \dots, r-1$ ),  $g_1^r(E) \notin \mathcal{Q}_6^*(\mathbb{Z})$  なる  $r$  が存在することかわかる。そこで  $f: \mathcal{Q}_5(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{Q}$  を  $f(E) = g_1^r(E)$  と定める。(iv)より、 $d^*(f(E)) \geq 7$  となっている。この  $f$  が (A-2) を満足しないとする。Prop. 14.15... で用いた手法により、Prop. 18. の (i), (ii) を満たすような minimum immersion が構成される。このようにして、 $f$  が (A-2) を満たすことが示され、従って、Prop. 19 が示される。■

### Remark

(1) 上の " $\pi_1(M) \neq 117$  の判定法" では、spine が flow-spine であることは全く用いられていない。flow-spine 特有の基本群の表示については §8 に述べる。

(2) 上の議論は、[4] でいうところの (3,6)-map に持ち込もうとするものである。§8 に述べる表示では、(4,4)-map で議論が進められようである……。

## 7. Flow-Spine の簡約化法

多様体  $M$  と、その standard spine  $P$  が与えられたとき、 $M$  の standard spine でより少ない 3rd singularities を持つものを求める操作を簡約化という。[5] 等で考えられている  $D^2 \times I$ -変形は、DS-diagram の少ない境界辺数を持つ face に注目して、spine を簡約化する方法である。一方、前節で述べたことは、spine の簡約不可能性を多様体の基本群の非自明性と結び付ける為には、グラフ  $G(\Sigma)$  の少ない境界辺数の face を問題にすべきであることを示している。このような観点から、flow-spine における“簡約化”を考えよう。

$(\psi_t, \Sigma)$  を  $M$  上の normal pair とし、 $T_{\pm} = T_{\pm}(\psi_t, \Sigma)$ ,  $P_{\pm} = P_{\pm}(\psi_t, \Sigma)$ ,  $a_k$  ( $k=1, \dots, \nu$ ),  $c_k, d_k, C_{\ell}, k(j), \dots$  等は §1~§3 の記号と同じものを用いる。 $P_{-}$  は  $D^2 \times I$ -変形を施した結果は、もはや flow-spine とは限らない。従って、flow-spine の範囲内での変形だけを考えようとするとき、“簡約”の意味から考え直さねばならない。

まず定義から明らかであるが、次のことを注意しておく。

$$\textcircled{\bullet} a_k \text{ が } P_{-} \text{ の一角形の頂点 } \iff C_{k(2)} = C_{k(3)}$$

(“ $n$ 角形”の定義は [5] を参照のこと)

よく知られているように ([1]) spine に一角形がある



ときは、この一角形から  $D^2 \times I$ -変形を行なって、より少ない 3rd singularities を持つ spine を得ることが出来る。

Def.  $P_-(\psi_t, \Sigma)$  のすべての一角形から  $D^2 \times I$ -変形を行なって得られる最も少ない 3rd singularities を持つ多面体を、 $P^*(\psi_t, \Sigma)$  と表わし、 $(\psi_t, \Sigma)$  が定める reduced flow-spine と呼ぶ。

Remark (i)  $P^*(\psi_t, \Sigma)$  が 1-真  $\Rightarrow M = S^3$

(ii)  $P^*(\psi_t, \Sigma)$  が 1-真でもなく、closed fake surface でもない。  $\Rightarrow \pi_1(M) \neq \{1\}$  ([1])

