数理解析研究所講究録
第564巻 1985年 236-249

2段タンデム待ち行列系における呼損率の分離可能性について

東京理科大 牧野都治 (Toji Makino)

1. まえがき

本論文では主に，2段タンデム型の待ち行列系を扱う。ここで，たとえば A/B/1(N)→/M/1(0) のような記号を用いるが，これは次のシステムをさす。第1段が A/B/1(N) の単一窓口の系。ただし，かっこ内の数Nは，第1段の行列での許容人数であって，行列人数がNのときに到着した客は損失呼になる。第1段の系でサービスをおえた客は，第2段の窓口にはいる。本論文で扱う第2段窓口は，いずれも上に例示した系，すなわち指数サービス・単一窓口・行列許容人数は0 の系である。したがって，第2段の窓口がふさがっているとき，第1段でサービス終了した客は，損失呼になる。

ところで，単段待ち行列系 M/M/1(N) からの退去間隔は，N=0 および ∞ のとき，たがいに独立にな

ることが よく知られている。したがって，たとえば 2 段タンデムの系 $M/M/1(0)\rightarrow/M/1(0)$ での第2段の呼損率を知りたいとき，第1段 $M/M/1(0)$ からの出力 GI が第2段への到着（入力）である単一窓口の系 $GI/M/1(0)$ を考えればよいことになる。

また，客の到着間隔が確率変数 A，サービス時間が確率変数 S で表されるような単段の系 $M/G/1(0)$ からの退去間隔（出力）もたがいに独立で，$A+S$ の分布にしたがう。ゆえに 2段タンデムの系 $M/G/1(0)\rightarrow/M/1(0)$ での第2段の呼損率を知るのに，$A+S$ を到着分布 GI とする単段の系 $GI/M/1(0)$ での呼損率を計算すればよい。

このように，第2段の呼損率を調べるのに，第1段をきり離して扱ってよいようなとき，「第2段の呼損率は分離可能である」という。本論文では，まず次のことを扱う。それは，$M/M/1(N)$ からの退去間隔はたがいに独立ではないのに，2段タンデムの系

$$M/M/1(N)\rightarrow/M/1(0)$$

での第2段の呼損率は分離可能であることを示す。このことは，上に述べたように，第2段の呼損率を計算するのに，第1段からの出力があたかも独立な，第2段

の窓口への入力とみなして計算してよいことを意味する。

つぎに，$GI/M/1(0)$ からの出力は 1-dependent であるに拘らず，$GI/M/1(0) \to /M/1(0)$ での第2段の呼損率もまた分離可能であることを示す。しかし $GI/G/1(0)$ からの出力も 1-dependent になるのに，たとえば

$$E_2/E_2/1(0) \to /M/1(0)$$

の系は，もはや分離可能でないことを示す。

2. 第1段が $M/M/1(N)$ の系

$M/M/1(N)$ からの退去間隔は，$N=0$ または ∞ の場合を除いては，一般に独立にならないことが，よく知られている。[4] それにも拘らず，2段タンデムの系，$M(\lambda)/M(\mu_1)/1(N) \to /M(\mu_2)/1(0)$ を考えるとき，第2段の呼損率は分離可能である。本節では，このことを示す。ただし，上のかっこ内の λ，μ_1，μ_2 はそれぞれ，第1段への到着率，第1段窓口でのサービス率，第2段窓口でのサービス率を表す。

2—(1) 第1段からの退去を独立とみたときの，第2段での呼損率

はじめに，第1段からの退去間隔について考える。

いま，第1段の系で，客の退去直前の系人数を state にと

り，退去直前の系人数が 1 である平衡状態確率 $p_1^{(-)}$ を求めると，

$$p_1^{(-)} = \frac{1}{1+\rho_1+\rho_1^2+\cdots+\rho_1^N} \quad \cdots\cdots (1)$$

