数理解析研究所講究録
第 566 巻 1985 年 8-12

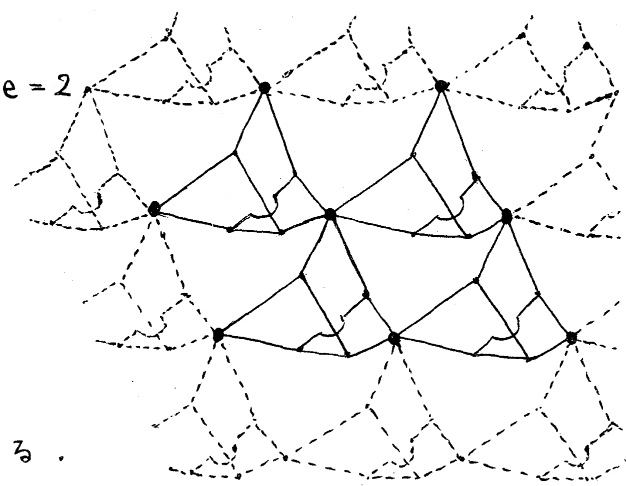
Shannon switching games without terminals

大阪大・医療短大　山﨑洋平
(College of biomedical technology, Osaka Univ., Yohei Yamasaki)

本稿では Shannon switching games の一般化として次のようなものを考えるが，その結果，原対象についての理論はより自然な形に翻訳された上で一般的に成立している．

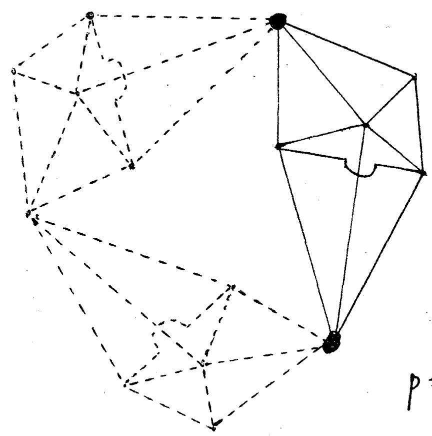
p を素数，e，r を非負の整数とし $G=\mathbb{Z}_p{}^e$ とおく．$\tilde{\Gamma}=(\tilde{V},\tilde{E})$ を G が作用する graph とし $\Gamma=(V,E)$ を orbit space，ρ を reduction とする．Short，Cut という二人の競技者が交互に E の元を一つずつ占め合い，前者の占めた元全体のなす集合 S に対し $(\tilde{V},\rho^{-1}(S))$ のすべての連結成分の stabilizers が生成する G の部分群 $\mathcal{S}(S)$ の階数が r 以上のとき彼の勝ちとする．

例．$e+1$ 個の端点をもつ graph のコピーを p^e 個用意して，その端点を $(\mathbb{R}/p\mathbb{Z})^e$ の格子点に据えつける．



ただし端点は同一超平面上にないようにとり，コピーは互に相異なる位置に平行移動しあっているようにする．$G=\mathbb{Z}_p^{e}$ は加法的に作用させる．このとき Short の勝ちは $(\tilde{V}, \rho^{-1}(S))$ において，端点に由来する頂点を含む連結成分が高々 p^{e-r} 個であることを示している．

例の例．$e=r=1$ のとき視野を一つのコピーに限り，Short の勝ちは端点間を結ぶ道を獲得することと解釈する．(Shannon switching game)



$p=3$

以下 G を固定する．G の作用する graph を G-graph といい，以下一つの G-graph $\tilde{\Gamma}=(\tilde{V},\tilde{E})$ を固定する．E の部分集合 S に対し $(\tilde{V}, S)$ の連結成分の数を c_S と書く．また余剰数 $\sigma(S)$ を次のように定める；

$$\sigma(S)=|S|+c_S-\operatorname{rank}\mathcal{S}(S).$$

補題．$E\supset S\supset T$ に対し次の二式が成立する；

i) $\mathcal{S}(S)\supset\mathcal{S}(T)$,

ii) $\sigma(S)\geq\sigma(T)$.

証明は容易である．E の部分集合 S は $\sigma(S) = \sigma(\phi)$ をみたすとき *G-forest* という．これが更に $c_S = c_E$ をみたすとき *spanning* を冠する．spanning G-forests A, B に対しその対称差の元の数 $|A \ominus B|$ を A, B 間の距離という．また最大距離にある spanning G-forests の対の集合を *Ω* と書く．spanning G-forests の組 $\varphi = (A, B)$ に対し *height* *$\eta(\varphi)$* を次のように定める：

$$\eta(\varphi) = \operatorname{rank} \mathcal{S}(A) + \operatorname{rank} \mathcal{S}(B).$$

この値は Ω 上一定であることが次の定理により判明するが，後述する primitive G-graph のときのように一定であることが明らかなときはこの値を *$\tilde{\Gamma}$ の height* という

定理．Ω の元 ω が与えられたとき次の関係が成立する：

$$\text{Short 必勝} \iff \eta(\omega) > 2r-1$$

$$\text{先手必勝} \iff \eta(\omega) = 2r-1$$

$$\text{Cut 必勝} \iff \eta(\omega) < 2r-1.$$

この定理の証明は実質的には次の二つの命題に負うが，そのために次の定義を要する．G-graph $\tilde{\Delta}$ が *primitive* で

あるとは $\tilde{\Delta}$ の orbit space の辺集合が二つの相交わらない G-forests で覆われていることをいう。

命題1. $\omega=(A,B)$ を Ω の元とする。このとき $\tilde{\Gamma}$ は height が $\eta(\omega)$ の primitive G-subgraph をもつ。

命題2. $\omega=(A,B)$ を Ω の元とする。このとき $\tilde{\Gamma}$ は height が $\eta(\omega)$ の primitive G-graph に contract できる。

証明方針. 前者に関しては A, B の cycle 部から A, B それぞれの中で互に他の頂点に達するように, G-subforests の増大列を作り最後の項をもってくればよい。後者についてはまず spanning G-forests の減少列 $A[j]$, $B[j]$ を次のようにとる：

0) $A[0]=A$, $B[0]=B$

i) $\mathcal{S}(A[j+1]) \subset \mathcal{S}(B[j])$

$\mathcal{S}(B[j+1]) \subset \mathcal{S}(A[j])$

ii) 上の条件をみたす範囲で $(\eta(A[j], B[j]) \mid j=0,1\cdots)$ は辞書式順序に関して最大。

この操作で生じる最終的な $\mathcal{S}(A[j])$ $(= \mathcal{S}(B[j]))$ をHとするとき $\tilde{\Gamma}$ をまず mod H で contract したもの $\tilde{\Gamma}_H$ を考える. $\tilde{\Gamma}_H$ の頂点集合を $\rho^{-1}(A_H)$, $\rho^{-1}(B_H)$ それぞれで見た連結成分をもう一方で見,できた成分を再び元のもので見る……. この操作を繰り返してできた最終成分を contract したものが所期のものである.

最後に,本稿は[3](特にII)の要約である.

参考文献

[1] J. Bruno and L. Weinberg, A constructive graph-theoretic solution of the Shannon switching games, IEEE Trans. Circuit Theory Feb 1970.

[2] 大附辰夫,シャノンのスイッチングゲームのグラフ理論による構成的解法,京大数理研講究録 217 (1974).

[3] Y. Yamasaki, Shannon switching games without terminals 及びその II, 投稿中.