(iii) collapse の仕方により、 $P^*(\psi_t, \Sigma)$  は unique ではないかもしれない。

便宜上、 $P^*(\psi_t, \Sigma)$  が closed fake surface であるときは、

$\# \Theta_3(P^*(\psi_t, \Sigma)) = -1$  とおくことにし、normal pair  $(\psi_t, \Sigma)$

の可約性を次の様に定義する。

Def.  $M$  上の normal pair  $(\psi_t, \Sigma)$  が可約

$\Leftrightarrow M$  上の normal pair  $(\psi'_t, \Sigma')$  で

$$\# \Theta_3(P^*(\psi'_t, \Sigma')) < \# \Theta_3(P^*(\psi_t, \Sigma))$$

となるものが存在する。

可約でないものを既約という。normal pair の可約性を調べるとき、次の事実が基本となる。

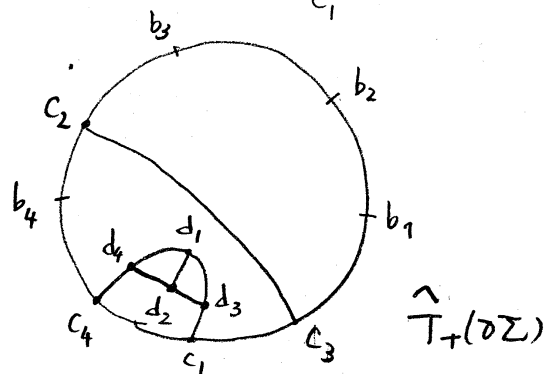
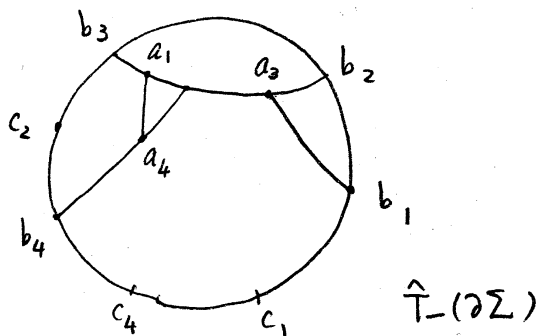
Prop. 20  $a_k$  を  $P(\psi_k, \Sigma)$  の一角形の頂点とし、 $D$  を  $\Sigma - \hat{T}_-(\partial\Sigma)$  の成分で、 $\partial D \supset C_{k(1)}$  なるものとする。このとき、

$$a_{k'} \in \partial D \text{ or } b_{k'} \in \partial D \text{ or } c_{k'} \in \partial D$$

$$\implies a_{k'} \in \mathcal{G}_3(P_-(\psi_k, \Sigma)) - \mathcal{G}_3(P^*(\psi_k, \Sigma))$$

この命題は  $D^2 \times I$ -変形の定義から容易に示される。

flow-spine における簡約化法を、例を用いて、説明しよう。例として次の singularity-data で与えられるものを考える。(これは、実際は  $S^3$  上の normal pair によって実現される。) この singularity-data を与える  $(\psi_k, \Sigma)$  に対して、 $\hat{T}_-(\partial\Sigma)$ 、 $\hat{T}_+(\partial\Sigma)$  は下図のようになる。



これは、一三角形を持たないので、 $P^*(\psi_t, \Sigma) = P_-(\psi_t, \Sigma)$  である。

さて、 $Y_1 \subset \Sigma$  を右図のよう

にとり、 $Y = \psi_\delta(Y_1)$  とする。

( $\delta$  は  $0 < \delta < \hat{T}_+(x)$  for  $x \in \Sigma$

なる実数)  $\partial Y_1$  と  $a_2, a_3$  を結

ぶ  $\hat{T}_-(\partial \Sigma)$  の arc との交点を

$x$  とすると  $x$  を通る orbit の

近くでは  $\Sigma, Y$  は次の図の様に配置されている。

そこで、 $\Sigma$  上に上図のように帯状の領域  $U_1$  をとり、 $f: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$  を