（ただし，$\rho_1 = \lambda/\mu_1$ ）

を得る。よって

$$1-p_1^{(-)} = \frac{\rho_1+\rho_1^2+\cdots+\rho_1^N}{1+\rho_1+\rho_1^2+\cdots+\rho_1^N} \quad \cdots\cdots (2)$$

である。

ところで，$M(\lambda)/M(\mu_1)/1(N)$ からの退去間隔 U の分布の積率母関数（m. g. f.）を $M_U(\theta)$ とすると，これは上の $p_1^{(-)}$，$1-p_1^{(-)}$ を用いて，次のように表せる。

$$M_U(\theta) = M_{A+S}(\theta)\cdot p_1^{(-)} + M_S(\theta)\cdot\{1-p_1^{(-)}\} \cdots (3)$$

ただし，$M_{A+S}(\theta)$ および $M_S(\theta)$ はそれぞれ，A+S の分布，S の分布の m. g. f. であって，いまの場合

$$M_{A+S}(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda-\theta}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_1-\theta} \quad , \quad M_S(\theta) = \frac{\mu_1}{\mu_1-\theta}$$

である。よって出力分布は次のようになる。

$$M_U(\theta) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-\theta}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_1-\theta}\right)\cdot\frac{1}{1+\rho_1+\rho_1^2+\cdots+\rho_1^N} + \left(\frac{\mu_1}{\mu_1-\theta}\right)\cdot\frac{\rho_1+\rho_1^2+\cdots+\rho_1^N}{1+\rho_1+\rho_1^2+\cdots+\rho_1^N} \quad \cdots (4)$$

つぎに，GI/M/1(0) での呼損率を調べてみる。そのために，この系への到着間隔をT，サービス時間をSとすると，客の到着直前に系人数が1である平衡状態確率，つまり呼損率 $g_1^{(-)}$ は

$$g_1^{(-)} = P(T < S) \qquad \cdots (5)$$

により求められる。ここでTを，形式的に（ほんとうは独立ではないが）M/M/1(N)→/M/1(0) での第1段からの退去間隔Uでおきかえ，Sを第2段窓口でのサービス時間と考えることにすると，

$$g_1^{(-)} = \int_0^\infty e^{-\mu_2 t} \cdot g(t)\,dt$$

（ただし $g(t)$ はTの p.d.f.）

$$= M_U(-\mu_2).$$

(4)式を用いて，第2段での呼損率

$$g_1^{(-)} = \frac{\lambda\mu_1\{\mu_1^N + (\lambda+\mu_2)(\mu_1^{N-1} + \lambda\mu_1^{N-2} + \cdots + \lambda^{N-2}\cdot\mu_1 + \lambda^{N-1})\}}{(\mu_1+\mu_2)(\lambda+\mu_2)(\mu_1^N + \lambda\mu_1^{N-1} + \lambda^2\mu_1^{N-2} + \cdots + \lambda^{N-1}\cdot\mu_1 + \lambda^N)} \qquad \text{---- (6)}$$

を得る。

2—(2)　平衡方程式を解いて求めた呼損率

通常の方法によって正しく求められる呼損率が，上で求めた

(6) 式と一致することを示そう。

そのために，表1 のように状態を分類し，平衡方程式をたてる。表で，第1段の窓口の状態らんには，行列人数をふくめた系人数を記してある。

表1. $M(\lambda)/M(\mu_1)/1\ (N) \to /M(\mu_2)/1\ (0)$

の平衡方程式

State	第1窓口の状態	第2窓口の状態	平衡方程式
(0, 0)	0	0	$\mu_2 \cdot P_{0,1} - \lambda \cdot P_{0,0} = 0$
(0, 1)	0	1	$\mu_1 \cdot P_{1,0} + \mu_1 \cdot P_{1,1} - (\lambda + \mu_2) \cdot P_{0,1} = 0$
$(n, 0)$	n $(N \geqq n \geqq 1)$	0	$\lambda \cdot P_{n-1,0} + \mu_2 \cdot P_{n,1} - (\lambda + \mu_1) \cdot P_{n,0} = 0$
$(n, 1)$	n $(N \geqq n \geqq 1)$	1	$\lambda \cdot P_{n-1,1} + \mu_1 \cdot P_{n+1,0} + \mu_1 P_{n+1,1} - (\lambda + \mu_1 + \mu_2) P_{n,1} = 0$
$(N+1, 0)$	$N+1$	0	$\lambda \cdot P_{N,0} + \mu_2 \cdot P_{N+1,1} - \mu_1 \cdot P_{N+1,0} = 0$
$(N+1, 1)$	$N+1$	1	$\lambda \cdot P_{N,1} - (\mu_1 + \mu_2) \cdot P_{N+1,1} = 0$

上の方程式と，正則条件 $\sum_{i=0}^{N+1} (P_{i,0} + P_{i,1}) = 1$ を用いて，$P_{i,j}$ $(i = 0, 1, \cdots, N+1\ ;\ j = 0, 1)$ を求めることができて，とくに $i = 0$ に対して次式を得る。

$$P_{0,0} = \frac{\mu_2 \cdot \mu_1^{N+1}}{(\lambda + \mu_2)(\lambda^{N+1} + \lambda^N \mu_1 + \cdots + \lambda^2 \mu_1^{N-1} + \lambda \mu_1^N + \mu_1^{N+1})}$$

$$p_{0,1} = \frac{\lambda}{\mu_2} \cdot p_{00} = \frac{\lambda \cdot \mu_1{}^{N+1}}{D}$$

ただし，$D=(\lambda+\mu_2)(\lambda^{N+1}+\lambda^N\mu_1+\cdots+\lambda^2\mu_1^{N-1}+\lambda\mu_1^N+\mu_1^{N+1})$.

また，$N \geqq n \geqq 0$ なる n に対して，

$$p_{n,0} = \frac{\lambda^n \cdot \mu_2 \cdot \mu_1^{N+1-n}}{D} \quad , \quad p_{n,1} = \frac{\lambda^{n+1} \cdot \mu_1^{N+1-n}}{D}$$

さらに，$p_{N+1,0}$ および $p_{N+1,1}$ は

$$p_{N+1,1} = \frac{\lambda^{N+2} \cdot \mu_1}{(\mu_1+\mu_2)\cdot D} \quad , \quad p_{N+1,0} = \frac{\lambda^{N+1} \cdot \mu_2(\lambda+\mu_1+\mu_2)}{(\mu_1+\mu_2)\cdot D}$$

になる。

第2段での（正しい）呼損率 $\delta_1^{(-)}$ は

$$\delta_1^{(-)} = \frac{p_{11}+p_{21}+p_{31}+\cdots+p_{N+1,1}}{1-(p_{00}+p_{01})} \quad \cdots\cdots(7)$$

で求められるので，これに上の値を代入して計算することにより，それが先に求めた(6)式と一致することがわかる。

よって $M(\lambda)/M(\mu_1)/1(N) \to /M(\mu_2)/1(0)$ での第2段の呼損率は分離可能であるといってよい。

3. 第1段が GI/M/1(0) の系

3－(1) GI/M/1(0) からの出力の従属性

確率変数列$\{X_n\}$があって，$|i-j|>k$であるようなX_iとX_jとはたがいに独立になるならば，$\{X_n\}$はk—dependentな定常確率過程をつくるとよばれている。そこで，GI/G/1(0)という単一窓口からの退去間隔を考えてみると，これが1—dependentであることがすぐわかるが，とくにGI/M/1(0)については，次のように表すことができる。いま，次の記号を用いる。