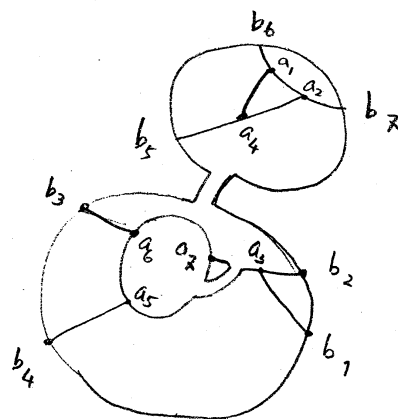
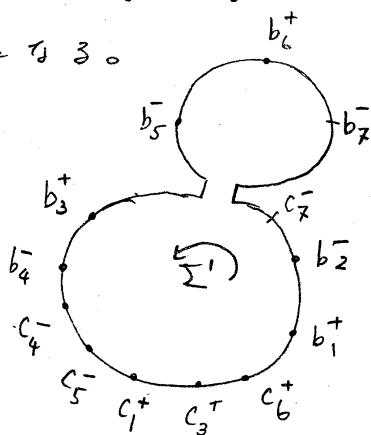
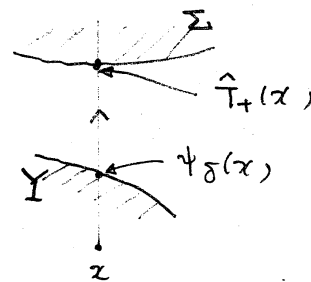
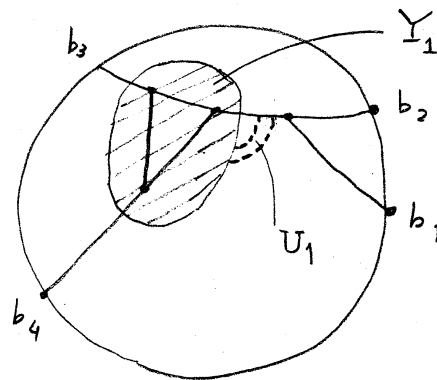
$$\begin{cases} f(x) = \delta & \text{for } x \in \partial U_1 \cap \partial Y_1 \\ f(x) = T_+(x) & \text{for } x \in \partial U_1 \cap \hat{T}_-(\partial \Sigma) \\ 0 < f(x) < T_+(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

なる関数をとる。そして、 $U = \{ \psi_{f(x)}(x) \mid x \in U_1 \}$  と置き、

$\Sigma' = \Sigma \cup Y \cup U$  と定める。 $(\psi_t, \Sigma')$  はまた、normal pair

となりその singularity-data 及び  $\hat{T}_-(\psi_t, \Sigma')(\partial \Sigma')$  は、下

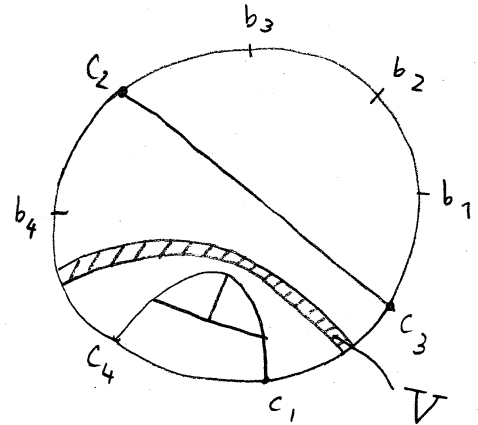
のようになる。



従って、Prop. 20 より、 $\# \mathcal{G}_3(P^*(\psi_t, \Sigma')) < \# \mathcal{G}_3(P^*(\psi_t, \Sigma))$   
 となる ( $a_1$  が一角形の頂点であることに注意する)。

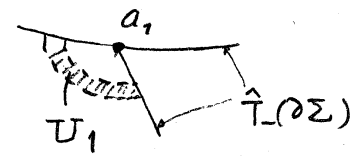
次に、同じ例で  $\hat{T}_+(\partial\Sigma)$  に注目して次の簡約化法を説明する。右のように  $V \subset \Sigma$  をとる

flow  $\psi_t$  を変形することにより、  
 singularity-data を変えることが  
 $V \cap \hat{T}_-(\partial\Sigma) = \emptyset$  とできること  
 が容易に示される。この変形  
 された flow を  $\psi'_t$  とする。



そして  $\Sigma_1 = \mathcal{d}(\Sigma - V)$  とする ( $\Sigma_1$  は 2 つの disk)。  
 $a_1$  の近くに  $U_1 \subset \Sigma$  をとり、