C_n；n番目にサービスをうける客

L_n；$(n-1)$番目の退去とn番目の退去との間の時間間隔

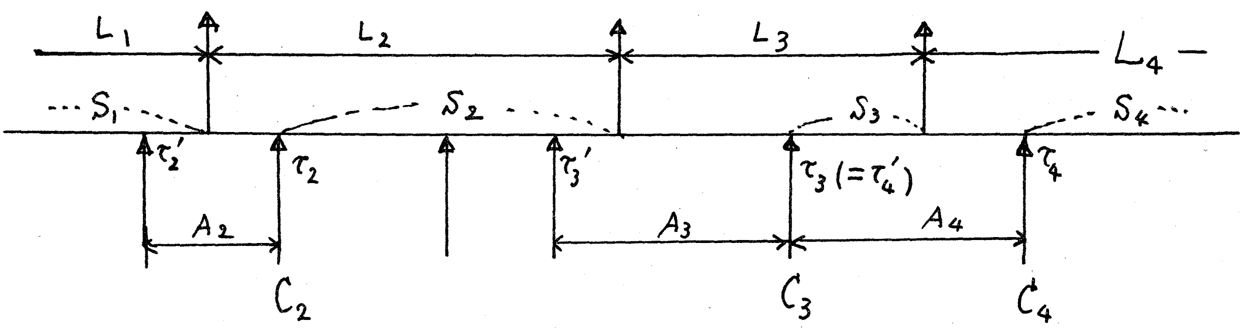
S_n；客C_nのサービス時間

τ_n；客C_nの到着時刻

τ_n'；客C_nが到着する直前にシステムに到着した客の到着時刻

そして，$A_n=\tau_n-\tau_n'$と書くことにする。図1は，このような到着と退去の関係を示している。

図1．客の到着と退去



S_i $(i=1,2,3,\cdots)$ が指数分布にしたがうので，図のたとえば L_2 を，次のように書くことができる。

$$L_2 = S_2 + (A_2 - S_1 \mid A_2 - S_1 > 0) \quad \text{----} (8)$$

ただし (8) 式右辺のかっこ内の記号は，$A_2 - S_1 > 0$ という条件のもとでの $A_2 - S_1$ の分布を表す確率変数の意味である。　同様に，L_3，L_4，---- について

$$L_3 = S_3 + (A_3 - S_2 \mid A_3 - S_2 > 0) \quad \text{----} (9)$$

$$L_4 = S_4 + (A_4 - S_3 \mid A_4 - S_3 > 0) \quad \text{-----} (10)$$

よって，$\{L_n\}$ は 1-dependent であることがわかる。

[注]　文献[5]では，「退去間隔が (8) 式のような同一分布にしたがう」とすべきところを，「(8) 式のように書けるので独立な分布にしたがう」としているが，それは誤りである。

3－(2)　GI/M/1(0) → /M/1(0) の分離可能性

GI/M/1(0) → /M/1(0) の系で，第2段への客の到着直前における第2段の窓口の人数（0か1）をstateにとって，推移確率行列 $\mathbb{P}$ をつくると，右のようになる。

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c|cc} k \backslash k+1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & P(L > S_2) & P(L < S_2) \\ 1 & P(L > S_2) & P(L < S_2) \end{array}$$

（ただし $\mathbb{P}$ は，第2段への k 番目の到着直前から，$(k+1)$ 番目の到着直前＜実際には呼損になってしまうかもしれない＞における状態推移を表わしている。）

上の行列 $\underline{P}$ で，

L は第1段からの退去間隔（出力），S_2 は第2段窓口でのサービス時間

を意味する。 この行列 $\underline{P}$ から，第2段での呼損率 $g_1^{(-)}$ は，L の dependency には無関係で

$$g_1^{(-)} = P(L < S_2)$$

と書けることがわかる。 このことは，第2段での呼損率は分離可能であることを意味している。

4. 第1段が $E_2/E_2/1(0)$ の系

$GI/M/1(0) \to /M/1(0)$ では，第2段の呼損率に関して，第1段と分離できたが，$GI/G/1(0) \to /M/1(0)$ では分離できない。 このことを示すには，