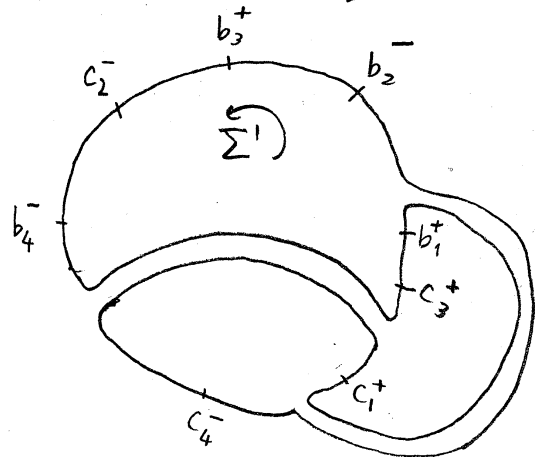
上と同じ手法で  $\Sigma_1$  の 2 つの disks  
 を結び、 $\Sigma' = \Sigma_1 \cup U_1$  とおく。



このとき  $(\psi'_t, \Sigma')$  は normal pair でその singularity-data  
 は右のようになる。これは

対しては、 $a_1$  が一角形の  
 頂点になるので、

$\# \mathcal{G}_3(P^*(\psi'_t, \Sigma')) < \# \mathcal{G}_3(P^*(\psi_t, \Sigma))$   
 が成り立つ。



上に例によって示した二つの手法を用いて、次が示される。

Prop. 21.  $(\psi_t, \Sigma)$  は normal pair で,  $P^*(\psi_t, \Sigma) = P_-(\psi_t, \Sigma)$

(i.e.  $G(\psi_t, \Sigma)$  が一角形を持たない) とする。このとき

$\partial B^3$  上のグラフ  $G(\psi_t, \Sigma)$  に関し、次の (i) ~ (iii) のいづれかを満足する  $\partial B^3$  上の単純閉曲線  $\beta$  が存在すれば  $(\psi_t, \Sigma)$  は可約である。

(i)  $\#(\beta \cap G(\psi_t, \Sigma)) = 2$  で、 $\beta$  で分けられる2つの領域

はそれぞれ2個以上の  $G(\psi_t, \Sigma)$  の頂点を含む

(ii)  $\#(\beta \cap G(\psi_t, \Sigma)) = 3$ ,  $\beta \cap \partial \Sigma = \emptyset$  ( $\Sigma$  と  $\partial B^3$

への像を同一視する) としても、 $\beta$  で分けられる2つの領域

はそれぞれ2個以上の  $G(\psi_t, \Sigma)$  の頂点を含む。

(iii)  $\#(\beta \cap G(\psi_t, \Sigma)) = 1$

$\#(\beta \cap G(\psi_t, \Sigma)) = 3$  から  $\beta \cap \partial \Sigma \neq \emptyset$  なる閉曲線が存在する場合には、可約性が示される場合がある。

Prop. 22  $P^*(\psi_t, \Sigma) = P_-(\psi_t, \Sigma)$  とし、 $\beta$  を  $\#(\beta \cap G(\psi_t, \Sigma))$

$= 3$ ,  $\beta \cap \partial \Sigma \neq \emptyset$  なる  $\partial B^3$  上の単純閉曲線とする。しかも

$\beta$  で分けられる2つの領域は共に2個以上の  $G(\psi_t, \Sigma)$  の

頂点を含むものとし、 $\{x_1, x_2\} = \beta \cap \partial \Sigma$  とする。このとき、次の (i) または (ii) が成り立てば、 $(\psi_t, \Sigma)$  は可約である。

(i)  $\beta \cap \rho(\hat{T}_+(\partial \Sigma)) = \emptyset$  で  $\hat{T}_-(x_1)$  と  $\hat{T}_-(x_2)$  は  $\beta$  によって分離されない。(  $\Sigma$  とその  $\partial B^3$  への像は同一視する。

又、 $\rho$  の定義は §2 を参照)

(ii)  $\beta \cap \hat{T}_-(\partial \Sigma) = \emptyset$  で  $\rho(\hat{T}_+(x_1))$  と  $\rho(\hat{T}_+(x_2))$  は  $\beta$  によって分離されない。

Remark §6 の言葉で述べると、Prop. 21, 22 は、ほぼ次のことに相当する。

" $(\psi_t, \Sigma)$  が既約ならば" minimum immersion  $\Sigma$  に対応するグラフ  $g(\Sigma)$  には、三角形、二角形、一角形はない"

$G(\psi_t, \Sigma)$  が一角形を持つ場合の  $(\psi_t, \Sigma)$  の可約性の条件も、同様の手法で調べることが出来る。また、上の様な flow-spine の簡約化と、 $D^2 \times I$ -変形を関係付けることも出来る。実際上の第一の例では、 $P^*(\psi_t, \Sigma')$  は  $P_-(\psi_t, \Sigma)$  からある  $D^2 \times I$ -変形によって得られる。

## §. 基本群の表示について

ここでは、§4のものとは異なる基本群の表示について述べる。§4の表示は一つの spine  $P(\gamma, \Sigma)$  に注目したものであったが、ここで考える表示は  $P_-(\gamma, \Sigma)$  と  $P_+(\gamma, \Sigma)$  を同時に考えて得られるものである。記号は §1~§3 と同じものを用いる。

$\partial\Sigma = \{c_1, \dots, c_\nu, c_1, \dots, c_\nu\}$  の各成分  $C_e$  に対し、 $\tilde{C}_e^+$ ,  $\tilde{C}_e^-$  を

$$\tilde{C}_e^+ = \{ \psi_t(x) \mid x \in C_e, 0 < t < T_+(x) \}$$

$$\tilde{C}_e^- = \{ \psi_t(x) \mid x \in C_e, T_-(x) < t < 0 \}$$

とおく。また  $X$  を  $4\nu$  個の free generators  $x_1^+, \dots, x_{2\nu}^+, x_1^-, \dots, x_{2\nu}^-$  で生成される free group とする。このとき、 $\pi_1(M)$  は次のように表示される。(  $G(\gamma, \Sigma)$  は連結とする )

Prop. 23.  $\pi_1(M) = \langle X; r_1^+, \dots, r_\nu^+, r_1^-, \dots, r_\nu^-, s_1, \dots, s_\nu, x_{j_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{j_\nu}^{\sigma_\nu} \rangle$

但し、ここで

$$r_k^+ = x_{k(1)}^+ x_{k(3)}^+ (x_{k(2)}^+)^{-1}, \quad r_k^- = x_{k(4)}^- x_{k(2)}^- (x_{k(3)}^-)^{-1}$$

$$s_k = x_{k(1)}^- x_{k(3)}^+ (x_{k(2)}^-)^{-1} (x_{k(4)}^+)^{-1}, \quad \sigma_k = + \text{ or } -$$

であり、 $x_{j_k}^{\sigma_k}$  は  $(M - (P_- \cup P_+)) \cup \tilde{C}_{j_1}^{\sigma_1} \cup \dots \cup \tilde{C}_{j_\nu}^{\sigma_\nu}$  が連結となるように選ばれたものである (このように

選びえは一意ではないが、表示される群はこの選びえによらない。

この  $\pi_1(M)$  の表示は、Prop. 7 と、 $P_- \cup P_+$  が  $M$  の胞体分割を与えることから導かれる。

### [参考文献]

- [1] Ikeda, H., *Acyclic fake surfaces*, *Topology* 10 (1971)
- [2] ———, *Acyclic fake surfaces which are spines of 3-manifolds*, *Osaka J. Math.* 9 (1972)
- [3] Ishii, I., *Filows and Spines*, preprint
- [4] Lyndon & Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer
- [5] 池田, 井上: 3次元多様体, *Fake surfaces, DS-diagrams*,  
数理研講究録 524
- [6] 横山, 山下, *DS-diagram の基本変形*, 講究録 524