$$E_2/E_2/1(0) \to /M/1(0)$$

について，これが分離不能であることを示せば十分である。そのことを示そう。

4－(1) 第1段からの退去を独立とみたときの，第2段での呼損率

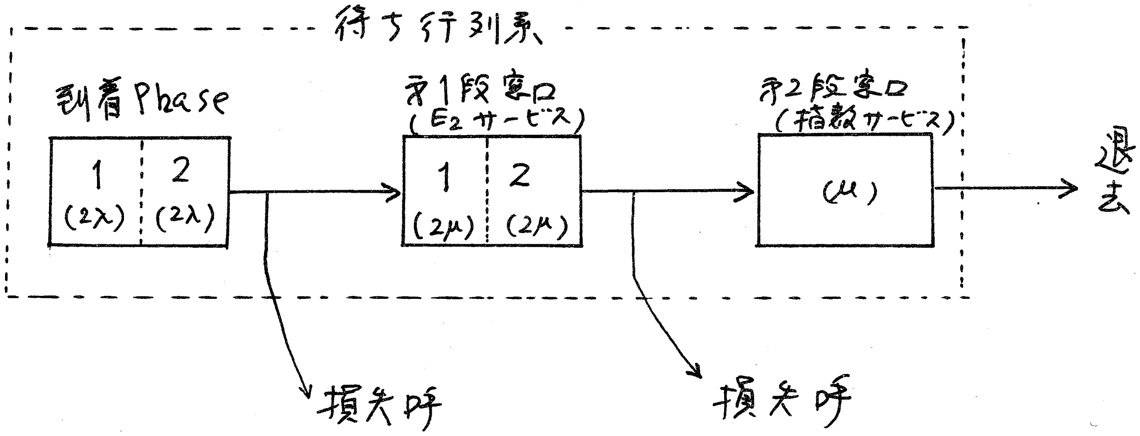
2－(1) で考えたのと同じように，まず第1段からの退去間隔 L の分布を考える。 $E_2/E_2/1(0)$ の系では，客の退去直前に着目したとき，(到着の）到着客が到着位相1，2の何れにあるかについて，（平衡状態で考えると）確率 1/2 ずつ

になっていることが，すぐわかる。よって，U の分布の m.g.f. $M_U(\theta)$ は，次のようになる。

$$M_U(\theta) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\lambda}{2\lambda-\theta}\right)^2\cdot\left(\frac{\mu}{\mu-\theta}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\lambda}{2\lambda-\theta}\right)\cdot\left(\frac{\mu}{\mu-\theta}\right) \quad \text{----} (11)$$

ただし，本節で扱うシステムは次図に示すものとする。

図2. $E_2(\lambda)/E_2(\mu)/1(0) \to /M(\mu)/1(0)$ の系



第2段での呼損率を求めるには，2節で用いた(5)式

$$g_1^{(-)} = P(T<S)$$

を計算すればよいので，いまの場合

$$g_1^{(-)} = M_U(-\mu) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+\mu}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2\lambda}{2\lambda+\mu}\right)$$

$$= \frac{\rho(1+4\rho)}{2(1+2\rho)^2} \quad (\text{ただし，} \rho = \lambda/\mu) \quad \text{-----} (12)$$

これが，第1段からの出力を，あたかも独立であるとみなしたときの，第2段での呼損率である。一方，正しい値は次のようにして求められる。

4-(2) 呼損率の分離不能性

図2に示した系 $E_2(\lambda)/E_2(\mu)/1(0)\rightarrow/M(\mu)/1(0)$ について，平衡方程式をたて，平衡状態確率を求めるために，表2をつくる。

表2. $E_2(\lambda)/E_2(\mu)/1(0)\rightarrow/M(\mu)/1(0)$ の平衡方程式

State	到着のphase	第1段窓口	第2段窓口	平衡方程式
(100)	1	0	0	$\mu\cdot P_{101}-2\lambda\cdot P_{100}=0$
(101)	1	0	1	$2\mu\cdot P_{120}+2\mu\cdot P_{121}-(2\lambda+\mu)\cdot P_{101}=0$
(110)	1	1	0	$2\lambda\cdot P_{210}+2\lambda\cdot P_{200}+\mu\cdot P_{111}-(2\lambda+2\mu)\cdot P_{110}=0$
(111)	1	1	1	$2\lambda\cdot P_{211}+2\lambda\cdot P_{201}-(2\lambda+2\mu+\mu)P_{111}=0$
(120)	1	2	0	$2\lambda\cdot P_{220}+2\mu\cdot P_{110}+\mu\cdot P_{121}-(2\lambda+2\mu)\cdot P_{120}=0$
(121)	1	2	1	$2\lambda\cdot P_{221}+2\mu\cdot P_{111}-(2\lambda+2\mu+\mu)\cdot P_{121}=0$
(200)	2	0	0	$2\lambda\cdot P_{100}+\mu\cdot P_{201}-2\lambda\cdot P_{200}=0$
(201)	2	0	1	$2\lambda\cdot P_{101}+2\mu\cdot P_{221}+2\mu\cdot P_{220}-(2\lambda+\mu)\cdot P_{201}=0$
(210)	2	1	0	$2\lambda\cdot P_{110}+\mu\cdot P_{211}-(2\lambda+2\mu)\cdot P_{210}=0$
(211)	2	1	1	$2\lambda\cdot P_{111}-(2\lambda+2\mu+\mu)\cdot P_{211}=0$
(220)	2	2	0	$2\lambda\cdot P_{120}+2\mu\cdot P_{210}+\mu\cdot P_{221}-(2\lambda+2\mu)\cdot P_{220}=0$
(221)	2	2	1	$2\lambda\cdot P_{121}+2\mu\cdot P_{211}-(2\lambda+2\mu+\mu)\cdot P_{221}=0$

上の方程式と正則条件を用いて平衡状態確率を求めるとよいのであるが，少し煩雑になる。それよりも，ここでは第2段での呼損率が分離不能であることを示すのがねらいなので，$\lambda/\mu=\rho$ の値が $1/2$ のとき，分離不能となることを示そう。

このとき，平衡状態確率は次のようになる。

$P_{100} = 1125/9450$　　$P_{200} = 2362.5/9450$

$P_{101} = 1125/9450$　　$P_{201} = 1237.5/9450$

$P_{110} = 1020/9450$　　$P_{210} = 367.5/9450$

$P_{111} = 330/9450$　　$P_{211} = 82.5/9450$

$P_{120} = 938/9450$　　$P_{220} = 587/9450$

$P_{121} = 187/9450$　　$P_{221} = 88/9450$

第2段での呼損率 $g_1^{(-)}$ は

$$g_1^{(-)} = \frac{P_{121}+P_{221}}{P_{120}+P_{121}+P_{220}+P_{221}} \qquad \text{-----}\ (13)$$

で求められるので，これに上の値を代入して計算してみると，

$$g_1^{(-)} = \frac{11}{72}$$

となる。これは，前に求めた(12)式の $g_1^{(-)}$ の式で $\rho=1/2$ としたときの値 $3/16$ とは異なったものになっている。よって，$E_2/E_2/1(0)\to/M/1(0)$ は分離不能であることがわかった。

文　献

[1] 津村善郎，牧野都治； タンデムによる G/M/1 の考察， 昭43年10月， 日本数学会予稿集.

[2] 牧野都治； 独立でない到着分布をもつ待ち行列系， 昭44年10月， 日本数学会予稿集.

[3] 仝上 ； タンデムキューについての考察， 昭46年5月， 日本数学会予稿集.

[4] Laslett, G. M., "Characterising the Finite Capacity GI/M/1 Queue with Renewal Output," Management Science, Vol. 22, No. 1, 1975.

[5] Makino, T., "On the Independence of Inter-departure Intervals from Single Server Queueing Systems," Ann. Inst. Statist. Math., Vol. 29, No. 2, A, 1977.

[6] 牧野都治； 退去間隔の従属性と窓口の分離可能性について， 昭60年4月， 日本数学会予稿集.